МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 539. 19+532.032

© **Б. П. Шарфарец,** 2023

# ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НА ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ ИЗЛУЧЕННОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

В работе обосновывается возможность использования гидродинамической модели вязкой, несжимаемой, теплопроводящей жидкости для расчета параметров электроосмотического течения в пористой среде, наполненной жидкостью, в условиях приложения к этой среде постоянного и переменного электрических полей. Приводятся условия перехода к этой модели от модели вязкой, сжимаемой жидкости. Указываются границы параметров задачи, в частности границы скоростей течения и частотные ограничения для оправданности такого перехода. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании указанных процессов на вычислительных пакетах.

*Кл. сл.*: электроосмотический излучатель, вязкая несжимаемая жидкость, уравнение Навье – Стокса, общее уравнение переноса тепла, частотные ограничения

## ВВЕДЕНИЕ

При изучении поведения жидкости или газа при их движении под воздействием сил различной природы обычно пользуются системами различных связанных между собой уравнений. Так, например, если движение жидкости сопряжено с электрическими силами, то привлекается дополнительно система уравнений электрогидродинамики (см., например, [1–3]). Особенностью таких систем разнородных уравнений является необходимость их совместного решения в силу связанности описываемых ими физических полей. Решение таких систем аналитически, как правило, невозможно в силу сложности взаимосвязанных уравнений системы, нетривиальности геометрии рассматриваемых в задаче краевых условий и т.д. Поэтому, как правило, такие задачи приходится решать численно с привлечением специализированных вычислительных пакетов, в частности пакета COMSOL Multiphysics — программного пакета для анализа, решения и моделирования методом конечных элементов для различных физических и инженерных приложений, особенно связанных мультифизичных явлений.

В арсенале пакета можно выбрать физические модели различной сложности. Основная задача предметного специалиста при этом выбрать компромиссный набор физических моделей, исходя из критерия "цена – качество", т.е. выбрать наименее сложную физическую модель при приемлемой точности получаемого решения.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В настоящей работе обосновывается возможность использования простейшей гидродинамической модели вязкой, несжимаемой, теплопроводящей жидкости для расчета параметров электроосмотического течения в пористой среде, наполненной жидкостью, в условиях приложения к этой среде постоянного и переменного электрических полей.

## РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

### Допущение о несжимаемости жидкости

Далее приводится полная система уравнений гидродинамики для вязкой сжимаемой жидкости. Эту систему в работе необходимо максимально упростить в рамках приемлемой точности для решения задачи расчета акустического поля электрокинетического излучателя.

Наиболее общим гидродинамическим уравнением ламинарного движения вязкой жидкости является уравнение Навье – Стокса для сжимаемых жидкостей (см., например, [1, с. 73]):

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}+\mathbf{F}. \quad (1)$$

К нему добавляется уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2}$$

и общее уравнение переноса тепла [1, с. 273]

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + D, \tag{3}$$

а также уравнение состояния, связывающее давление $p$ с плотностью среды $\rho$ и с энтропией $s$ (см. [4, с. 10])

$$p = p(\rho, s). \tag{4}$$

Система (1)–(4) является полной и содержит шесть скалярных соотношений для определения шести полей: трех компонентов вектора скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, давления $p$, плотности жидкости $\rho$ и энтропии единицы массы жидкости $s$.

Функцию $D$ в правой части (3), определяемую равенством

$$D = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2 + \varsigma(\operatorname{div}\mathbf{v})^2, \tag{5}$$

называют диссипативной функцией. Она характеризует необратимые потери в вязкой гидродинамической системе (1)–(4).

Выше в (1)–(4) приняты обозначения: $\eta$ и $\zeta$ — соответственно динамическая и объемная вязкости жидкости; $\kappa$ — коэффициент теплопроводности (в уравнениях (1) и (3) эти величины постоянные); $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу объема жидкости, в частности в электрогидродинамических задачах это пондеромоторная сила, которую в электроосмотических задачах обычно ограничивают силой Кулона $\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E}$, где $\rho_e$ — объемная плотность электрического заряда в жидкости; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности приложенного к жидкости электрического поля.

