
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 537.632,535.4 + 538.9

© Я. А. Фофанов, И. М. Соколов, В. В. Манойлов, А. С. Курапцев, 2023

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
УПОРЯДОЧЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
И НАНОСИСТЕМ (обзор)**

Рассмотрены инструментальные особенности преобразования и регистрации аналитических сигналов динамического поляризационно-оптического анализа. Найдены оптимальные экспериментальные условия исследования динамики слабых поляризационных откликов. Описан последовательный статистический анализ поляризационных магнитооптических откликов магнитных наножидкостей в широком, составляющем три порядка диапазоне концентраций. Получено количественное обоснование адекватности используемых физических моделей и следующих из них аналитических функций, описывающих ориентационную упорядоченность магнитных наночастиц во внешнем магнитном поле. Обнаруженные вариации ошибок прогноза параметров диагностики указывают на неслучайные особенности динамики поляризационных откликов и связанных с ними параметров (свойств) исследуемых магнитных наножидкостей.

Исследования нерезонансных наносистем дополняет теоретический анализ особенностей динамики импульсного рассеяния когерентного света атомными ансамблями, охлажденными до субдоплеровских температур. Показано, что поляризация и спектральный состав вторичного излучения таких ансамблей претерпевают качественные изменения в процессе послесвечения. Это открывает перспективу развития новых экспериментальных и теоретических подходов к исследованиям различных резонансных ансамблей точечных рассеивателей.

Описанные в обзоре теоретические и высокочувствительные лазерные методы количественного поляризационно-оптического анализа и выполненный статистический анализ полученных данных формируют базис прецизионной поляризационно-оптической нанодиагностики (количественной характеристики) функциональных упорядоченных материалов и наносистем.

Развиваемые методы поляризационной нанодиагностики могут быть использованы для исследований материалов, объектов и систем самой разной природы и состава, например метаматериалов, биологических жидкостей и тканей и т.д.

Кл. сл.: лазер, поляризационно-оптический анализ, статистический анализ экспериментальных данных, аналитическая аппроксимация, магнитные наножидкости, оптоэлектроника, магнитооптика, лазерная поляризационно-оптическая нанодиагностика

ВВЕДЕНИЕ

Одним из информативных методов изучения функциональных оптических и магнитных материалов, элементов и систем является их лазерное поляризационно-оптическое зондирование [1–7]. Высокая пороговая чувствительность подобного зондирования, которая ограничивается только естественными шумами зондирующего лазерного излучения, позволяет регистрировать в исследуемых объектах различные и достаточно тонкие эффекты [8–13]. В силу этого разработка и дальнейшее развитие основных принципов динамического поляризационно-оптического анализа упорядоченных функциональных материалов и наносистем представляются весьма актуальными.

В обзоре рассмотрены некоторые особенности лазерного поляризационно-оптического анализа

динамики слабых поляризационных откликов. Анализ инструментальной реализации сопровождается описанием алгоритмов, предназначенных для обработки экспериментальных данных. Описаны используемые в алгоритмах теоретические (физические) модели и соответствующие им аналитические функции.

Исследования магнитооптических характеристик нерезонансных объектов дополнены анализом резонансных откликов холодных атомных ансамблей. Рассмотрено нестационарное (динамическое) взаимодействие холодных атомов с электромагнитным полем. Представлены основы теоретического анализа динамики флуоресценции, включая исследование поляризационных характеристик и спектрального состава излучения исследуемых атомных ансамблей.

1. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ О МАГНИТООПТИЧЕСКИХ ОТКЛИКАХ МАГНИТНЫХ НАНОЖИДКОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

1.1. Особенности инструментальной реализации нестационарного поляризационно-оптического анализа

Инструментальные принципы динамического поляризационно-оптического анализа имеют некоторые особенности. Одна из них заключается в необходимости детектирования слабых аналитических сигналов (поляризационных откликов), определяемых динамикой исследуемых процессов. Выполненные нами исследования показывают преимущества использования в этом случае фазовой модуляции, которая дает возможность эффективного выделения сигналов, отвечающих за поляризационные характеристики исследуемых объектов различной природы [8, 10, 11, 13–16].

Для регистрации слабых поляризационных откликов необходимо поддерживать оптимальный уровень модуляции, обеспечивающий максимальную величину сигналов в оптоэлектронном тракте. Оптимальная амплитуда модуляции соответствует максимуму функции Бесселя, которая соответствует частоте детектируемого информативного сигнала ν_2 (см. рис. 1). При этом в спектре фототока становятся равными амплитуды соседних частотных компонент ν_1 и ν_3 , как это видно на рис. 1. Это обстоятельство было положено в основу метода контроля амплитуды фазовой модуляции зондирующего лазерного излучения.

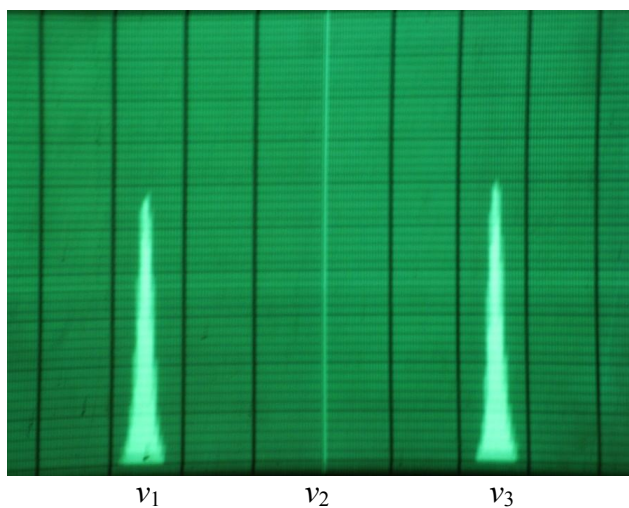


Рис. 1. Равенство амплитуд частотных компонент ν_1 и ν_3

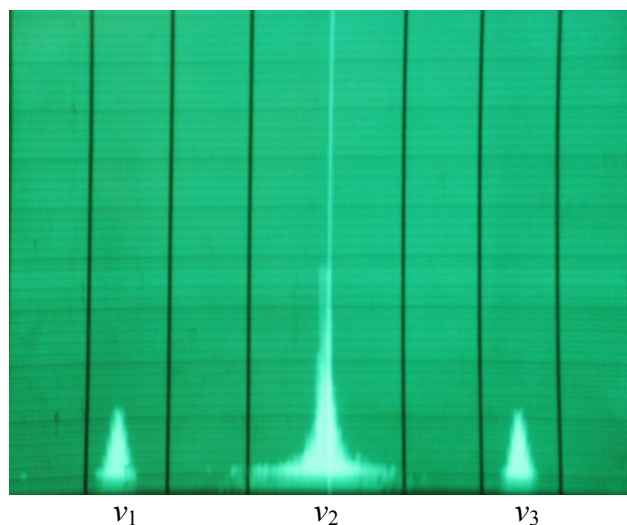


Рис. 2. Подавление неинформативных аналитических сигналов на частотах ν_1 и ν_3

В последующих исследованиях выяснилось, что присутствие в спектре фототока соседних частотных компонент, хотя и позволяет контролировать амплитуду фазовой модуляции, но при этом значительно затрудняет детектирование полезных сигналов, величина которых в ряде особенно интересных случаев может быть значительно (на несколько порядков) меньше. Для уменьшения влияния неинформативных соседних частотных компонент было осуществлено их подавление в электронном тракте. Эффективная частотная селекция, использованная для этой цели, позволила снизить уровень неинформативных компонент более чем в 100 раз, без существенных искажений полезного сигнала. На рис. 2 показан спектр сигнала после выполненной фильтрации. В средней части спектра хорошо виден сигнал поляризационного отклика исследуемого объекта, по обе стороны которого видны ослабленные в процессе селекции неинформативные компоненты. Отметим, что в спектре фототока на рис. 1 слабые аналитические сигналы (отклики) практически не заметны на фоне неинформативных компонент.

Практическая реализация рассмотренных особенностей инструментальных принципов открывает возможность наблюдения динамики слабых поляризационных откликов самых различных объектов и систем, например магнитоупорядоченных кристаллов, плотных холодных атомных ансамблей и т.д. [10–13, 17, 18].

1.2. Аппроксимация магнитооптических откликов магнитных наножидкостей аналитической функцией

1.2.1. Постановка задачи об аппроксимации магнитооптических откликов аналитической функцией

Дальнейшее развитие лазерного поляризационно-оптического анализа функциональных материалов и систем, обладающих сравнительно слабыми магнитными свойствами, вызывает в настоящее время значительный интерес. К подобным объектам можно отнести, например, магнитные наножидкости, которые широко используются в научных исследованиях, технологиях, медицине [19–25].

Аппроксимация значительного объема экспериментальных данных о магнитооптических откликах (двулучепреломлении) магнитных наножидкостей (НЖ) аналитической функцией в широком диапазоне концентраций исследуемых магнитных наножидкостей впервые была описана в работе [26]. При этом были учтены инструментальные особенности и важные детали проведенных экспериментов и достаточно тщательно выполнены все необходимые математические процедуры [17, 26]. Основными исходными предпосылками для точной и надежной аппроксимации экспериментальных данных с помощью аналитической функции являлись следующие обстоятельства:

- анализ поляризационных откликов выполнялся для наносистемы "жидкая матрица – магнитные частицы" одного и того же состава;

- все магнитооптические параметры магнитных наночастиц в исследуемой системе не изменялись, а при переходе от опыта к опыту менялась только их объемная концентрация;

- в качестве аппроксимирующей функции использовалась аналитическая зависимость, основанная на представлениях об ориентационной упорядоченности магнитных частиц в магнитном поле [27, 28].

Следуя исходным предпосылкам, для построения аппроксимирующей функции использовалась следующая аналитическая зависимость (см. также [27, 28]):

$$\varphi = \alpha F(p). \quad (1)$$

В формуле (1) φ — поляризационный отклик; коэффициент α определяется параметрами магнитных наночастиц. Этот коэффициент пропорционален объемной концентрации наночастиц и не зависит от значений магнитного поля. В соответствии с работой [28], зависимость $F(p)$ в формуле (1) является функцией магнитного поля и не зависит от концентрации:

$$F(p) = 1 - \frac{3}{p} \coth(p) + \frac{3}{p^2}, \quad (2)$$

$$p = \frac{\mu H}{kT}, \quad (3)$$

где μ — магнитный момент частиц,
 H — напряженность внешнего поперечного магнитного поля,
 k — постоянная Больцмана,
 T — температура.

Для выполнения аппроксимации аналитической функцией используются формулы (1)–(3), и аппроксимирующая функция $\varphi^{\text{app}}(\alpha, \beta, x)$ записывается в следующем виде:

$$\varphi^{\text{app}}(\alpha, \beta, x) = \alpha F(\beta x), \quad (4)$$

где величины α и β являются варьируемыми безразмерными параметрами, а x — вспомогательная независимая переменная. При этом варьируются также значения параметра p , определяемого следующей формулой:

$$p = \beta x. \quad (5)$$

1.2.2. Аналитическая аппроксимация экспериментальных данных о магнитооптических откликах

Аналитическая аппроксимация экспериментальных данных, описываемых формулой (1), была выполнена на основе алгоритмов оценки параметров нелинейных функций. Такие алгоритмы описаны в работах [29–33]. Заключительный этап нахождения параметров нелинейных функций содержит решение системы нелинейных уравнений. Это решение может быть найдено методами, описанными, например, в работах [34, 35].

Следуя работе [26], обозначим экспериментальные данные y_i , где i — номер измерения в пределах одного скана магнитного поля. Вместо непрерывной переменной x введем дискретную переменную x_i . Соответствующие дискретные значения x_i независимой переменной x определяются следующим соотношением:

$$x_i = i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где n — количество значений y_i (число точек). По экспериментальным данным y_i и числу точек n могут быть найдены параметры α и β , необходимые для построения аппроксимирующей функции (4).

Для построения аппроксимирующей функции применяется метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому сумма квадратов отклонений $S(\alpha, \beta)$ экспериментальных данных от аппроксимирующей функции должна стремиться к минимуму:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi^{\text{app}}(x_i, \alpha, \beta)]^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

где параметры α и β должны быть такими, чтобы обеспечить минимум $S(\alpha, \beta) = S_{\min}$.

В работе [26] показано, что для нахождения α_{\min} и β_{\min} , удовлетворяющих условию (7), используются два итерационных алгоритма. В первом алгоритме поиск минимума $S(\alpha, \beta)$ осуществлялся путем варьирования параметров α и β на каждом шаге итерации, на котором вычислялось значение $S(\alpha, \beta)$. Для первого шага итерационного процесса были использованы приблизительные значения параметров α и β , которые обозначались α_0 и β_0 . Алгоритм нахождения параметров α_0 и β_0 подробно описан в работе [26].

Для того, чтобы найти α_{\min} и β_{\min} , удовлетворяющие условию (7) по второму итерационному алгоритму, была составлена система из двух уравнений, в которые входят частные производные $S(\alpha, \beta)$ по α и β . Затем эта система уравнений решалась численным методом оптимизации.

