
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 544. 638+534.1

© С. П. Дмитриев, В. Е. Курочкин, Б. П. Шарфарец, 2021

**ОБ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПРИ УСЛОВИИ
ТОНКОГО ДВОЙНОГО СЛОЯ В ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЕ
ТЕЛА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ**

В приближении тонкого двойного слоя получены простые зависимости акустических полей, возбуждаемых в электрокинетическом электроакустическом преобразователе, от величины скорости осмотического движения Гельмгольца—Смолуховского. Из зависимостей следует, что в отсутствие потерь, когда еще не сказывается нелинейность уравнения движения жидкости и отсутствует турбулентный режим движения жидкости, в теле преобразователя величины амплитуд акустической скорости и давления линейно зависят от величины скорости Гельмгольца—Смолуховского электроосмотического движения.

Кл. сл.: электроакустическое преобразование, электрокинетические явления, уравнение Навье—Стокса, нелинейный режим течения жидкости, накачка энергии

ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работах [1–6] рассмотрено электроакустическое преобразование, основанное на таком электрокинетическом явлении (ЭЯ), как электроосмос. Основное отличие от предлагавшихся ранее подобных преобразований (см., например, работу [7], в которой подобные преобразователи названы электрокинетическими преобразователями (ЭКП)) состоит в использовании режима накачки энергии акустических колебаний за счет энергии дополнительно приложенного постоянного электрического поля. По-видимому, впервые в преобразователях, основанных на ЭЯ, схема накачки энергии акустических колебаний постоянным электрическим полем была предложена в патенте [8].

В работах [2–6] рассматривалась математическая модель электроакустического преобразования для произвольной толщины двойного электрического слоя (ДС) внутри пористого тела электрокинетического преобразователя (ЭКП). В настоящей работе в предположении тонкого ДС осуществляется упрощение соответствующей математической модели, что приводит к более прозрачной физической интерпретации конечных результатов.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Целью работы является с помощью допущения о малости толщины ДС в пористой структуре электроакустического преобразователя упростить

математическую модель преобразования для придания итоговым выражениям большей физической прозрачности причинно-следственных связей между основными параметрами преобразования.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Далее коротко воспроизведем выражения для математической модели электроакустического преобразования, приведенные в работах [2–6]. Для простоты принимаем, что пористое тело преобразователя моделируется наполненным жидкостью цилиндрическим капилляром. Как и в [1–6], принимаем, что в капилляре имеет место течение вязкой сжимаемой однородной жидкости. К торцам капилляра, наполненного жидкостью, одновременно прикладываются постоянное электрическое поле E_0 и переменное электрическое поле E . Движение жидкости подчиняется уравнению сохранения импульса Навье—Стокса

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\Sigma}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\Sigma} \right) = \\ = -\nabla p_{\Sigma} + \eta \Delta \mathbf{v}_{\Sigma} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}_{\Sigma} + \rho_{el} \mathbf{E}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь $E_0 = \text{const}$ — вектор напряженности внешнего электрического поля, направленный вдоль оси капилляра; E — вектор напряженности переменного электрического поля, коллинеарный век-

тору $\mathbf{E}_0$; η и ζ — соответственно динамическая и объемная вязкости жидкости; $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $p_\Sigma = p_0 + p$ — соответственно поля плотности, скорости и давления в жидкости, где индекс 0 соответствует стационарному движению жидкости под воздействием объемной силы $\rho_{el}\mathbf{E}_0$ (электроосмотический процесс), переменные поля без индекса соответствуют нестационарному (акустическому) движению жидкости; ρ_{el} — объемная плотность электрического заряда, не равная нулю вследствие наличия ДС.

Подставим в (1) значения суммарных полей. Далее примем, что течение в электроосмотическом процессе ламинарное. Тогда уравнение (1) применительно к стационарному электроосмотическому процессу в жидкости внутри капилляра с учетом условия $\nabla p_0 = 0$ имеет вид (см., например, [4, выражение (19)])

$$\rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

Акустический процесс в капилляре описывается в терминах сжимаемой жидкости в линеаризованном виде, и уравнение сохранения импульса для него получается подстановкой разложений $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $p_\Sigma = p_0 + p$ в (1) и вычитанием из него (2):

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (3)$$

К уравнению движения (3) следует добавить стандартное линеаризованное уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) является линейным относительно акустических полей $\mathbf{V}$ и p , которые образуются за счет наличия объемной $\rho_{el}\mathbf{E}$ силы и, как будет видно ниже, также за счет процесса накачки, возникающего из-за приложения постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0$.