Система (1)–(4) является достаточно сложной и трудоемкой при ее моделировании на вычислительных пакетах. Однако при некоторых допущениях она может быть значительно упрощена. Эти допущения касаются поведения трех полей: поля плотности среды $\rho$, поля скорости среды $\mathbf{v}$ и температурного поля среды $T$.

Так, при допущении о несжимаемости жидкости

$$\rho = \text{const} \tag{6}$$

упрощаются уравнение движения Навье – Стокса (1), уравнение непрерывности (2), а также выражение для диссипативной функции (5) в уравнении переноса тепла (3) и уравнении состояния (4). При допущении о малых вариациях температуры $T = T_0 + T'$, где $T_0$ — средняя температура среды, $T'$ — ее вариация, т.е. при условии $T_0 \gg T'$, упрощается также уравнение переноса тепла (3). Из условия о малом числе Маха $M = |\mathbf{v}|/c \ll 1$, где $c$ — скорость звука в среде, следует допущение (6) о практической несжимаемости жидкости.

Далее подробно остановимся на деталях этих допущений, а пока выпишем измененный вид системы (1)–(4) после принятия этих допущений.

Уравнение движения (1) трансформируется к уравнению движения для несжимаемой жидкости [5, с. 73]

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}. \tag{7}$$

Уравнение непрерывности (2) также сводится к виду, соответствующему несжимаемой жидкости [5, с. 73]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0\,. \tag{8}$$

Общее уравнение переноса тепла при условии малости числа Маха и условии о малых вариациях температуры сводится к виду [5, с. 277]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{9}$$

где $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость; $\chi$ — коэффициент температуропроводности, $\chi = \kappa/\rho$; $c_p$ — теплоемкость среды при постоянном давлении.

Таким образом, система (7)–(9), содержащая пять скалярных соотношений (векторное уравнение (7) распадается на 3 скалярных), является полной для определения пяти полей: $(\mathbf{v}, p, T)$.

Далее подробнее приведем условия, при которых жидкость можно считать несжимаемой при ее *стационарном* и *нестационарном* течении. Эти вопросы подробно рассмотрены в работе [5].

### Стационарное течение жидкости

Согласно [5, с. 41], вариация изменения плотности $\rho$ в стационарно движущейся жидкости имеет такой порядок

$$\Delta\rho \sim O\left(\frac{\rho v^2}{c^2}\right). \tag{10}$$

Здесь $\Delta\rho$ — вариации плотности среды; $v$ — скорость течения жидкости, $c$ — скорость звука в жидкости.

Жидкость можно считать несжимаемой при условии, что вариации плотности среды малы: $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$. Что, согласно (10), равносильно условию

$$|v| \ll c, \tag{11}$$

означающему тот факт, что скорость течения должна быть много меньше скорости звука.

Условия (11) достаточно только при стационарном движении жидкости. При нестационарном движении необходимо выполнение еще одного условия.

### Нестационарное движение жидкости

Пусть $\tau$ и $l$ величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости и промежутки времени соответственно испытывают заметное изменение.

Производной плотности жидкости $\rho$ по времени $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ можно пренебречь (считать плотность $\rho$ постоянной во времени) в случае [5, с. 42]

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \tag{12}$$

Приведем некоторые оценочные данные применительно к электроосмотическим явлениям в воздухе, а также и в жидкости, а конкретно в воде.