1.2.3. Составление и решение системы уравнений для поиска минимизирующих значений параметров α и β

Для построения системы уравнений, необходимых для нахождения параметров α и β , минимизирующих сумму квадратов отклонений экспериментальных данных от аппроксимирующей функции, приравняем нулю частные производные $S(\alpha, \beta)$ по α и β . Учитывая (4), получаем:

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha F(\beta x_i)] F(\beta x_i) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha F(\beta x_i)] \left[-\alpha \frac{dF(\beta x_i)}{d\beta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (2), (5), (7), получаем систему из двух трансцендентных уравнений для α и β :

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right)^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left[-y_i \alpha \frac{\left(\frac{3[(\coth(\beta x_i))^2 - \frac{6}{\beta^3 x_i^2} + \frac{3 \coth(\beta x_i)}{\beta^2 x}]}{\beta} \right)}{d\beta} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right) \left(\frac{3[(\coth(\beta x_i))^2 - \frac{6}{\beta^3 x_i^2} + \frac{3 \coth(\beta x_i)}{\beta^2 x}]}{\beta} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная система уравнений решалась численным методом оптимизации с целевой функцией, соответствующей минимизации суммы квадратов отклонений аппроксимирующей кривой от данных эксперимента. В качестве начальных условий были использованы найденные выше значения α_0 и β_0 [26]. В результате решения уравнений (10) и (11) были получены значения: $\alpha_{\min} = 4.28$ и $\beta_{\min} = 0.054$ для эксперимента с концентрацией магнитных наночастиц, равной 1%. Полученная

для этих значений сумма квадратов отклонений $S(\alpha, \beta) = 2.7 \times 10^{-5}$.

На рис. 3 точками показаны нормированные экспериментальные данные для объемной концентрации магнитных частиц 1% [17], а также аппроксимирующая функция φ^{app} (сплошная линия), построенная по формулам (4), (5) с использованием значений $\alpha_{\min} = 4.28$ и $\beta_{\min} = 0.054$, полученных из решения системы (10), (11). Видно хорошее совпадение результатов аналитической аппроксимации с экспериментальными данными.

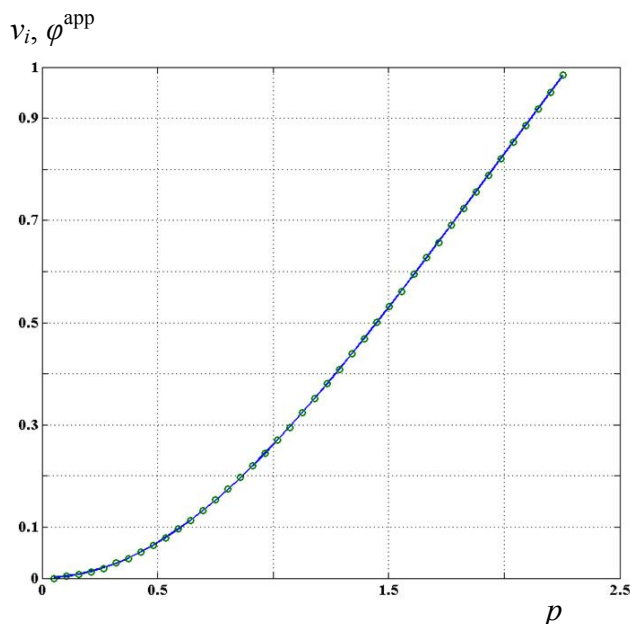


Рис. 3. Аппроксимация поляризационных откликов v_i аналитической кривой φ^{app} . Точки — эксперимент, линия — аппроксимирующая функция

Табл. 1. Результаты расчета сумм квадратов отклонений от аппроксимирующей функции для экспериментов с разными концентрациями магнитной наножидкости

Характеристика	Номер эксперимента				
	1	2	3	4	5
$N, \%$ (концентрация магнитной НЖ)	1	0.2	0.01	0.003	0.001
S_{\min} (минимальная сумма квадратов отклонений)	$2.8e-05$	$6.9e-06$	$1.2e-07$	$6.3e-08$	$8.6e-08$
$\delta S_{\min}, \%$ (относительная величина S_{\min})	< 0.003	< 0.004	0.002	< 0.002	< 0.009

Для количественной оценки точности выполненной аналитической аппроксимации были вычислены отклонения δ_i экспериментальных данных y_i от аппроксимирующей функции $\varphi^{\text{app}}(x, \alpha_{\min}, \beta_{\min})$:

$$\delta_i = y_i - \varphi^{\text{app}}(x_i, \alpha_{\min}, \beta_{\min}), \quad (12)$$

где значение независимой переменной x_i в точке i

определяется формулой (6). Величина этих отклонений мала и не превышает 0.25% от максимального сигнала. Аналогичные результаты были получены и для других концентраций магнитных частиц.

В табл. 1 показаны относительные значения δS_{\min} суммы квадратов отклонений для экспериментов с разными концентрациями магнитных

наночастиц и для значений α_{\min} и β_{\min} , полученных для этих экспериментов. При этом величины S_{\min} определялись как отношение S_{\min} к величине максимального сигнала для данной концентрации. Видно, что относительные значения суммы квадратов отклонений экспериментальных данных от аппроксимирующей кривой для концентраций от 1 до 0.003% практически одинаковы. Только для самой малой концентрации в 0.001% эта величина несколько больше. Это показывает, что описываемая методика оценки параметров аппроксимирующей кривой может использоваться для магнитных наножидкостей разных концентраций. Значения величин δS_{\min} малы, что также указывает на достоверность проведенных измерений.

1.2.4. Использование параметров аналитической аппроксимирующей функции для количественной характеристики магнитных наножидкостей

В предыдущем разделе были описаны методы поиска значений безразмерных параметров аналитической функции, которая аппроксимирует экспериментальные данные о магнитооптических откликах магнитных наножидкостей. Эти параметры были обозначены α и β . В этом разделе мы покажем, что развиваемые методы высокочувствительного поляризационно-оптического анализа и нахождение значений безразмерных параметров α и β с помощью описанных процедур составляют основу диагностики исследуемых магнитных наножидкостей, т.к. данные параметры количественно характеризуют исследуемые магнитные наножидкости [27, 28, 36].

Действительно, в соответствии с формулами (1), (4) и (5) с помощью параметров α и β можно выполнить оценку количественных характеристик свойств изучаемых магнитных наножидкостей [36]. Такую количественную оценку будем называть поляризационно-оптической диагностикой магнитных наножидкостей. Для проверки возможности выполнения подобной диагностики был проведен ряд вычислительных экспериментов. В этих экспериментах были использованы массивы экспериментальных данных для магнитных наножидкостей с известным и постоянным составом, но с варьируемой концентрацией магнитных наночастиц [17].

Введем следующие обозначения для диагностируемых параметров:

$$\alpha_{\text{diagn}} = \alpha_{\min}; \quad \beta_{\text{diagn}} = \beta_{\min}. \quad (13)$$

В формуле (13) диагностируемые параметры α_{diagn} и β_{diagn} — это параметры аналитической аппроксимирующей функции, которые получены путем обработки экспериментальных данных по методике, рассмотренной выше.

Как видно из формул (1)–(4) и пояснений к ним, варьируемый параметр α пропорционален объемной концентрации наночастиц, а параметр β не зависит от концентрации (см. также [11]). Используя знания о концентрациях магнитных наножидкостей и о значениях напряженности магнитного поля, можно на этой основе сделать априорную оценку параметров α и β . Будем называть такую априорную оценку прогнозом, а соответствующие значения параметров α и β обозначим α_{pr} и β_{pr} . Прогнозируемые с учетом этого значения α_{pr} для экспериментов, выполненных с жидкостями с различной концентрацией магнитных наночастиц, представлены в табл. 2. В этой же таблице можно видеть найденные значения α_{diagn} , а также относительные ошибки прогноза $\delta\alpha_{\text{pr}}$:

$$\delta\alpha_{\text{pr}} = (\alpha_{\text{diagn}} - \alpha_{\text{pr}}) / \alpha_{\text{pr}}. \quad (14)$$

Поскольку значение параметра β не меняется при изменении концентрации, то в соответствии с формулами (1)–(4) параметр β_{pr} для всех экспериментов с разными концентрациями является постоянной величиной, равной 0.054. Диагностируемый параметр β_{diagn} определялся по методике, описанной выше, и представлен в табл. 2. Относительные погрешности прогнозируемых данных $\delta\beta_{\text{pr}}$ вычислялись по формуле:

$$\delta\beta_{\text{pr}} = (\beta_{\text{diagn}} - \beta_{\text{pr}}) / \beta_{\text{pr}}. \quad (15)$$

Вычисленные значения $\delta\beta_{\text{pr}}$ также представлены в табл. 2.

Из данных, представленных в табл. 2, хорошо видно, что параметр α_{diagn} увеличивается с ростом концентрации, в то время как значения β_{diagn} практически не меняются. Тем самым вывод о подобии поляризационных откликов магнитных наножидкостей, сформулированный в работе [37], находит здесь количественное подтверждение. Приведенные в табл. 2 данные указывают также на правильный выбор физической модели и описывающей эту модель аналитической функции, использованной здесь для аппроксимации изучаемых магнитооптических откликов.

Следует также отметить некоторые отличия относительных погрешностей $\delta\alpha_{\text{pr}}$ и $\delta\beta_{\text{pr}}$ для экспериментов с разными концентрациями. Особенно важным является полученное для некоторых концентраций согласованное увеличение погрешностей прогноза как по параметру α , так и по параметру β . Наибольшие погрешности прогноза оказались для экспериментов 2 и 5. Для эксперимента 2 — $\delta\alpha_{\text{pr}} = 8.9\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} = 5.5\%$; для эксперимента 5 — $\delta\alpha_{\text{pr}} = 6.8\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} = 6.9\%$. Тогда как для эксперимента 3 указанные погрешности прогноза имеют значительно меньшую величину: $\delta\alpha_{\text{pr}} = 0.5\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} < 0.05\%$. Выявленные вариации

Табл. 2. Результаты оценки количественных характеристик изучаемых магнитных наножидкостей

Характеристика	Номер эксперимента				
	1	2	3	4	5
$N, \%$ (концентрация магнитной НЖ)	1	0.2	0.01	0.003	0.001
$\alpha_{\text{пр}}$ (прогноз)	4.28	0.86	0.043	0.013	0.0043
α_{diagn} (диагностика)	4.28	0.94	0.043	0.012	0.0040
$\delta\alpha_{\text{пр}}, \%$ (ошибка прогноза)	< 0.0005	8.9	0.5	3.1	6.8
$\beta_{\text{пр}}$ (прогноз)	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054
β_{diagn} (диагностика)	0.054	0.051	0.054	0.055	0.058
$\delta\beta_{\text{пр}}, \%$ (ошибка прогноза)	< 0.0005	5.5	< 0.05	1.8	6.9

погрешностей прогноза могут свидетельствовать о неслучайных особенностях, присущих исследуемым магнитным наножидкостям.

Наиболее вероятными причинами неслучайных особенностей могут быть указаны небольшие различия в параметрах исходных образцов разных серий, из которых приготавливались пробы для экспериментов. В таком случае обнаружение погрешностей прогноза демонстрирует возможность применения развиваемых методов для диагностики малых вариаций поляризационно-оптических характеристик магнитных наножидкостей. Развиваемые подходы и методы могут быть также использованы и для выполнения высокочувствительных исследований и диагностики многих других объектов и систем (см., например, [8, 10–13, 38, 39]). В частности, анализ динамики отклика на оптическое возбуждение может быть использован для изучения свойств атомных ансамблей, охлажденных до низких температур в специальных ловушках. Теоретическому анализу возможностей использования подобных методик посвящена вторая часть данного обзора.

2. ДИНАМИКА ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ ХОЛОДНЫХ И РАЗРЕЖЕННЫХ АТОМНЫХ АНСАМБЛЕЙ ПОСЛЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Атомные ансамбли, охлажденные до субдуплеровских температур в специальных ловушках, являются весьма перспективными объектами для широкого круга практических применений в задачах квантовой метрологии, стандартизации частоты, квантово-информационных приложениях и т.д. [40–42].

Практически все предложенные схемы применения холодных атомных ансамблей и большинство методов диагностики их состояния основаны на их взаимодействии с электромагнитным излучением. Одним из эффективных и часто используемых методов изучения свойств холодных атомных ансамблей является исследование динамики флуоресценции после импульсного возбуждения. В данном разделе мы проанализируем теоретически особенности такой динамики, что чрезвычайно важно для адекватной интерпретации соответствующих экспериментов.