Вначале оценим характерные амплитуды колебательных скоростей жидкостей в воздухе. В работе [6, с. 41] приведены характерные величины колебательных скоростей в воздухе. Так, на болевом пороге при воздействии мощного звука в воздухе амплитуда скорости частиц достигает всего лишь 1 м/с. Скорость звука в воздухе равна примерно 340 м/с. Таким образом, первое условие (11) для воздуха выполняется с запасом:

$$v \ll c. \tag{13}$$

Рассчитаем границы справедливости условия (12) для воздуха при нестационарном режиме течения. Рассматриваем гармоническое звуковое поле с периодом колебаний $T$, что соответствует частоте $f = \frac{1}{T}$. Тогда в качестве $\tau$ в (12) следует принять период $\tau = T = 1/f$. Подставляя последнее выражение в (12), получаем неравенство

$$f \ll \frac{c}{l}.$$

Принимаем, что толщина мембраны, в которой осуществляется процесс электроосмоса, составляет $l = 10^{-2}$ м, что с запасом отражает реальность. Тогда для воздуха получаем оценку

$$f \ll \frac{c}{l} = \frac{340}{10^{-2}} = 34000 \text{ Гц}. \tag{14}$$

Таким образом, согласно (13) и (14) для воздуха справедливо при изучении процессов электроосмоса применять приближение несжимаемой жидкости до частот 8–10 кГц и более.

Далее рассмотрим те же ограничения для жидкости, в качестве которой рассмотрим воду. Скорость звука в воде примерно 1500 м/с.

Определим величину колебательной скорости в воде из следующего соображения. Примем, что в воде имеется акустическое давление с амплитудой, равной амплитуде давления в воздухе, и равное $p_0$:

$$p_{\text{воды}} = p_{\text{воздуха}} = p_0.$$

При давлении $p_0$ амплитуда колебательной скорости в воде $v_{\text{воды}}$ будет равна $v_{\text{воды}} = \frac{p_{\text{воды}}}{z_{\text{воды}}}$. После несложной цепочки тождественных преобразований находим

$$v_{\text{воды}} = \frac{p_{\text{воды}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{z_{\text{воздуха}} p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воздуха}} z_{\text{воды}}} =$$
$$= \frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} \frac{p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воздуха}}} = \frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} v_{\text{воздуха}}. \tag{15}$$

Здесь через $z = \frac{p}{v}$ обозначено удельное акустическое сопротивление соответствующей среды, равное отношению амплитуд давления и колебательной скорости.

Найдем отношение $\frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}}$, подставляя соответствующие величины. Так, $z_{\text{воздуха}} = 417$ Па с/м, $z_{\text{воды}} = 150 \cdot 10^4$ Па с/м (см. статью в Википедии "Удельное акустическое сопротивление"). Окончательно имеем

$$\frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{417}{150 \cdot 10^4} = 2.78 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, из (15) получаем, что при одинаковой амплитуде давления в воде и воздухе, колебательная скорость воды является величиной примерно четвертого порядка малости по сравнению с колебательной скоростью в воздухе.

Неравенство (12) для воды примет следующий вид:

$$f \ll \frac{c}{l} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{10^{-2}} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Гц.} \quad (16)$$

Это равносильно тому, что для воды верхняя граница по частоте достигает, по крайней мере, величины частоты звука порядка 1.5 $10^4$ Гц.

## ВЫВОДЫ

Приведенные соображения и факты подтверждают возможность использования приближения несжимаемой вязкой жидкости при оценке электроосмотических процессов в воде и воздухе в достаточно широком диапазоне частот.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Особенности реализации электроосмотического течения в вычислительном пакете COMSOL Multiphysics

В упомянутом пакете ранее был реализован следующий вариант моделирования электроосмотического течения (см. [7]). Решалась задача (7), (8). Стеклянный круговой капилляр, заполненный воздухом, имел размеры: длина 1 мм, радиус капилляра 10 мкм. В первичной постановке к торцам капилляра должно было подаваться суммарное постоянное и переменное электрическое поле. Однако в пакете COMSOL эта задача решалась иначе. А именно вместо неоднородного уравнения (7) решалась задача (7) при нулевой внешней силе Кулона **F** = 0. В качестве альтернативы внешней силе на границе воздуха и внутренней стенки капилляра указывалось не условие прилипания воздуха на границе со стенкой капилляра, а наличие ненулевой скорости воздуха на этой границе, равной электроосмотической скорости, вызванной приложенным к торцам капилляра суммарным постоянным и переменным электрическим полем. Эта скорость определяется уравнением [8, с. 10]

$$\left(U_0 + U\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta} \zeta \left(E_0 + E\right).$$