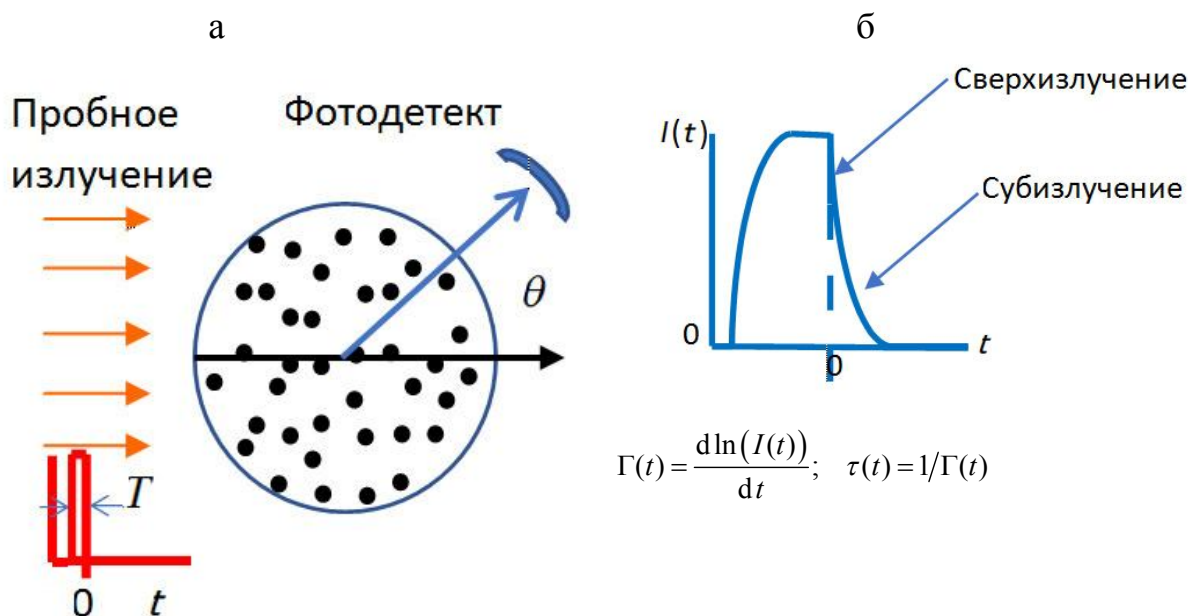


Рис. 4. Типичная схема наблюдения флуоресценции атомного ансамбля после его импульсного возбуждения

Типичная схема наблюдения флуоресценции атомного ансамбля после его импульсного возбуждения показана на рис. 4, а. Импульс монохроматического излучения длительностью T рассеивается на исследуемом атомном ансамбле.

Основной наблюдаемой, которая традиционно анализируется как при теоретическом, так и при экспериментальном изучении послесвечения, является временная зависимость полной интенсивности света, рассеянного в заданном направлении θ . В теории часто вычисляется суммарная интенсивность в полный сферический угол. Характерный вид подобной зависимости показан на рис. 4, б. Количественно динамика флуоресценции описывается величиной мгновенной скорости излучения $\Gamma(t) = d \ln(I(t)) / dt$ или обратной ей величиной — мгновенным временем пленения $\tau(t) = 1 / \Gamma(t)$.

2.2. Основы теоретического описания динамики флуоресценции

Динамику состояний атомов будем описывать с помощью модели связанных диполей, традиционной для этого класса задач. Эта модель была впервые предложена Фолди [43], а затем подробно обсуждена Лаксом [44]. Мы рассматриваем ансамбль, состоящий из N одинаковых атомов с основным состоянием с угловым моментом $J_g = 0$ и с возбужденным состоянием $J_e = 1$. Время жизни всех

трех зеемановских подуровней ($m = -1, 0, 1$) одинаково и равно $\tau_{at} = 1 / \gamma$ (где γ — естественная ширина возбужденных атомных состояний). Атомы считаем неподвижными, а их смещение, обусловленное низкой температурой ансамбля, учитывается усреднением рассчитываемых величин по случайному пространственному расположению атомов. Плотность атомов в ансамбле — n .

В данном случае был использован вариант модели связанных осцилляторов, сформулированный в рамках последовательного квантового подхода, разработанного в работе [45]. Отметим основные особенности данного подхода. Сначала решается нестационарное уравнение Шредингера для волновой функции ψ , описывающей состояние объединенной системы, состоящей из атомов и электромагнитного излучения, включая вакуумный резервуар. Волновую функцию ищем в виде разложения по собственным функциям гамильтониана невзаимодействующих атомов и света. Учитывая типичную слабость возбуждения, в этом разложении оставляем состояния, содержащие не более одного фотона. В результате для амплитуд b_e возбужденных состояний атома $\psi_e = |g, \dots, e, \dots, g\rangle$ получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial b_e}{\partial t} = \left(i\delta - \frac{\gamma}{2} \right) b_e - i \frac{\Omega_e}{2} + \frac{i\gamma}{2} \sum_{e' \neq e} V_{ee'} b_{e'}. \quad (16)$$

Здесь индекс "e" показывает зеемановский подуровень и номер атома, возбужденного в состоянии $\psi_e = |g, \dots, e, \dots, g\rangle$. Первое слагаемое в правой части уравнения (16) отвечает за свободную эволюцию атомов. Второе описывает влияние внешнего возбуждающего излучения. Частота Раби этого поля в точке расположения атома e равна Ω_e , отстройка — δ .

Последнее слагаемое в уравнении (16) учитывает диполь-дипольное взаимодействие атомов друг с другом. Матрица $V_{ee'}$, входящая в это слагаемое, имеет следующий вид:

$$V_{ee'} = -\frac{2}{\gamma} \sum_{\mu, \nu} \mathbf{d}_{eg}^{\mu} \mathbf{d}_{ge'}^{\nu} \frac{e^{ikr_{ij}}}{\hbar r_{ij}^3} \left\{ \delta_{\mu\nu} \left(1 - ikr_{ij} - (kr_{ij})^2 \right) - \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\nu} \mathbf{r}_{ij}^{\mu}}{r_{ij}} \left(3 - 3ikr_{ij} - (kr_{ij})^2 \right) \right\}. \quad (17)$$

Здесь мы предположили, что в состояниях e и e' возбуждены соответственно атомы i и j ; d_{eg} — матричный элемент оператора дипольного момента для перехода $g \rightarrow e$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$; $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ и $k = \omega_0 / c$ — волновое число, соответствующее частоте этого перехода; c — скорость света в вакууме. Индексы μ или ν обозначают проекции на оси выбранной системы координат. Уравнение (16) для амплитуд $b_e(t)$ решается численно для различных случайных пространственных конфигураций неподвижных атомов.

На основе вычисленных значений $b_e(t)$ мы можем найти амплитуды всех других состояний,

которые определяют волновую функцию ψ объединенной системы атом — поле (подробнее см. [45]) и, следовательно, свойств как атомного ансамбля, так и рассеянного света. Так, интенсивность поляризационной компоненты света α , излучаемая облаком в единичном телесном угле вокруг произвольного направления, заданного волновым вектором \mathbf{k} ($\Omega = \theta, \varphi$), можно определить следующим образом [46]:

$$I_{\alpha}(\Omega, t) = \frac{c}{4\pi} \left| k^2 \sum_{i,m} \mathbf{u}_{\alpha}^* \mathbf{d}_{ge} \beta_e(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2. \quad (18)$$

Здесь \mathbf{u}_{α}^* — единичный вектор поляризации вторичного излучения.

2.3. Результаты расчетов динамики флуоресценции

2.3.1. Суммарная интенсивность флуоресценции

Расчет динамики флуоресценции на основе (16)–(18) может быть проведен для произвольной формы и пространственного распределения атомов. Мы рассматриваем самый простой случай однородного атомного облака кубической формы. Это упрощает исследование динамики пространственного распределения возбужденных атомов в ансамбле. Кроме того, при наличии резких границ ансамбля удобно проводить сравнение численных результатов с данными диффузионной теории переноса излучения.

Для моделирования ситуации с типичными для экспериментов разреженными атомными ансамблями плотность атомов во всех расчетах выберем

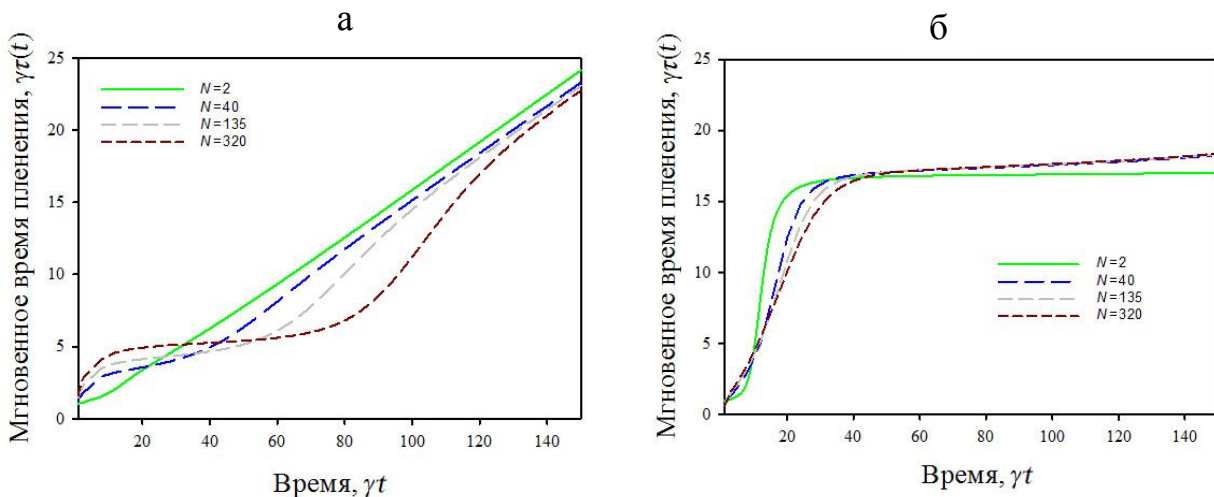


Рис. 5. Динамика флуоресценции атомных ансамблей различного размера. Плотность атомов $nk^{-3} = 0.005$, длительность возбуждения $\gamma T = 50$. а — резонансное возбуждение ($\delta = 0$), б — нерезонансное ($\delta = 4\gamma$)

равной $nk^{-3} = 0.005$. Импульс возбуждения считаем прямоугольным с длительностью $\gamma T = 50$. Его поляризация предполагается для определенности левой циркулярной. На характер динамики конкретный тип поляризации качественного влияния не оказывает.

Результаты расчетов суммарной интенсивности флуоресценции, излучаемой во всех направлениях, во всем спектральном диапазоне и во всех поляризационных каналах приведены на рис. 5 для атомных ансамблей различного размера. Размер задается длиной ребра куба L . Рис. 5, а, соответствует резонансному возбуждению $\delta = 0$, рис. 5, б, — нерезонансному ($\delta = 4\gamma$). Полученные кривые демонстрируют ряд важных физических результатов. Во-первых, характер флуоресценции существенно зависит от отстройки возбуждающего света. Рассмотрим особенности для двух этих случаев по отдельности. На кривых рис. 5, а, можно выделить четыре характерных этапа изменения. В самом начале, после окончания импульса возбуждения (этот момент соответствует $t = 0$), на временах $t < \tau_{at}$ наблюдается эффект суперизлучения. Скорость распада $\Gamma(t)$ больше естественной ширины возбужденных атомных состояний γ . Затем наступает этап пленения излучения. Перенос излучения описывается диффузионным уравнением [47]. Этот этап можно разделить на две части.

Вначале диффузия излучения описывается многомодовой динамикой. На этом этапе время пленения возрастает. Затем наступает режим одномодовой диффузии, когда распад описывается одноэкспоненциальным законом с характерным

временем τ_d . Хорошо видны прямолинейные участки на рис. 5, а. Величина τ_d и длительность этого этапа возрастает с увеличением размеров системы.

На заключительном этапе наблюдается заметное возрастание времени пленения $\tau(t)$. При заданной плотности, независимо от размеров ансамбля, все кривые выходят на одну асимптоту, причем различия в мгновенных скоростях распада и мгновенных временах пленения практически лежат в пределах точности вычислений. В этой области времен зависимость характера субизлучения от размеров системы практически исчезает. Такое резкое изменение поведения системы говорит об изменении основного механизма, приводящего к задержке флуоресценции. Здесь мы имеем дело с излучением кластеров, случайно образующихся из близко расположенных атомов. В случае разреженного облака это преимущественно кластеры, состоящие из двух атомов. У таких двухатомных квазимолекул, димеров, среди возбужденных состояний есть долгоживущие состояния, которые характеризуются большими временами жизни, и "классический" процесс субизлучения, предсказанный Дике. При нерезонансном возбуждении порядок этапов иной. Этап димеров начинается сразу после сверхизлучения. Это ясно из того, что здесь на рис. 5, б, нет зависимости от размеров облака. Этап диффузии является заключительным, причем он проявляется, если характерное время τ_d превышает время жизни кластерных состояний, эффективно возбуждаемых при заданной отстройке δ (подробнее см. [18]). Для рассматриваемых сравнительно малых ансамблей это не так.

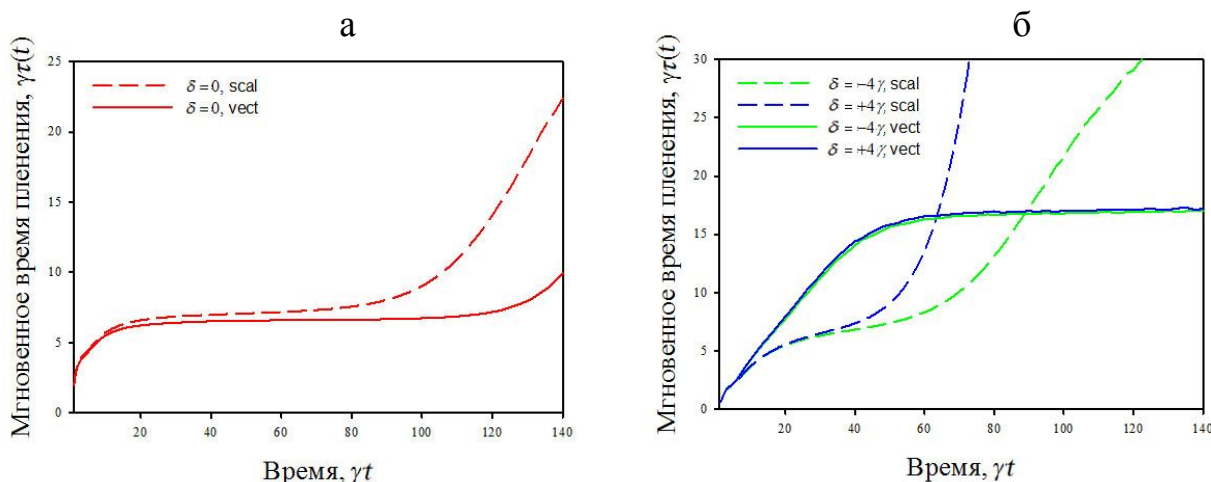


Рис. 6. Сравнение предсказаний скалярной и векторной моделей для резонансного (а) и нерезонансного (б) возбуждений. Оптическая толщина $b = 5$

Заметим, что результаты, приведенные на рис. 5, получены с учетом поляризационных свойств света и наличия зеемановской структуры атомных состояний. Очень часто при описании разреженных облаков используют скалярное приближение, в котором эти обстоятельства игнорируются. Чтобы оценить применимость этого приближения, был проведен контрольный расчет. На рис. 6 для атомного облака с оптической толщиной 5 для резонансного и нерезонансного возбуждений показаны результаты двух расчетов.

Хорошо видно, насколько скалярное приближение является грубым. Оно приводит к количественным ошибкам при описании диффузионного этапа для резонансного возбуждения и к качественно неверным предсказаниям на этапе, когда главную роль играют димеры. Особенно ярко это проявляется при нерезонансном возбуждении. Здесь вместо постоянной скорости распада оно предсказывает сильное ускорение этого распада с течением времени.

Измерение динамики полной интенсивности флуоресценции является достаточно информативным, однако возможности диагностики можно существенно расширить, если провести дополнительный анализ ее спектрального состава и поляризации. В частности, этот анализ позволяет убедиться в упоминавшемся выше изменении механизма пленения на разных этапах послесвечения.

На рис. 7 в качестве иллюстрации показан спектр вторичного излучения для разных времен после окончания резонансного импульса возбуждения. В данной работе для определения спектра мы используем оконное преобразование Фурье [48] с окном прямоугольной формы и длительностью $\gamma\Delta t = 30$. На рис. 8, а, показаны спектры двух ортогональных циркулярно-поляризованных компонент излучения, рассеянного на угол $\theta = \pi/4$, для случая, когда середине окна соответствует момент времени $\gamma t = 20$ после окончания возбуждения. На этом этапе мы наблюдаем лоренцев контур

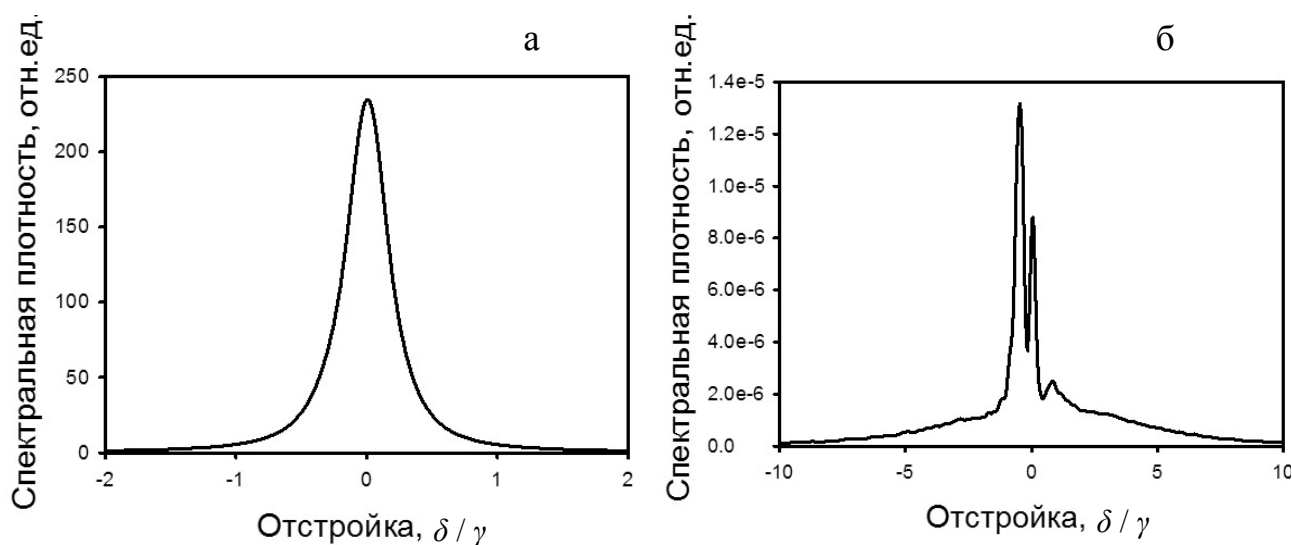


Рис. 7. Спектр излучения, рассеянного атомным облаком на угол $\theta = \pi/4$, для разных моментов времени $\gamma t = 20$ (а), 110 (б).

Расчет проведен для ансамбля $kL = 40$ ($N = 320$)

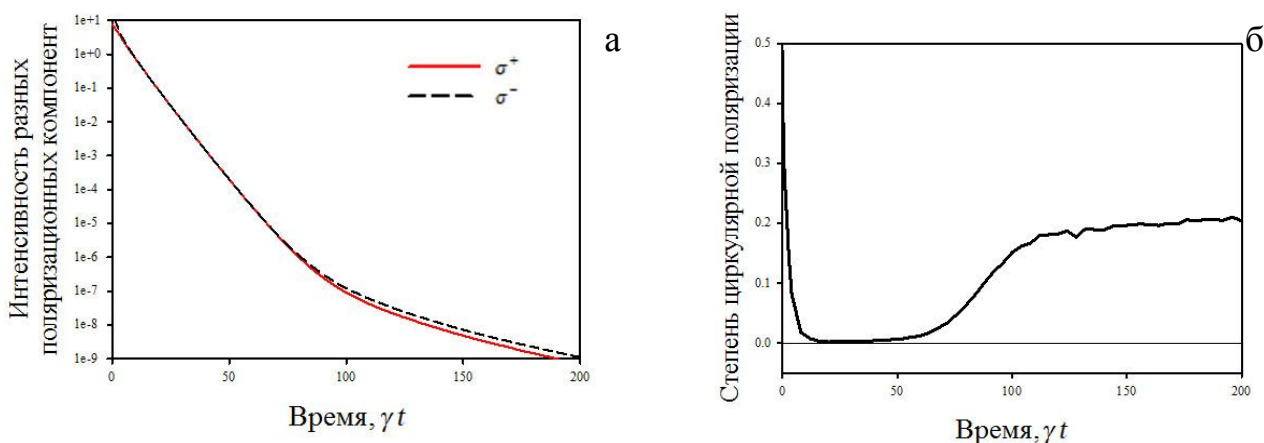


Рис. 8. Динамика изменения интенсивности двух ортогональных циркулярно-поляризованных компонент (а) и степени циркулярной поляризации (б) излучения на угол $\pi/4$

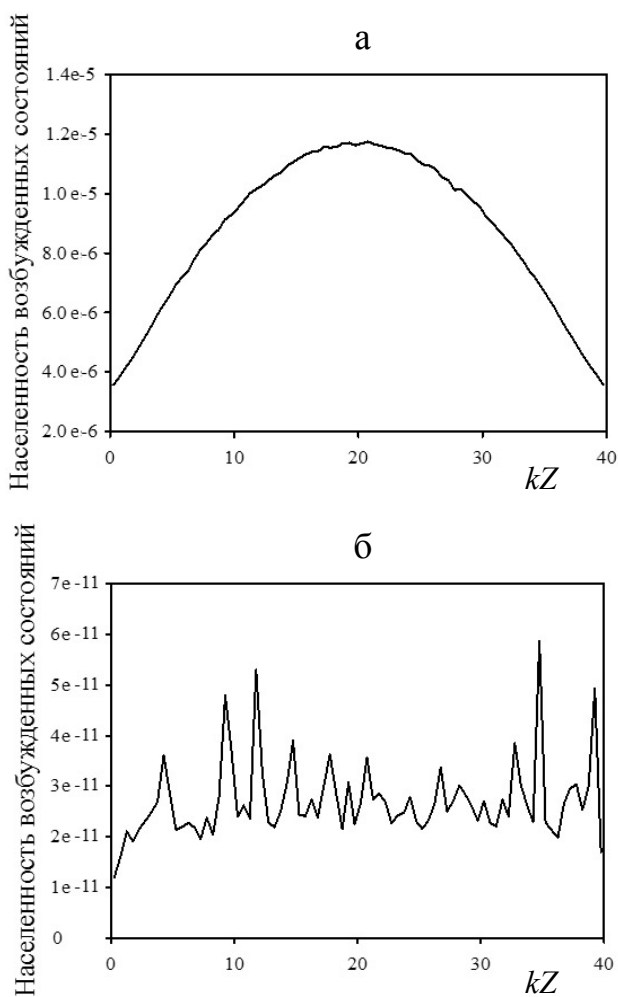


Рис. 9. Пространственное распределение (вдоль оси Z) возбужденных атомов в облаке $kL = 40$ для разных моментов времени. а — $\gamma t = 20$, б — $\gamma t = 110$

на частоте возбуждения. При переходе к этапу димеров $\gamma t = 110$ спектр существенно изменяется. Здесь флуоресценция характеризуется сложной формой спектра, имеющей широкие крылья.

2.3.2. Поляризационные свойства излучения и пространственное распределение возбуждения атомного ансамбля

Пленение и двухатомное субизлучение в эксперименте можно различить не только по характерным временам затухания или по спектральному составу. Эти два механизма различаются также поляризационными свойствами вторичного излучения. Многократное рассеяние в условиях диффузионного пленения вызывает деполаризацию, что хорошо видно на рис. 8. Интенсивности двух ортогональных поляризационных компонент одинаковы, т.е. свет не поляризован. При рассеянии на димерах свет остается частично поляризованным, что хорошо видно для интервалов времен $\gamma t > 75$.

Еще одним способом уточнения свойств атомного ансамбля может служить анализ пространственного распределения возбуждения в нем.

На рис. 9 данное распределение по оси Z показано для облака с $kL = 40$ ($N = 320$) для двух моментов времени после окончания импульса резонансного возбуждения. Видно, что для времен, для которых наблюдается медленная зависимость мгновенного времени пленения $\tau(t)$ (рис. 9, а), пространственное распределение возбужденных атомов, которое совпадает с распределением плененного излучения, с хорошей точностью описывается законом синуса. Такая зависимость характерна для диффузионного переноса и обеспечивает постоянную скорость затухания излучения.

Для интервалов времени, когда диффузия закончилась, распределение возбуждения становится практически равномерным, что связано с оди-

наковой вероятностью образования димеров в разных областях ансамбля при равномерном в среднем распределении атомов. Флуктуации, которые хорошо видны на рис. 9, б, связаны с усреднением по конечному числу рассмотренных случайных пространственных конфигураций ансамбля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре представлен анализ некоторых важных инструментальных особенностей процессов преобразования и регистрации аналитических сигналов при выполнении динамического поляризационно-оптического анализа. Найдены оптимальные для данных экспериментов условия детектирования слабых поляризационных откликов. Вклад неинформативных модуляционных компонент в результаты измерений был уменьшен при этом не менее чем в 100 раз.

Рассмотрен выполненный согласно развитым алгоритмам последовательный статистический анализ поляризационных магнитооптических откликов (двулучепреломления) магнитных наножидкостей в широком, составляющем три порядка, диапазоне концентраций. Данный анализ количественно подтвердил адекватность используемых модельных представлений и следующих из них аналитических функций, описывающих ориентационную упорядоченность магнитных наночастиц во внешнем магнитном поле.

Обнаруженные в процессе статистического анализа вариации ошибок прогноза значений параметров диагностики указывают на неслучайные особенности поляризационных откликов и связанных с ними параметров (свойств) исследуемых магнитных наножидкостей. Тем самым заложены основы диагностики поляризационных откликов магнитных наносистем.

Исследования магнитооптических характеристик нерезонансных наносистем дополнены теоретическим анализом резонансных откликов ансамблей атомов. Проанализирован характер импульсного рассеяния когерентного света атомными ансамблями, охлажденными до субдоплеровских температур. Показано, что в процессе послесвечения поляризация и спектральный состав вторичного излучения таких ансамблей претерпевают качественные изменения. Это может служить основой новых экспериментальных и теоретических подходов к исследованиям различных резонансных ансамблей точечных рассеивателей.

Таким образом, развиваемые теоретические и высокочувствительные лазерные методы количественного поляризационно-оптического анализа и выполненный статистический анализ полученных данных формируют базис прецизионной поляризационно-оптической нанодиагностики (коли-

чественной характеристике) функциональных упорядоченных материалов и наносистем.

Описанные в обзоре методы прецизионной поляризационно-оптической нанодиагностики могут быть использованы для исследований и диагностики объектов и систем самой разной природы и состава, например метаматериалов, биологических жидкостей и тканей и т.д.