Здесь $E_0$ и $E$ — амплитуды векторов электрической напряженности соответственно постоянного и переменного (гармонического) электрических полей (вектора электрических полей направлены вдоль оси капилляра); $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная; $\varepsilon$ — относительная диэлектрическая проницаемость; $\zeta$ — дзета-потенциал; $U_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta} \zeta E_0 = \text{const}$; $U = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta} \zeta E$.

*Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 00742021-0013 Министерства науки и высшего образования.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Шарфарец Б.П.* Применение системы уравнений электрогидродинамики для математического моделирования нового способа электроакустического преобразования // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 4. С. 127–134.
URL: http://iairas.ru/mag/2018/abst4.php#abst21
3. *Шарфарец Б.П.* Система уравнений электрогидродинамики применительно к электроосмотическим процессам // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 135–142.
URL: http://iairas.ru/mag/2019/abst1.php#abst20
4. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М: Наука, 1975. 287 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Учебное пособие в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
6. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
7. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Гуляев Ю.В.* О методе электроакустического преобразования, основанном на электрокинетических явлениях // Акуст. журн. 2020. Т. 66, № 4. С. 453–462. URL: https://sciencejournals.ru/view-issue/?j=akust&y=2020&v=66&n=4
8. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.

***Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург***

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 16.05.2023

ISSN 0868–5886 NAUCHNOE PRIBOROSTROENIE, 2023, Vol. 33, No. 3, pp. 117–124

# JUSTIFICATION OF THE POSSIBILITY OF USING THE HYDRODYNAMIC MODEL OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN SOFTWARE SIMULATION OF THE RADIATED FIELD OF THE ELECTROOSMOTIC ELECTROACOUSTIC RADIATOR

**B. P. Sharfarets**

*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

The paper substantiates the possibility of using a hydrodynamic model — a viscous, incompressible, heat-conductive fluid to calculate the parameters of an electroosmotic flow in a porous medium filled with liquid under the conditions of the application of constant and alternating electric fields to this medium. The conditions of transition to this model from the model of a viscous, compressible fluid are given. The boundaries of the problem parameters are specified, in particular, the boundaries of the flow velocities and frequency limitations, for the justification of such a transition. The acquired results can be used with computational tools to model the aforementioned processes.

*Keywords*: electroosmotic radiator, viscous incompressible fluid, Navier – Stokes equations, general equation of heat transfer, frequency constraints

## INTRODUCTION

When studying the behavior of a fluid or gas during their movement under the influence of forces of different nature, systems of various related equations are usually used. So, for example, if the movement of the liquid is conjugated with electrical forces, then an additional system of equations of electrohydrodynamics is involved (see, for example, [1–3]). A feature of such systems of heterogeneous equations is the need to solve them together due to the connectivity of the physical fields they describe. As a rule, the solution of such systems analytically is impossible due to the complexity of the interrelated equations of the system, the non-triviality of the geometry of the boundary conditions considered in the problem, etc. Therefore, as a rule, such problems have to be solved numerically using specialized computing packages, in particular the COMSOL Multiphysics package, a software package for analyzing, solving, and modeling by the finite element method for various physics and engineering applications, especially related multiphysics phenomena.

In the arsenal of the package, one can choose physical models of varying complexity. The main task of the specialist is to choose a compromise set of physical models based on the criterion "price – quality", i.e., the least complex physical model with acceptable accuracy for the resulting solution.