Работа выполнена по государственному заданию Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-01157-23-00 в рамках темы FFZM-2022-0008 (номер гос. регистрации 122032300138-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. Аззам Р.М.А., Башара Н.М. Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 583 с.
3. Schellman J., Jensen H.P. Optical spectroscopy of oriented molecules // Chem. Rev. 1987. Vol. 87, iss. 6. P. 1359–1399. DOI: 10.1021/cr00082a004
4. Грищенко А.Е., Черкасов А.Н. Ориентационный порядок в поверхностных слоях полимерных материалов // УФН. 1997. Т. 167, № 3. С. 269–285. URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1997/3/b/>
5. Меркулов В.С. К обобщенной эллипсометрии сред // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 103, № 4. С. 646–648. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9551798>
6. Иценко Е.Ф., Соколов А.Л. Поляризационная оптика. 3-е издание. Физматлит, 2019. 571 с.
7. Запасский В.С. Поляриметрия регулярных и стохастических сигналов в магнитооптике // Физика твердого тела. 2019. Т. 61, вып. 5. С. 946–951. DOI: 10.21883/FTT.2019.05.47599.01F
8. Fofanov Ya.A. Threshold sensitivity in optical measurements with phase modulation // The Report of tenth Union Symposium and School on High-Resolution Molecular Spectroscopy - Proc. SPIE. 1992. Vol. 1811. P. 413–414. DOI: 10.1117/12.131190
9. Клышко Д.Н., Масалов А.В. Фотонный шум: наблюдение, подавление, регистрация // УФН. 1995. Т. 165, № 11. С. 1249–1278. DOI: 10.3367/UFN.0165.199511b.1249
10. Sokolov I.M., Fofanov Ya.A. Investigations of the small birefringence of transparent objects by strong phase modulation of probing laser radiation // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. Vol. 12, no 7. P. 1579–1588. DOI: 10.1364/JOSAA.12.001579
11. Fofanov Ya.A. Quantum and high-sensitive laser technologies for polarization-optical diagnostics // EPJ Web of Conferences. 2019. Vol. 220. Id. 01004. DOI: 10.1051/epjconf/201922001004
12. Fofanov Ya.A. Ch. 4. Nonlinear and fluctuation phenomena under conditions of strong selective reflection in inclined geometry // Advances in Optoelectronics Research /

- Ed. by M.R. Oswald. Nova Science Publishers, New York, 2014. P. 75–114.
13. *Фофанов Я.А., Плеваков И.В., Кузьмин Ю.И.* Лазерное поляризационно-оптическое детектирование процесса намагничивания магнитоупорядоченного кристалла // *Оптический журнал*. 2013. Т. 80, № 1. С. 88–93. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23285816>
 14. *Acher O., Bigan E., Drevillon B.* Improvements of phase-modulated ellipsometry // *Rev. Sci. Instrum.* 1989. Vol. 60, no. 1. P. 65–77. DOI: 10.1063/1.1140580
 15. *Gupta V.K., Kornfield J.A., Ferencz A., Wegner G.* Controlling molecular order in "Hairy-rod" Langmuir-Blodgett films: A polarization-modulation microscopy study // *Science*. 1994. Vol. 265, iss. 5174. P. 940–942. DOI: 10.1126/science.265.5174.940
 16. *Shindo Y., Kani K., Horinaka J., Kuroda R., Harada T.* The application of polarization modulation method to investigate the optical homogeneity of polymer films // *J. Plast. Film Sheeting*. 2001. Vol. 17, no. 2. P. 164–183. DOI: 10.1106/1VGU-5D4Y-2KON-RBQF
 17. *Фофанов Я.А., Плеваков И.В., Прокофьев А.В.* Исследование поляризационных магнитооптических откликов слабоконцентрированной феррожидкости // *Письма в ЖТФ*. 2016. Т. 42, вып. 20. С. 66–72.
 18. *Fofanov Y.A., Sokolov I.M., Kaiser R., Guerin W.* Subradiance in dilute atomic ensembles excited by nonresonant radiation // *Phys. Rev. A*. 2021. Vol. 104, Iss. 2. Id. 023705. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.023705
 19. *Davis H.W., Llewellyn J.P.* Magnetic birefringence of ferrofluids: I. Estimation of particle size // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1979. Vol. 12, no. 2. P. 311–319. DOI: 10.1088/0022-3727/12/2/018
 20. *Scherer C., Figueiredo Neto A.M.* Ferrofluids: Properties and applications // *Braz. J. Phys.* 2005. Vol. 35, no. 3A. P. 718–727. DOI: 10.1590/S0103-97332005000400018
 21. *Zhao Y., Lv R., Zhang Y., Wang Q.* Novel optical devices based on the transmission properties of magnetic fluid and their characteristics // *Opt. Lasers Eng.* 2012. Vol. 50, no. 9. P. 1177–1184. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2012.03.012
 22. *Philip J., Laskar J.M.* Optical Properties and Applications of Ferrofluids – A Review // *Journal of Nanofluids*. 2012. Vol. 1, no. 1. P. 3–20. DOI: 10.1166/jon.2012.1002
 23. *Bitar A., Kaewsaneha C., Eissa M., Jamshaid T., Tangboriboonrat P., Polpanich D., Elaissari A.* Ferrofluids: from preparation to biomedical applications // *Journal of Colloid Science and Biotechnology*. 2014. Vol. 3, no. 1. P. 3–18. DOI: 10.1166/jcsb.2014.1080
 24. *Agruzov P.M., Pleshakov I.V., Bibik E.E., Shamray A.V.* Magneto-optic effects in silica core microstructured fibers with a ferrofluidic cladding // *Applied Physics Letters*. 2014. Vol. 104, no. 7. Id. 071108. DOI: 10.1063/1.4866165
 25. *Zakinyan A.R., Dikansky Yu.I.* Effect of microdrops deformation on electrical and rheological properties of magnetic fluid emulsion // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. Vol. 431. P. 103–106. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.09.057
 26. *Фофанов Я.А., Манойлов В.В., Заруцкий И.В., Куранцев А.С.* Статистический анализ данных высокочувствительного поляризационно-оптического зондирования магнитных наножидкостей // *Оптический журнал*. 2020. Т. 87, № 2. С. 36–43. DOI: 10.17586/1023-5086-2020-87-02-36-43 (In Russ.).
 27. *Скибин Ю.Н., Чеканов В.В., Райхер Ю.Л.* Двойное лучепреломление в магнитной жидкости // *ЖЭТФ*. 1977. Т. 72, № 3. С. 949–955. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19083100>
 28. *Scholten P.C.* The origin of magnetic birefringence and dichroism in magnetic field // *IEEE Trans. Magn.* 1980. Vol. 16, no. 2. P. 221–225. DOI: 10.1109/TMAG.1980.1060595
 29. *Coleman T.F., Li Y.* An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds // *SIAM Journal on Optimization*. 1996. Vol. 6, no. 2. P. 418–445. DOI: 10.1137/0806023
 30. *Coleman T.F., Li Y.* On the convergence of reflective Newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds // *Mathematical Programming*. 1994. Vol. 67, no. 2. P. 189–224. DOI: 10.1007/BF01582221
 31. *Dennis J.E.* Nonlinear least-squares // *State of the art in numerical analysis* / Ed. D. Jacobs. Academic Press. 1977. P. 269–312.
 32. *Levenberg K.* A method for the solution of certain problems in least-squares // *Quarterly Applied Mathematics*. 1944. Vol. 2, iss. 2. P. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666
 33. *Marquardt D.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *SIAM Journal Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441. DOI: 10.1137/0111030
 34. *Moré J.J.* The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // *Numerical Analysis* / ed. G.A. Watson. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 630, Springer Verlag, 1977. P. 105–116. DOI: 10.1007/BFb0067700
 35. *Ортега Дж., Рейнболдт Вер.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными / Пер. с англ. Э.В. Вершкова, Н.П. Жидкова, И.В. Коновальцева. Под. Ред. И.В. Коновальцева. М., 1975. 560 с.
 36. *Фофанов Я.А., Манойлов В.В., Заруцкий И.В., Куранцев А.С.* Лазерная поляризационно-оптическая диагностика упорядоченных объектов и структур // *Известия РАН. Сер. физическая*. 2020. Т. 84, № 3. С. 341–344.
 37. *Фофанов Я.А., Манойлов В.В., Заруцкий И.В., Бардин Б.В.* О подобии поляризационно-оптических откликов магнитных наножидкостей. Ч.1 Аппроксимация для слабых полей // *Научное приборостроение*. 2018. Т. 28. № 1. С. 45–52. Ч.2. Оценка статистической значимости коэффициентов регрессии // *Научное приборостроение*. 2018. Т. 28. № 2. С. 54–62.
 38. *Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Fofanov Ya.A.* Coherent specular reflection of resonant light from a dense ensemble of motionless point-like scatters in a slab geometry // *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* 2016. Vol. 41. Id. 1660141. DOI: 10.1142/S2010194516601411
 39. *Ларионов Н.В., Соколов И.М., Фофанов Я.А.* Особенности углового распределения света, рассеянного холодным атомным ансамблем в присутствии постоянного электрического поля // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2019.

- T. 83, № 3. С. 306–310.
DOI: 10.1134/S0367676519030116
40. *Hau L.V.* Optical information processing in Bose–Einstein condensates // *Nature Photon.* 2008. Vol. 2. P. 451–453. DOI: 10.1038/nphoton.2008.140
 41. *Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A.* The physics of quantum information. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. 293 с.
 42. *Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R. et al.* An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level // *Nature.* 2014. Vol. 506. P. 71–75. DOI: 10.1038/nature12941
 43. *Foldy L.L.* The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // *Phys. Rev.* 1945. Vol. 67. P. 107–119. DOI: 10.1103/PhysRev.67.107
 44. *Lax M.* Multiple scattering of waves // *Rev. Mod. Phys.* 1951. Vol. 23, iss. 4. P. 287–310. DOI: 10.1103/RevModPhys.23.287
 45. *Соколов И.М., Куприянов Д.В., Хэви М.Д.* Микроскопическая теория рассеяния электромагнитного излучения плотным ансамблем ультрахолодных атомов // *ЖЭТФ.* 2011. Т. 139. С. 288–304.
 46. *Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Havey M.D.* Angular distribution of single photon superradiance in a dilute and cold atomic ensemble // *Phys. Rev. A.* 2017. Vol. 96, iss. 2. Id. 023830. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023830
 47. *van Rossum M.C.W., Nieuwenhuizen Th.M.* Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy, and diffusion // *Rev. Mod. Phys.* 1999. Vol. 71, iss. 1. P. 313–371. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.313
 48. *Божокин С.В., Соколов И.М.* Сравнение вейвлет-преобразования и преобразования Габора при анализе спектрального состава нестационарных сигналов // *ЖТФ.* 2018. Т. 88, № 12. С. 1771–1778.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (Фофанов Я.А., Соколов И.М., Манойлов В.В.)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург (Соколов И.М., Курапцев А.С.)

Контакты: Манойлов Владимир Владимирович,
manoilov_vv@mail.ru

Материал поступил в редакцию 27.06.2023

DYNAMIC POLARIZATION-OPTICAL ANALYSIS OF ORDERED FUNCTIONAL MATERIALS AND NANOSYSTEMS (overview)

Ya. A. Fofanov¹, I. M. Sokolov^{1,2}, V. V. Manoilov¹, A. S. Kuraptsev²

¹*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

²*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia*

The instrumental features of transformation and registration of analytical signals in dynamic polarizing optical analysis are considered. The optimal experimental conditions are determined for studying the dynamics of weak polarization responses. A consistent statistical analysis of the polarization magneto-optical responses of magnetic nanofluids in a wide concentration range of three orders of magnitude is described. A quantitative grounding has been obtained for the adequacy of the physical models used and the analytical functions following from them, which describe the orientational ordering of magnetic nanoparticles in an external magnetic field. The detected variations in the prediction errors of diagnostic parameters indicate non-random features of the dynamics of polarization responses and related parameters (properties) of the studied magnetic nanofluids.

Studies of non-resonant nanosystems are supplemented by a theoretical analysis of the dynamics of pulsed scattering of coherent light by atomic ensembles cooled to sub-Doppler temperatures. It is shown that the polarization and spectral composition of the secondary radiation of such ensembles undergo qualitative changes during the afterglow process. This opens up the prospect of developing new experimental and theoretical approaches to the study of various resonant ensembles of point scatterers.

Described in this review theoretical and highly sensitive laser methods of quantitative polarizing optical analysis and the performed statistical analysis of the obtained data form the basis for high-precision polarizing optical nanodiagnostics (quantitative characterization) of ordered functional materials and nanosystems.

The developed methods of polarization nanodiagnostics can be used to study materials, objects, and systems of different nature and composition, for example, metamaterials, biological fluids and tissues, etc.

Keywords: laser, polarization-optical analysis, statistical analysis of experimental data, analytical approximation, magnetic nanofluids, optoelectronics, magneto-optics, laser polarization-optical nanodiagnostics

INTRODUCTION

One of the most informative methods for studying functional optical and magnetic materials, elements, and systems is laser polarizing optical probing [1–7]. The high threshold sensitivity of such probing, which is limited only by the natural noise of probing laser radiation, makes it possible to register various and rather subtle effects [8–13] in the objects under study. Because of this, the development of the basic principles of dynamic polarizing optical analysis of ordered functional materials and nanosystems seems very relevant.

The review considers some features of laser polarizing optical analysis of the dynamics of weak polarization responses. The analysis of the instrumental implementation is accompanied by a description of the algorithms intended for processing experimental data. The theoretical (physical) models used in the algorithms and their corresponding analytical functions are described.