## PROBLEM STATEMENT

The present work substantiates the possibility of using the simplest hydrodynamic model of a viscous, uncompressible, heat-conducting liquid to calculate the parameters of electroosmotic flow in a porous medium filled with liquid under the conditions of applying constant and alternating electric fields to this medium.

## SOLUTION

### Fluid incompressibility assumption

The following is a complete system of hydrodynamic equations for a viscous compressible fluid. This system should be simplified as much as possible within acceptable accuracy to solve the problem of calculating the acoustic field of the electrokinetic emitter.

The most general hydrodynamic equation for the laminar motion of viscous fluid is the Navier – Stokes equation for compressible fluids: see, for example, [1, p. 73]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}+\mathbf{F}. \quad (1)$$

The continuity equation for a compressible fluid is added to it

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0 \quad (2)$$

and the general heat transfer equation [1, p. 273] is also added

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+D. \quad (3)$$

Finally the equation of state relating pressure $p$ to the medium density $\rho$ and entropy $s$ (see [4, p. 10])

$$p = p(\rho, s). \tag{4}$$

The system (1)–(4) is complete and contains six scalar relations for determining six fields: three components of the velocity vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, the pressure $p$, fluid density $\rho$ and entropy $s$ of the fluid mass unit.

Function $D$ on the right side (3), defined by equality

$$D = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2 + \varsigma(\operatorname{div}\mathbf{v})^2, \tag{5}$$

is called a dissipative function. It characterizes irreversible losses in a viscous hydrodynamic system (1)–(4).

Above, in (1)–(4), the following designations are adopted: $\eta$ and $\zeta$ respectively, are the dynamic and volumetric viscosities of the liquid; $\kappa$ is the coefficient of thermal conductivity (in equations (1) and (3) these values are constant); $\mathbf{F}$ is the force per unit volume of the liquid, and, in terms of electrohydrodynamics, it is the ponderomotive force, which, in electroosmotic tasks, is usually limited by the Coulomb force $\mathbf{F} = \rho_e\mathbf{E}$, where $\rho_e$ is the volume charge density in the liquid; $\mathbf{E}$ is the intensity vector of the electric field applied to the liquid.

The system (1)–(4) is quite complex and time-consuming when simulating it using computer packets. However, under some assumptions, it can be greatly simplified. These assumptions relate to the behavior of three fields: the medium density fields $\rho$, medium velocity fields $\mathbf{v}$ and the temperature field $T$ of the medium.

So, under the assumption of liquid incompatibility

$$\rho = \text{const} \tag{6}$$

simplifying the Navier – Stokes equation of motion (1), the continuity equation (2), and the expression for the dissipative function (5) in the heat transfer equation (3) and the state equation (4). Assuming small temperature variations $T = T_0 + T'$, where $T_0$ is the average temperature of the medium, $T'$ is its variation, i.e., under the condition $T_0 \gg T'$, the heat transfer equation (3) is also simplified. From the condition of a small Mach number $M = |\mathbf{v}|/c \ll 1$, where $c$ — the speed of sound in the medium, the assumption (6) on the practical incompatibility of the liquid should be followed.

Next, we will dwell on the details of these assumptions, and for now we will write out a modified form of system (1)–(4) after the adoption of these assumptions.

The equation of motion (1) transforms into the equation of motion for an incompressible fluid [5, p. 73]

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}. \tag{7}$$

The continuity equation (2) is also reduced to the form corresponding to an incompressible fluid [5, p. 73]:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{8}$$

The general equation of heat transfer under the conditions of a small Mach number and small temperature variations is reduced to the form [5, p. 277]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{9}$$

where $\nu = \eta/\rho$ is the kinematic viscosity; $\chi$ is the coefficient of thermal conductivity, $\chi = \kappa/\rho$; $c_p$ is the heat capacity of the medium at constant pressure.

Thus, the system (7)–(9) containing five scalar relations (vector equation (7) splits into 3 scalar ones) is complete for defining five fields: ($\mathbf{v}$, $p$, $T$).