Studies of the magneto-optical characteristics of nonresonant objects are supplemented by an analysis

of the resonant responses of cold atomic ensembles. The nonstationary (dynamic) interaction of cold atoms with an electromagnetic field is considered. The fundamentals of the theoretical analysis of fluorescence dynamics are presented, including the study of the polarization characteristics and the spectral composition of the radiation of the studied atomic ensembles.

1. INSTRUMENTAL PRINCIPLES OF DYNAMIC ANALYSIS. APPROXIMATION OF DATA ON MAGNETO-OPTICAL RESPONSE OF MAGNETIC NANOFUIDS BY AN ANALYTICAL FUNCTION

1.1. Features of instrumental non-stationary polarizing optical analysis

The instrumental principles of dynamic polarizing optical analysis have some peculiarities. One of them is the need to detect weak analytical signals (polarization responses) determined by the dynamics of the processes under study. Our studies show the advan-

tages of using phase modulation in this case, which makes it possible to effectively extract the signals responsible for the polarization characteristics of the studied objects of different nature [8, 10, 11, 13–16].

To register weak polarization responses, it is necessary to maintain an optimal modulation level that provides the maximum signal value in the optoelectronic path. The optimal modulation amplitude corresponds to the maximum of the Bessel function, which corresponds to the frequency of the detected informative signal ν_2 (see Fig. 1). In this case, the amplitudes of neighboring frequency components ν_1 and ν_3 become equal in the photocurrent spectrum, as can be seen in Fig. 1. This circumstance was taken as the basis for the method for controlling the amplitude of phase modulation of probing laser radiation.

Fig. 1. Equality of the amplitudes of the frequency components ν_1 and ν_3

In subsequent studies, it turned out that the presence of neighboring frequency components in the photocurrent spectrum makes it possible to control the amplitude of phase modulation, although it significantly complicates the detection of useful signals, the magnitude of which in a number of especially interesting cases can be significantly (by several orders of magnitude) less. To reduce the influence of non-informative neighboring frequency components, their suppression in the electronic path was carried out. The effective frequency selection used for this purpose made it possible to reduce the level of non-informative components by more than 100 times, without significant distortion of the useful signal. Fig. 2 shows the signal spectrum after filtering. In the middle part of the spectrum, the signal of the polarization response of the object under study is clearly visible, on both sides of which the non-informative components weakened during the selection process are visible. Note that in the photocurrent spectrum in Fig. 1, weak analytical signals (responses) are practically invisible against the background of non-informative components.

Fig. 2. Suppression of non-informative analytical signals at frequencies ν_1 and ν_3

The practical implementation of the considered features of the instrumental principles opens up the possibility of observing the dynamics of weak polarization responses of various objects and systems, for example, magnetically ordered crystals, dense cold atomic ensembles, etc. [10–13, 17, 18].

1.2. Analytical function approximation of magneto-optical responses of magnetic nanofluids

1.2.1. Statement of the problem of approximation of magneto-optical responses by an analytical function

Further development of laser polarizing optical analysis of functional materials and systems with relatively weak magnetic properties is currently of considerable interest. Such objects include, for example, magnetic nanofluids, which are widely used in scientific research, technology, and medicine [19–25].

Approximation of a significant amount of experimental data on the magneto-optical responses (birefringence) of magnetic nanofluids (NF) by an analytical function in a wide range of concentrations of the studied magnetic nanofluids was first described in [26]. In this case, the instrumental features and important details of the experiments were taken into account, and all the necessary mathematical procedures were performed quite carefully [17, 26]. The main initial prerequisites for accurate and reliable approximation of experimental data using the analytical function were the following circumstances:

- the analysis of polarization responses was carried out for the nanosystem "liquid matrix – magnetic particles" of the same composition;
- all magneto-optical parameters of magnetic nanoparticles in the system under study did not change, and only their volume concentration changed in the transition from experiment to experiment;
- as an approximating function, an analytical dependence was used, based on the concepts of the orientational ordering of magnetic particles in a magnetic field [27, 28].

Following the initial assumptions, the following analytical dependence was used to construct the approximating function (see also [27, 28]):

$$\varphi = \alpha F(p). \quad (1)$$

In formula (1), φ is the polarization response; the coefficient α is determined by the parameters of the magnetic nanoparticles. This coefficient is proportional to the volume concentration of nanoparticles and does not depend on the value of the magnetic field. According to [28], the dependence $F(p)$ in formula (1) is a function of the magnetic field and does not depend on concentration:

$$F(p) = 1 - \frac{3}{p} \coth(p) + \frac{3}{p^2}, \quad (2)$$

$$p = \frac{\mu H}{kT}, \quad (3)$$

where μ is the magnetic moment of the particles, H is the strength of the external transverse magnetic field, k is the Boltzmann constant, T is the temperature.

To perform the approximation by the analytical function, formulas (1)–(3) are used, and the approximating function $\varphi^{\text{app}}(\alpha, \beta, x)$ is written in the following form

$$\varphi^{\text{app}}(\alpha, \beta, x) = \alpha F(\beta x), \quad (4)$$

where α and β are variable dimensionless parameters, and x is an auxiliary independent variable. In this case, the values of the parameter p , defined by the following formula, also vary:

$$p = \beta x. \quad (5)$$

1.2.2. Analytical approximation of experimental data on magneto-optical responses

An analytical approximation of the experimental data described by formula (1) was performed on the basis of algorithms for estimating the parameters of nonlinear functions. Such algorithms are described in [29–33]. The final stage of finding the parameters of non-linear functions involves solving a system of non-linear equations. This solution can be found using the methods described, for example, in [34, 35].

Following [26], we denote the experimental data as y_i , where i is the measurement number within one scan of the magnetic field. Instead of a continuous variable x , we introduce a discrete variable x_i . The corresponding discrete values x_i of the independent variable x are determined by the following relationship:

$$x_i = i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

where n is the number of y_i values (number of points). From the experimental data y_i and the number of points n , the parameters α and β can be found, which are necessary for constructing the approximating function (4).

To construct an approximating function, the least squares method (LSM) is used, according to which the sum of the squared deviations $S(\alpha, \beta)$ of the experimental data from the approximating function should tend to a minimum:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi^{\text{app}}(x_i, \alpha, \beta)]^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

where the parameters α and β must be such as to ensure the minimum $S(\alpha, \beta) = S_{\min}$.

It was shown in [26] that two iterative algorithms are used to determine α_{\min} and β_{\min} satisfying condition (7). In the first algorithm, the search for the minimum of $S(\alpha, \beta)$ was carried out by varying the parameters α and β at each iteration step, at which the value of $S(\alpha, \beta)$ was calculated. For the first step of the iterative process, the approximate values of the parameters α and β were used and denoted α_0 and β_0 . The algorithm for obtaining the parameters α_0 and β_0 is described in detail in [26].

In order to find α_{\min} and β_{\min} satisfying condition (7) using the second iterative algorithm, a system of two equations was compiled that includes partial derivatives $S(\alpha, \beta)$ with respect to α and β . Then this system of equations was solved by a numerical optimization method.

1.2.3. Compilation and solution to the system of equations for determining the minimizing values of parameters α and β

To construct the a system of equations necessary to obtain the parameters α and β that minimize the sum of the squared deviations of the experimental data from the approximating function, we equate the partial derivatives $S(\alpha, \beta)$ to zero with respect to α and β . Taking (4) into account, we get:

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha F(\beta x_i)] F(\beta x_i) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha F(\beta x_i)] \left[-\alpha \frac{dF(\beta x_i)}{d\beta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Taking into account (2), (5), (7), we obtain a system of two transcendental equations for α and β :

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right)^2}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[-y_i \alpha \frac{\left(\frac{3[(\coth(\beta x_i)]^2}{\beta} - \frac{6}{\beta^3 x_i^2} + \frac{3 \coth(\beta x_i)}{\beta^2 x} \right)}{d\beta} \right] + \sum_{i=1}^n \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{3}{(\beta x_i)} \coth(\beta x_i) + \frac{3}{(\beta x_i)^2} \right) \left(\frac{3[(\coth(\beta x_i)]^2}{\beta} - \frac{6}{\beta^3 x_i^2} + \frac{3 \coth(\beta x_i)}{\beta^2 x} \right) \right] = 0. \quad (11)$$

The resulting system of equations was solved by a numerical optimization method with an objective function corresponding to minimizing the sum of squared deviations of the approximating curve from the experimental data. The values α_0 and β_0 obtained above [26] were used as initial conditions. As a result of solving equations (10) and (11) the following values were obtained: $\alpha_{\min} = 4.28$ and $\beta_{\min} = 0.054$ for the experiment with a concentration of magnetic nanoparticles equal to 1%. The sum of squared deviations obtained for these values $S(\alpha, \beta) = 2.7 \times 10^{-5}$.

In Fig. 3 dots show the normalized experimental data for a 1% volume concentration of magnetic particles [17], as well as the approximating function φ^{app} (solid line) constructed using formulas (4), (5) and the values $\alpha_{\min} = 4.28$ and $\beta_{\min} = 0.054$ obtained from solution to system (10), (11). One can see a good agreement between the results of the analytical approximation and the experimental data.

Fig. 3. Approximation of the polarization responses v_i of the analytical curve φ^{app} . Points — experiment, line — approximating function

To quantify the accuracy of the performed analytical approximation, we calculated the deviations δ_i of the experimental data y_i from the approximating function $\varphi^{\text{app}}(x, \alpha_{\min}, \beta_{\min})$:

$$\delta_i = y_i - \varphi^{\text{app}}(x_i, \alpha_{\min}, \beta_{\min}), \quad (12)$$

where the value of the independent variable x_i at point i is set by formula (6). The magnitude of these deviations is small and does not exceed 0.25% of the maximum signal. Similar results were also obtained for other concentrations of magnetic particles.

Tab. 1 shows the relative values δS_{\min} of the sum of squared deviations for experiments with various concentrations of magnetic nanoparticles and for the values of α_{\min} and β_{\min} obtained for these experiments. The S_{\min} values were determined as the ratio of S_{\min} to the maximum signal value for a given concentration. It can be seen that the relative values of the sum of

squared deviations of the experimental data from the approximating curve are almost the same for concentrations from 1 to 0.003%. Only for the smallest concentration of 0.001%, this value is slightly larger. This shows that the described technique for estimating the parameters of the approximating curve can be employed for magnetic nanofluids with various concentrations. The values of δS_{\min} are small, which also indicates the reliability of the measurements.

Tab. 1. Results of calculating the sums of squared deviations from the approximating function for experiments with various concentrations of magnetic nanofluid

1.2.4. Application of the parameters of the analytical approximating function to the quantitative characterization of magnetic nanofluids

In the previous section, we described methods for obtaining the values of the dimensionless parameters of an analytical function approximating the experimental data on the magneto-optical responses of magnetic nanofluids. These parameters have been designated α and β . In this section, we will show that the evolvable methods of highly sensitive polarizing optical analysis and obtaining the values of the dimensionless parameters α and β using the described procedures build the basis for the diagnostics of the studied magnetic nanofluids, since these parameters quantitatively characterize the studied magnetic nanofluids [27, 28, 36].

Indeed, using formulas (1), (4), (5), and the parameters α and β , one can evaluate the quantitative characteristics of the studied magnetic nanofluids [36]. Such a quantitative assessment is proposed to be called polarization-optical diagnostics of magnetic nanofluids. To check the possibility of performing such diagnostics, a number of computational experiments were carried out.

In these experiments, arrays of experimental data were used for magnetic nanofluids with a known and

constant composition, but with a variable concentration of magnetic nanoparticles [17].

Let us introduce the following notation for the diagnosed parameters:

$$\alpha_{\text{diagn}} = \alpha_{\text{min}}; \quad \beta_{\text{diagn}} = \beta_{\text{min}}. \quad (13)$$

In formula (13), the diagnosed parameters α_{diagn} and β_{diagn} are the parameters of the analytical approximating function, and are obtained by processing the experimental data according to the method discussed above.

As can be seen from formulas (1)–(4) and explanations to them, the variable parameter α is proportional to the volume concentration of nanoparticles, and the parameter β does not depend on the concentration (see also [11]). Using knowledge of the concentrations of magnetic nanofluids and the values of the magnetic field strength, it is possible to make an a priori estimate of the parameters α and β . We will call such an a priori estimate a forecast, and the corresponding values of the parameters α and β will be denoted by α_{pr} and β_{pr} . Predicted α_{pr} values for experiments with liquids with various concentrations of magnetic nanoparticles are presented in Tab. 2. In the same table, you can see the obtained values of α_{diagn} , as well as the relative errors of α_{diagn} forecast:

$$\delta\alpha_{\text{pr}} = (\alpha_{\text{diagn}} - \alpha_{\text{pr}}) / \alpha_{\text{pr}}. \quad (14)$$

Since the value of the parameter β does not change with a change in concentration, then, in accordance with formulas (1)–(4), the parameter β_{pr} for all experiments with various concentrations is a constant value equal to 0.054. The diagnosed parameter β_{diagn} is determined by the method described above and presented in Tab. 2. Relative errors of predicted data $\delta\beta_{\text{pr}}$ are calculated by the formula:

$$\delta\beta_{\text{pr}} = (\beta_{\text{diagn}} - \beta_{\text{pr}}) / \beta_{\text{pr}}. \quad (15)$$

The calculated values of $\delta\beta_{\text{pr}}$ are also presented in Tab. 2.

Tab. 2. Results of evaluating the quantitative characteristics of the studied magnetic nanofluids

From the data presented in Tab. 2, it is clearly seen that the parameter α_{diagn} increases with increase in concentration, while the values of β_{diagn} practically do not change. Thus, the conclusion about the similarity of the polarization responses of magnetic nanofluids stated in [37] gets quantitative confirmation here. The data in Tab. 2 also indicate the correct choice of the physical model and the analytical function describing this model, used here to approximate the studied magneto-optical responses.

It should also be noted that there are some differences in the relative errors $\delta\alpha_{\text{pr}}$ and $\delta\beta_{\text{pr}}$ for experiments with various concentrations. Of particular importance is the consistent increase in forecast errors obtained for some concentrations, both in terms of the parameter α and the parameter β . The largest prediction errors were for experiments 2 and 5. For experiment 2 — $\delta\alpha_{\text{pr}} = 8.9\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} = 5.5\%$; for experiment 5 — $\delta\alpha_{\text{pr}} = 6.8\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} = 6.9\%$. Whereas for experiment 3, the indicated forecast errors are much smaller: $\delta\alpha_{\text{pr}} = 0.5\%$, $\delta\beta_{\text{pr}} < 0.05\%$. The identified variations in forecast errors may indicate non-random features inherent in the studied magnetic nanofluids.

The most probable reasons for non-random features can be indicated by small differences in the parameters of the initial samples of different series, from which the samples for experiments were prepared. In this case, the detection of prediction errors reveals the possibility of using the developed methods for diagnosing small variations in the polarization-optical characteristics of magnetic nanofluids. The developed approaches and methods can also be used to perform highly sensitive studies and diagnostics of many other objects and systems (see, for example, [8, 10–13, 38, 39]). In particular, the analysis of the dynamics of the response to optical excitation can be used to study the properties of atomic ensembles cooled to low temperatures in special traps. The second part of this review is devoted to a theoretical analysis of the possibilities of using such techniques.

2. DYNAMICS OF FLUORESCENCE OF COLD AND RAREFIED ATOMIC ENSEMBLES AFTER PULSED EXCITATION

2.1. Formulation of the problem

Atomic ensembles cooled to sub-Doppler temperatures in special traps are very promising objects for a wide range of practical applications in quantum metrology, frequency standardization, quantum information applications, etc. [40–42].

Almost all the proposed schemes for the use of cold atomic ensembles and most of the methods for diagnosing their state are based on their interaction with electromagnetic radiation. One of the most effective and frequently used methods for studying the properties of cold atomic ensembles is the study of fluorescence dynamics after pulsed excitation.

In this section, we will analyze theoretically the features of such dynamics, which are extremely important for an adequate interpretation of the corresponding experiments.

A typical scheme for observing the fluorescence of an atomic ensemble after its pulsed excitation is

shown in Fig. 4, a. A pulse of monochromatic radiation with duration T is scattered by the atomic ensemble under study.

Fig. 4. Typical layout for observing the fluorescence of an atomic ensemble after its pulsed excitation

The main observable that is traditionally analyzed in both theoretical and experimental studies of afterglow is the time dependence of the total intensity of light scattered in a given direction θ . In theory, the total intensity is often calculated as a full spherical angle. A typical form of such a dependence is shown in Fig. 4, б. Quantitatively, the dynamics of fluorescence is the value of the instantaneous radiation velocity $\Gamma(t) = d \ln(I(t)) / dt$ or its reciprocal — the instantaneous capture time $\tau(t) = 1 / \Gamma(t)$.

2.2. Fundamentals of the theoretical description of fluorescence dynamics

We will describe the dynamics of the states of atoms using the model of coupled dipoles, traditional for this class of problems. This model was first proposed by Foldy [43] and then discussed in detail by Lax [44]. We consider an ensemble consisting of N identical atoms with the ground state having the angular momentum $J_g = 0$ and the excited state $J_e = 1$. The lifetime of all three Zeeman sublevels ($m = -1, 0, 1$) is the same and equal. Atoms are assumed to be immobile, and their shift due to the low temperature of the ensemble, is taken into account by averaging the calculated values over the random spatial arrangement of atoms.

We used a variant of the coupled oscillator model formulated in the framework of the consistent quantum approach developed in [45]. We note the main features of this approach. First, we solve the non-stationary Schrödinger equation for the wave function ψ , which describes the state of the combined system of atoms and electromagnetic radiation, including the vacuum reservoir. We seek the wave function in the form of an expansion of the Hamiltonian of noninteracting atoms and light in terms of eigenfunctions. Taking into account the typical weakness of the excitation, in this expansion we leave the states containing no more than one photon. As a result, for the amplitudes b_e of the excited states of the atom $\psi_e = |g, \dots, e, \dots, g\rangle$, we obtain the following system of equations:

$$\frac{\partial b_e}{\partial t} = \left(i\delta - \frac{\gamma}{2} \right) b_e - i\frac{\Omega_e}{2} + \frac{i\gamma}{2} \sum_{e' \neq e} V_{ee'} b_{e'}. \quad (16)$$

Here the index "e" shows the Zeeman sublevel and the number of atoms excited in the state. The first term on the right side of equation (16) is responsible for the free evolution of atoms. The second term describes the effect of externally excited radiation. The Rabi frequency of this field is equal to Ω_e at the location of the atom e , the detuning is δ .

The last term in equation (16) takes into account the dipole-dipole interaction of atoms with each other. The matrix $V_{ee'}$, included in this term has the following form:

$$V_{ee'} = -\frac{2}{\gamma} \sum_{\mu, \nu} \mathbf{d}_{eg}^{\mu} \mathbf{d}_{ge'}^{\nu} \frac{e^{ikr_{ij}}}{\hbar r_{ij}^3} \left\{ \delta_{\mu\nu} \left(1 - ikr_{ij} - (kr_{ij})^2 \right) - \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\nu} \mathbf{r}_{ij}^{\mu}}{r_{ij}} \left(3 - 3ikr_{ij} - (kr_{ij})^2 \right) \right\}. \quad (17)$$

Here we have assumed that the i and j atoms are excited, respectively, in the e and e' states; d_{eg} is the matrix element of the dipole moment operator for the transition $g \rightarrow e$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$; $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, and $k = \omega_0 / c$ is the wave number corresponding to the frequency of this transition; c is the speed of light in vacuum. Indexes μ or ν denote projections on the axis of the selected coordinate system. System (16) for amplitudes $b_e(t)$ is solved numerically for various random spatial configurations of immobile atoms.

Based on the calculated values $b_e(t)$, we can determine the amplitudes of all other states that set the wave function ψ of the combined atom–field system (see [45] for details) and, consequently, the properties of both the atomic ensemble and the scattered light. So, the intensity of the polarization component of light α , emitted by a cloud in a unit solid angle around an arbitrary direction given by the wave vector \mathbf{k} ($\Omega = \theta, \varphi$) can be defined as follows [46]:

$$I_{\alpha}(\Omega, t) = \frac{c}{4\pi} \left| k^2 \sum_{i,m} \mathbf{u}_{\alpha}^* \mathbf{d}_{ge}^* \beta_e(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2. \quad (18)$$

Here, \mathbf{u}_{α}^* is the unit polarization vector of the secondary emission.

2.3. Results of fluorescence dynamics calculations

2.3.1. Total intensity of fluorescence

The calculation of the fluorescence dynamics based on (16)–(18) can be carried out for an arbitrary shape and spatial distribution of atoms. We consider the simplest case of a homogeneous cubic atomic cloud. This simplifies the study of the dynamics of the spatial distribution of excited atoms in the ensemble. In addition, in the case of sharp boundaries in the en-

semble, it is convenient to compare the numerical results with the data of the diffusion theory of radiative transfer.

To simulate the rarefied atomic ensembles typical for experiments, we take the density of atoms n to be equal $nk^{-3} = 0.005$ in all calculations. The excitation momentum is assumed to be rectangular with a duration $\gamma T = 50$. For definiteness, its polarization is assumed to be left circular. The specific type of polarization does not have a qualitative effect on the nature of the dynamics.

The results of calculations of the total intensity of fluorescence emitted in all directions, in the entire spectral range, and in all polarization channels, are shown for atomic ensembles of various sizes in Fig. 5. The size is set by the length of the cube edge L . Fig. 5, a corresponds to resonant excitation $\delta = 0$, Fig. 5, б — non-resonant ($\delta = 4\gamma$). The obtained curves demonstrate a number of important physical results. First, the character of fluorescence essentially depends on the detuning of the exciting light. Consider the features in these two cases separately. On the curves in Fig. 5, a four characteristic stages of change can be distinguished. At the very beginning, after the end of the excitation pulse (this moment corresponds to $t = 0$), the effect of superradiance is observed when $t < \tau_{at}$. The decay rate $\Gamma(t)$ is greater than the natural width of excited atomic states γ . Then comes the stage of radiation capture. Radiation transfer is described by the diffusion equation [47]. This stage can be divided into two parts.

Fig. 5. Fluorescence dynamics of atomic ensembles of various sizes.

The density of atoms is $nk^{-3} = 0.005$, the duration of excitation $\gamma T = 50$. a — resonant excitation ($\delta = 0$), б — non-resonant ($\delta = 4\gamma$)

Initially, radiation diffusion is described by multi-mode dynamics. At this stage, the capture time increases. Then the mode of single-mode diffusion sets in, when the decay is described by a single-exponential law with a characteristic time τ_d . Straight lines are clearly visible in Fig. 5, a. The magnitude τ_d and duration of this stage increase with the size of the system.

At the final stage, a noticeable increase in the trapping time $\tau(t)$ is observed. At a given density, regardless of the size of the ensemble, all the curves go to the same asymptote, and the variation in the instantaneous decay rates and instantaneous capture time is within the accuracy of the calculations. In this time region, the dependence of the nature of subradiation on the size of the system practically disappears. Such a sharp change in the behavior of the system indicates

a change in the main mechanism leading to a delay in fluorescence. Here we deal with the emission of clusters randomly formed from closely spaced atoms. In the case of a rarefied cloud, these are predominantly clusters consisting of two atoms. Such diatomic quasimolecules, dimers, among the excited states, have long-lived states and the "classical" subradiation process predicted by Dicke. For non-resonant excitation, the order of stages is different. The dimer stage begins immediately after superradiance. This is clear from what is shown in Fig. 5, б, there is no dependence on the size of the cloud. The diffusion stage is the final one, and it manifests itself if the characteristic time τ_d exceeds the lifetime of cluster states effectively excited at a given detuning δ (for details, see [18]). For the relatively small ensembles under consideration, this is not the case.

Note that the results shown in Fig. 5 were obtained taking into account the polarization properties of light and the presence of the Zeeman structure of atomic states. Very often, when describing rarefied clouds, a scalar approximation is used in which these circumstances are ignored. To evaluate the applicability of this approximation, a control calculation was carried out. Fig. 6 shows the results of two calculations for an atomic cloud with an optical thickness of five for resonant and nonresonant excitations.

Fig. 6. Comparison of predicted scalar and vector models for resonant (a) and non-resonant (б) excitations. Optical thickness $b = 5$

It is clearly seen how rough the scalar approximation is. It leads to quantitative errors in the description of the diffusion stage for resonant excitation and to qualitatively incorrect predictions at the stage when dimers play the main role. This is especially pronounced with nonresonant excitation. Here, instead of a constant decay rate, it predicts a strong acceleration of this decay over time.

The measurement of the dynamics of the total fluorescence intensity is quite informative, but the possibilities of diagnostics can be significantly expanded if an additional analysis of its spectral composition and polarization are carried out. In particular, this analysis makes it possible to verify the change in the trapping mechanism mentioned above at different afterglow stages.

Fig. 7 illustrates the spectrum of secondary radiation for various time moments after the end of the resonant excitation pulse. In this work, to determine the spectrum, we use the short-time Fourier transform [48] with a rectangular window and duration $\gamma \Delta t = 30$.

Fig. 7. Spectrum of emission scattered by an atomic cloud at an angle $\theta = \pi/4$ for various moments of time $\gamma t = 20$ (a), 110 (б). The calculation was carried out for the ensemble $kL = 40$ ($N = 320$)

Fig. 8, a shows the spectra of two orthogonal circularly polarized components of radiation scattered at an angle $\theta = \pi/4$ when the middle of the window corresponds to the time $\gamma t = 20$ after the end of excitation. At this stage, we observe the Lorentz contour at the excitation frequency. On passing to the stage of dimers $\gamma t = 110$, the spectrum changes significantly. Here, fluorescence is characterized by a complex spectrum shape with wide wings.

Fig. 8. Dynamics of changes in the intensity of two orthogonal circularly polarized components (a) and the degree of circular polarization (б) of emission at an angle of $\pi/4$

2.3.2. Polarization properties of emission and spatial distribution of atomic ensemble excitation

Capture and diatomic subradiation can be distinguished experimentally not only by characteristic decay time intervals or by spectral composition. These two mechanisms also differ in the polarization properties of the secondary radiation. Multiple scattering under conditions of diffusion trapping causes depolarization, which is clearly seen in Fig. 8. The intensities of two orthogonal polarization components are the same, i.e., the light is not polarized. When scattered by dimers, the light remains partially polarized, which is clearly seen for time intervals $\gamma t > 75$.

Another way to refine the properties of an atomic ensemble is to analyze the spatial distribution of excitation in it.