Next, we present in more detail the conditions under which a fluid can be considered uncompressible at its *steady* and *non-stationary* flow. These issues are discussed in detail in [5].

### Steady-state fluid flow

According to [5, p. 41], the variation in the ρ density in a steady fluid has this order of magnitude

$$\Delta\rho \sim O\left(\frac{\rho v^2}{c^2}\right). \tag{10}$$

Here $\Delta\rho$ are the variations in the medium density; $v$ is the fluid flow velocity, $c$ is the speed of sound in fluid.

The fluid can be considered uncompressible provided that the variations in the density of the medium are small: $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$. According to (10), it is equivalent to the condition

$$|v| \ll c, \tag{11}$$

meaning that the flow velocity must be much less than the speed of sound.

Conditions (11) are sufficient only for stationary fluid motion. In the case of unsteady motion, it is necessary to fulfill another condition.

### Unsteady fluid movement

Let $\tau$ and $l$ be the values of the order of time intervals and distances at which the fluid velocity and time intervals, respectively, experience a noticeable change.

The time derivative of the fluid density $\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ can be neglected (the density $\rho$ is considered constant in time) in the case [5, p. 42]

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \tag{12}$$

Here are some estimates in relation to electroosmotic phenomena in air, as well as in fluid, and specifically water.

First, we estimate the characteristic amplitudes of the vibrational velocities of fluids in air. In [6, p. 41] the characteristic values of vibrational velocities in air are given. So, with a powerful sound in the air at the level of the pain threshold, the amplitude of the particle velocity reaches only 1 m/s. The speed of sound in the air is about 340 m/s. Thus, the first condition (11) for air is fulfilled with a margin:

$$v \ll c. \tag{13}$$

We calculate the boundaries of the validity of condition (12) for air in an unsteady flow mode. We consider a harmonic sound field with a period of oscillations $T$, which corresponds to the frequency $f = \dfrac{1}{T}$. Then the period $\tau = T = 1/f$ should be taken as $\tau$ in (12). Substituting this expression into (12), we obtain the inequality

$$f \ll \frac{c}{l}.$$

We assume that the thickness of the membrane on which the electroosmosis process is carried out, is $l = 10^{-2}$ m, which reflects reality with a margin. Then, for air, we get an estimate

$$f \ll \frac{c}{l} = \frac{340}{10^{-2}} = 34000 \text{ Hz}. \tag{14}$$

Thus, according to (13) and (14), for air, it is fair to use an approximation of an uncompressible liquid up to frequencies of 8–10 kHz or more when studying electroosmosis processes.

Next, we consider the same limitations for the liquid, as we do for water. The speed of sound in water is approximately 1500 m/s.

Determine the magnitude of the oscillatory velocity in water based on the following consideration. Let's assume that there is an acoustic pressure in water with an amplitude equal to the pressure amplitude in air and equal to $p_0$

$$p_{\text{воды}} = p_{\text{воздуха}} = p_0.$$

At pressure $p_0$, the amplitude of the vibrational speed in water $v_{\text{воды}}$ is $v_{\text{воды}} = \dfrac{p_{\text{воды}}}{z_{\text{воды}}}$. After a simple chain of identity transformations, we determine

$$v_{\text{воды}} = \frac{p_{\text{воды}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{z_{\text{воздуха}} p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воздуха}} z_{\text{воды}}} = \\ = \frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} \frac{p_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воздуха}}} = \frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} v_{\text{воздуха}}. \tag{15}$$

Here $z = \dfrac{p}{v}$ is the specific acoustic impedance of the corresponding medium, equal to the ratio of pressure amplitudes to vibrational speed.

Determine the ratio $\dfrac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}}$ by substituting the corresponding values. So, $z_{\text{воздуха}} = 417$ Pa s/m, $z_{\text{воды}} = 150 \cdot 10^4$ Pa s/m (see Wikipedia article "Specific acoustic impedance"). Finally, we have

$$\frac{z_{\text{воздуха}}}{z_{\text{воды}}} = \frac{417}{150 \cdot 10^4} = 2.78 \cdot 10^{-4}.$$

Thus, from (15), we obtain that at the same pressure amplitude in water and air, the vibrational speed of water has a value of about the fourth order of smallness compared to the vibrational speed in air.

The inequality (12) for water takes the following form:

$$f \ll \frac{c}{l} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{10^{-2}} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Hz}. \tag{16}$$

This is equivalent to the fact that for water the upper limit in frequency reaches at least a sound frequency of the order of $1.5 \cdot 10^4$ Hz.

## CONCLUSIONS

The above considerations and facts confirm the possibility of using the approximation of an uncompressible viscous liquid in the assessment of electroosmotic processes in water and air over a fairly wide frequency range.

## APPENDIX

### Features of electroosmotic flow analysis with a computing package COMSOL Multiphysics

In the mentioned package, the following variant of electroosmotic flow modeling was previously implemented (see [7]). The problem (7), (8) was under consideration. A glass circular capillary filled with air had dimensions: length — 1 mm, radius — 10 μm. In the primary setting, a total constant and alternating electric field was to be supplied to the capillary ends. However, in the COMSOL package, this task was solved differently. Instead of the heterogeneous equation (7), the task (7) was solved at zero external Coulomb force **F** = 0. As an alternative to the external force at the boundary of the air and the inner wall of the capillary, it was indicated not the condition of air sticking at the boundary with the capillary wall, but the presence of a nonzero air velocity at this boundary, equal to the electroosmotic velocity caused by the total constant and alternating electric field applied to the ends of the capillary. This velocity is determined by the equation [8, p. 10]

$$\left(U_0 + U\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\zeta\left(E_0 + E\right).$$

Here $E_0$ and $E$ are the amplitudes of vectors of electric intensity, respectively, of constant and alternating (harmonic) electric fields (vectors of electric fields are directed along the capillary axis); $\varepsilon_0$ is the electric constant; $\varepsilon$ is the relative dielectric constant; $\zeta$ is the zeta potential; $U_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\zeta E_0 = \text{const}$; $U = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\zeta E$.

## REFERENCES

1. Ostroumov G.A. *Vzaimodeystvie elektricheskich i gidrodinamicheskich poley* [Interaction of electrical and hydrodynamic fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (In Russ.).
2. Sharfarets B.P. [Application of the system of electrohydrodynamics equations for mathematical modeling of a new method of electro-acoustic transformation]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 4, pp. 127–134. (In Russ.). DOI: 10.18358/np-28-4-i127134
3. Sharfarets B.P. [System electrohydrodynamics equations applied to electroosmotic processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 135–142. (In Russ.). DOI: 10.18358/np-29-1-i135142
4. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Teoreticheskie osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical foundations of nonlinear acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 287 p. (In Russ.).
5. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. Uchebnoe posobie v 10 t. T. VI. Gidrodinamika. 3-e izd.* [Theoretical physics. Tutorial in 10 vol. Vol. V. Hydrodynamics. 3rd ed.], Moscow, Nauka Publ., Gl. red. Fiz.-mat. lit., 1986. 736 p. (In Russ.).
6. Isakovich M.A. *Obschaya akustika* [General acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 496 p. (In Russ.).
7. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Gulyaev Yu.V. [About the electroacoustic transformation method based on electrokinetic phenomena]. *Akust. zhurn.* [Acoustic magazine], 2020, vol. 66, no. 4, pp. 453–462. (In Russ.). URL: https://sciencejournals.ru/view-issue/?j=akust&y=2020&v=66&n=4
8. Duchin S.S., Deryagin B.V. *Elektroforez* [Electrophoresis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 332 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich,*
sharb@mail.ru

Article received by the editorial office on 16.05.2023