In Fig. 9, this distribution along the Z axis is shown for a cloud with $kL = 40$ ($N = 320$) for two time moments after the end of the resonant excitation pulse. It can be seen that for time moments with a slow dependence of the instantaneous capture time $\tau(t)$ (Fig. 9, a), the spatial distribution of excited atoms, which coincides with the distribution of trapped radiation, is described by the sine law with good accuracy. Such a dependence is characteristic of diffusion transfer and provides a constant rate of radiation decay.

Fig. 9. Spatial distribution (along the Z axis) of excited atoms in the cloud $kL = 40$ for various time moments. a — $\gamma t = 20$, б — $\gamma t = 110$

For time intervals when diffusion is over, the excitation distribution becomes almost uniform, which is associated with the same probability of dimer formation in different regions of the ensemble with a uniform average distribution of atoms. Fluctuations, which are clearly visible in Fig. 9, б are related to averaging over a finite number of considered random spatial configurations of the ensemble.

CONCLUSION

The review presents an analysis of some important instrumental features of the conversion and registration of analytical signals when performing dynamic polarizing optical analysis. The optimal conditions for these experiments for detecting weak polarization responses have been determined. The contribution of non-informative modulation components to the measurement results was reduced by at least 100 times.

A sequential statistical analysis of the polarization magneto-optical responses (birefringence) of magnetic nanofluids performed according to developed algorithms in a wide concentration range of three orders of magnitude is considered. This analysis quantitatively confirmed the relevance of the used model representations and the analytical functions following from them, which describe the orientational ordering of magnetic nanoparticles in an external magnetic field.

The variations in the prediction errors of the values of diagnostic parameters found in the course of statistical analysis point to nonrandom features of the polarization responses and related parameters (properties) of the studied magnetic nanofluids. This laid the foundations for diagnosing the polarization responses of magnetic nanosystems.

Studies of the magneto-optical characteristics of nonresonant nanosystems are supplemented by a theoretical analysis of the resonant responses of ensembles of atoms. The character of pulsed scattering of coherent light by atomic ensembles cooled to sub-Doppler temperatures is analyzed. It is shown that during the afterglow, the polarization and spectral composition of the secondary radiation of such ensembles undergo qualitative changes. This can serve as the basis for new experimental and theoretical approaches to the study of various resonant ensembles of point scatterers.

Thus, the developed theoretical and highly sensitive laser methods for quantitative polarization-optical analysis and the performed statistical analysis of the data obtained form the basis of precision polarization-optical nanodiagnosics (quantitative characterization) of ordered functional materials and nanosystems.

The methods of precision polarization-optical nanodiagnosics described in the review can be used to study and diagnose objects and systems of very different nature and composition, such as metamaterials, biological fluids and tissues, etc.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.Ya., Akhmetzyanov M.Kh. *Polyarizatsionno-opticheskie metody mekhaniki deformiruemogo tela* [Polarization-optical methods of mechanics of a deformable body]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 576 p. (In Russ.).
2. Azzam R.M.A., Bashara N.M. *Ehllipsometriya i polarizovannyi svet* [Ellipsometry and polarized light]. Moscow, Mir Publ., 1981. 583 p. (In Russ.).
3. Schellman J., Jensen H.P. Optical spectroscopy of oriented molecules. *Chem. Rev.*, 1987, vol. 87, iss. 6, pp. 1359–1399. DOI: 10.1021/cr00082a004
4. Grishchenko A.E., Cherkasov A.N. [Orientational order in polymer surface layers]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Advances in the physical sciences], 1997, vol. 167, no. 3, pp. 269–285. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199703b.0269 (In Russ.).
5. Merkulov V.S. [Generalized ellipsometry of anisotropic media]. *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2007, vol. 103, no. 4, pp. 646–648. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9551798> (In Russ.).
6. Ishchenko E.F., Sokolov A.L. *Polyarizatsionnaya optika. 3-e izdanie* [Polarization optics. 3rd edition]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019. 571 p. (In Russ.).
7. Zapasskii V.S. [Polarimetry of regular and stochastic signals in magneto-optics]. *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2019, vol. 61, no. 5, pp. 946–951. DOI: 10.21883/FTT.2019.05.47599.01F (In Russ.).
8. Fofanov Ya.A. Threshold sensitivity in optical measurements with phase modulation. *The Report of tenth Union Symposium and School on High-Resolution Molecular Spectroscopy - Proc. SPIE*, 1992, vol. 1811, pp. 413–414. DOI: 10.1117/12.131190
9. Klyshko D.N., Masalov A.V. [Photon noise: observation, squeezing, interpretation]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Advances in the physical sciences], 1995, vol. 165, no. 11, pp. 1249–1278. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199511b.1249 (In Russ.).
10. Sokolov I.M., Fofanov Ya.A. Investigations of the small birefringence of transparent objects by strong phase modulation of probing laser radiation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, vol. 12, no 7, pp. 1579–1588. DOI: 10.1364/JOSAA.12.001579
11. Fofanov Ya.A. Quantum and high-sensitive laser technologies for polarization-optical diagnostics. *EPJ Web of Conferences*, 2019, vol. 220, Id. 01004. DOI: 10.1051/epjconf/201922001004
12. Fofanov Ya.A. Ch. 4. Nonlinear and fluctuation phenomena under conditions of strong selective reflection in inclined geometry. Oswald M.R., eds. *Advances in Optoelectronics Research*. New York, Nova Science Publishers, 2014. pp. 75–114.
13. Fofanov Ya.A., Pleshakov I.V., Kuz'min Yu.I. [Laser polarization-optical detection of the magnetization process of a magnetically ordered crystal]. *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2013, vol. 80, no. 1, pp. 88–93. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23285816> (In Russ.).
14. Acher O., Bigan E., Drevillon B. Improvements of phase-modulated ellipsometry. *Rev. Sci. Instrum.*, 1989, vol. 60, no. 1, pp. 65–77. DOI: 10.1063/1.1140580
15. Gupta V.K., Kornfield J.A., Ferencz A., Wegner G. Controlling molecular order in "Hairy-rod" Langmuir-Blodgett films: A polarization-modulation microscopy study. *Science*, 1994, vol. 265, iss. 5174, pp. 940–942. DOI: 10.1126/science.265.5174.940
16. Shindo Y., Kani K., Horinaka J., Kuroda R., Harada T. The application of polarization modulation method to investigate the optical homogeneity of polymer films. *J. Plast. Film Sheeting*, 2001, vol. 17, no. 2, pp. 164–183. DOI: 10.1106/1VGU-5D4Y-2KON-RBQF
17. Fofanov Ya.A., Pleshakov I.V., Prokofiev A.V. [Study of polarization magneto-optical responses of poorly concentrated ferrofluid]. *Pis'ma v ZHTF* [Technical Physics Letters], 2016, vol. 42, no. 20, pp. 66–72. (In Russ.).
18. Fofanov Ya.A., Sokolov I.M., Kaiser R., Guerin W. Subradiance in dilute atomic ensembles excited by nonresonant radiation. *Phys. Rev. A*, 2021, vol. 104, iss. 2, Id. 023705. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.023705
19. Davis H.W., Llewellyn J.P. Magnetic birefringence of ferrofluids: I. Estimation of particle size. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1979, vol. 12, no. 2, pp. 311–319. DOI: 10.1088/0022-3727/12/2/018
20. Scherer C., Figueiredo Neto A.M. Ferrofluids: Properties and applications. *Braz. J. Phys.*, 2005, vol. 35, no. 3A, pp. 718–727. DOI: 10.1590/S0103-97332005000400018
21. Zhao Y., Lv R., Zhang Y., Wang Q. Novel optical devices based on the transmission properties of magnetic fluid and their characteristics. *Opt. Lasers Eng.*, 2012, vol. 50, no. 9, pp. 1177–1184. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2012.03.012
22. Philip J., Laskar J.M. Optical Properties and Applications of Ferrofluids – A Review. *Journal of Nanofluids*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 3–20. DOI: 10.1166/jon.2012.1002
23. Bitar A., Kaewsaneha C., Eissa M., Jamshaid T., Tangboonrat P., Polpanich D., Elaissari A. Ferrofluids: from preparation to biomedical applications. *Journal of Colloid Science and Biotechnology*, 2014, vol. 3, no. 1, pp. 3–18. DOI: 10.1166/jcsb.2014.1080
24. Agruzov P.M., Pleshakov I.V., Bibik E.E., Shamray A.V. Magneto-optic effects in silica core microstructured fibers with a ferrofluidic cladding. *Applied Physics Letters*, 2014, vol. 104, no. 7, Id. 071108. DOI: 10.1063/1.4866165
25. Zakinyan A.R., Dikansky Yu.I. Effect of microdrops deformation on electrical and rheological properties of magnetic fluid emulsion. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2017, vol. 431, pp. 103–106. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.09.057
26. Fofanov Ya.A., Manoilov V.V., Zarutskiy I.V., Kuraptsev A.S. [Statistical analysis of the data of highly sensitive laser polarization-optical probing of magnetic nanofluids]. *Opticheskii zhurnal* [Journal of optical technology], 2020, vol. 87, no. 2, pp. 36–43. DOI: 10.17586/1023-5086-2020-87-02-36-43 (In Russ.).
27. Skibin Y.N., Chekanov V.V., Raikher Yu.L. [Birefringence in a ferromagnetic liquid]. *ZHEHTF* [Soviet Physics – JETP], 1977, vol. 72, no. 3, pp. 949–955. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19083100> (In Russ.).

28. Scholten P.C. The origin of magnetic birefringence and dichroism in magnetic field. *IEEE Trans. Magn.*, 1980, vol. 16, no. 2, pp. 221–225. DOI: 10.1109/TMAG.1980.1060595
29. Coleman T.F., Li Y. An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 1996, vol. 6, no. 2, pp. 418–445. DOI: 10.1137/0806023
30. Coleman T.F., Li Y. On the convergence of reflective Newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming*, 1994, vol. 67, no. 2, pp. 189–224. DOI: 10.1007/BF01582221
31. Dennis J.E. Nonlinear least-squares. Jacobs D., eds. *State of the art in numerical analysis*. Academic Press, 1977, pp. 269–312.
32. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least-squares. *Quarterly Applied Mathematics*, 1944, vol. 2, iss. 2, pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666
33. Marquardt D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030
34. Moré J.J. The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory. Watson G.A., eds. *Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 630, Springer Verlag, 1977, pp. 105–116. DOI: 10.1007/BFb0067700
35. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, 1970. (Russ. ed.: Ortega Dzh., Reinboldt Ver. *Iteratsionnye metody resheniya nelineinykh uravnenii so mnogimi neizvestnymi*. Translate by Eh.V. Vershkov, N.P. Zhidkov, I.V. Konoval'tsev, eds. I.V. Konoval'tsev. Moscow: Mir Publ., 1975. 560 p.). (In Russ.).
36. Fofanov Ya.A., Manoilov V.V., Zarutskiy I.V., Kuraptsev A.S. [Laser polarization-optical diagnostics of ordered objects and structures]. *Izvestiya RAN. Ser. Fizicheskaya* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 2020, vol. 84, no. 3, pp. 341–344. DOI: 10.31857/S0367676520030114 (In Russ.).
37. Fofanov Ya.A., Manoilov V.V., Zarutskiy I.V., Bardin B.V. [On the similarity of the polarization-optical responses of magnetic nanofluids. Part I]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 1, pp. 45–52. Part II. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 54–62. (In Russ.).
38. Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Fofanov Ya.A. Coherent specular reflection of resonant light from a dense ensemble of motionless point-like scatters in a slab geometry. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 41, Id. 1660141. DOI: 10.1142/S2010194516601411
39. Larionov N.V., Sokolov I.M., Fofanov Y.A. [Features of the angular distribution of light scattered by a cold atomic ensemble placed in a static electric field]. *Izvestiya RAN. Seriya fiz* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 2019, vol. 83, no. 3, pp. 306–310. DOI: 10.1134/S0367676519030116 (In Russ.).
40. Hau L.V. Optical information processing in Bose–Einstein condensates. *Nature Photon*, 2008, vol. 2, pp. 451–453. DOI: 10.1038/nphoton.2008.140
41. Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A. *The physics of quantum information*. Berlin, Springer, Heidelberg, 2010. 293 p.
42. Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R., et al. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level. *Nature*, 2014, vol. 506, pp. 71–75. DOI: 10.1038/nature12941
43. Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 1945, vol. 67, pp. 107–119. DOI: 10.1103/PhysRev.67.107
44. Lax M. Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, 1951, vol. 23, iss. 4, pp. 287–310. DOI: 10.1103/RevModPhys.23.287
45. Sokolov I.M., Kupriyanov D.V., Havey M.D. [Microscopic theory of scattering of weak electromagnetic radiation by a dense ensemble of ultracold atoms]. *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2011, vol. 139, no. 2, pp. 288–304. (In Russ.).
46. Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Havey M.D. Angular distribution of single photon superradiance in a dilute and cold atomic ensemble. *Phys. Rev. A*, 2017, vol. 96, iss. 2, Id. 023830. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023830
47. van Rossum M.C.W., Nieuwenhuizen Th.M. Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy, and diffusion. *Rev. Mod. Phys.*, 1999, vol. 71, iss. 1, pp. 313–371. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.313
48. Bozhokin S.V., Sokolov I.M. [Comparison of the wavelet and Gabor transforms in the spectral analysis of nonstationary signals]. *ZHTF* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 12, pp. 1771–1778. (In Russ.).

Contacts: *Manovlov Vladimir Vladimirovich*,
manoilov_vv@mail.ru

Article received by the editorial office on 27.06.2023