Для упрощения уравнения движения жидкости (3) примем допущение о малой толщине двойного слоя на границе раздела жидкости и внутренней поверхности капилляра, что определяется неравенством $\kappa a \ll 1$, где a — радиус капилляра, $\kappa = 1/\lambda$, λ — длина Дебая (см., например, [1]). В этом случае скорость электроосмотического движения жидкости практически во всем сечении

капилляра равна скорости осмотического движения Гельмгольца—Смолуховского U_{eo} [9, с. 10] (здесь, в отличие от [9], запись в системе СИ):

$$U_{eo} = E_0 \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\eta} \tilde{\zeta} = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\zeta}$ — электрокинетический потенциал (см. [9]), ε — диэлектрическая проницаемость, ε_0 — электрическая постоянная. Таким образом, имеем в декартовой и цилиндрической системах координат $\mathbf{v}_0 = (0, 0, U_{eo})$, что приводит к выражению (см., например, [10, с. 68, 83]) $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}$ или окончательно с учетом (5)

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} = E_0 \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\eta} \tilde{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}.$$

Перепишем (3) с учетом последнего равенства, а также очевидного равенства $\nabla \mathbf{v}_0 \equiv 0$:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}. \quad (6)$$

Полагая процесс потенциальным $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, так же как в [4], приведем последнее уравнение к скалярному виду¹

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Преобразуем уравнение (7) по аналогии с работой [4]. Из уравнения непрерывности (4) и условия баротропности жидкости получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}, \text{ где } c \text{ — скорость звука, или через}$$

скалярный потенциал $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \Delta \Phi$. В гармоническом случае с временн.м фактором $e^{-i\omega t}$, сохраняя те же обозначения для амплитуд, для амплитуды давления p получаем $p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi$. После этого (7) в случае гармонического процесса приводится к виду

$$-\rho_0 i \omega \Phi = -\frac{\rho_0 c^2}{i \omega} \Delta \Phi + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \Phi,$$

или в виде неоднородного уравнения Гельмгольца

¹ Отметим, что в случае цилиндрической системы координат, в которой ось Oz совпадает с осью системы координат, справедлива коммутация операторов [14, с. 84]: $\frac{\partial}{\partial z} \nabla = \nabla \frac{\partial}{\partial z}$.

$$\Delta\Phi + \frac{i\rho_0\omega}{\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}}\Phi =$$

$$= \frac{\rho_0}{\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}} U_{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \quad (8)$$

Вводя обозначение для квадрата волнового числа

$$k^2 = \frac{i\rho_0\omega}{\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}} =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\rho_0}{\left(\rho_0 - \frac{i\omega}{c^2} \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\right)},$$

или $k = \frac{\omega}{c} \left/ \left(1 - i\omega \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) / \rho_0 c^2\right)\right|^{1/2}$, приводим (8) к виду

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{k^2}{i\omega} U_{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой неоднородное уравнение Гельмгольца относительно скалярного потенциала Φ скорости $\mathbf{v}$ с той особенностью, что в правую часть уравнения (9) входит производная искомой величины $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$. Видно, что решение уравнения (9) линейно зависит от электроосмотической скорости U_{∞} . Подобные уравнения возникали ранее, в частности в [4], где отмечалось, что решение таких уравнений сводится к линейному интегральному уравнению с ядром, представляющим собой функцию Грина соответствующего уравнения Гельмгольца. В [4] приведены качественные рассуждения для уравнения типа (9), из которых следует, что с ростом величины электроосмотической скорости U_{∞} должна расти величина амплитуды Φ , а следовательно, и величины амплитуд $\mathbf{v}$ и p , т.к. имеют место зависимости $\mathbf{v} = \nabla\Phi$, $p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta\Phi$. Поскольку уравнение (9) линейно, то в рамках справедливости линейной модели (9) все эти величины будут *линейно зависеть* от электроосмотической скорости U_{∞} . Т.е. при линейном характере роста распределения амплитуды давления $p = p(z, U_{\infty})$ от элек-

троосмотической скорости U_{∞} будет линейно расти и градиент давления $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p(z, U_{\infty})}{\partial z}$. Интегрирование последнего выражения по координате z показывает, что с ростом скорости электроосмотического течения модуль потенциала течения будет также расти.

Таким образом, в рамках справедливости линейной модели, описываемой уравнением (9), при росте электроосмотической скорости U_{∞} линейно растет величина амплитуд акустической скорости $\mathbf{v}$ и давления p .

Все отмеченное выше справедливо в случае ламинарного движения жидкости в капилляре (пористой среде), в противном случае в пористой среде в режиме накачки возникают пульсационные паразитные колебания, искажающие характеристики исходного принимаемого акустического поля (см. работу [5], посвященную работе электроакустического преобразователя в турбулентном режиме течения жидкости в пористом пространстве преобразователя). В результате этого возникает паразитная составляющая потенциала течения, искажающая адекватность акустоэлектрического преобразования. В этом легко убедиться, приняв, что переменное электрическое поле $\mathbf{E}$ равно нулю, а в пористой структуре преобразователя вместо него присутствуют только пульсационные составляющие акустического поля, вызванные режимом накачки. Тогда преобразователь зафиксирует только паразитные пульсационные электрические колебания.

ВЫВОДЫ

В работе в приближении тонкого ДС получены простые зависимости акустических полей, возбуждаемых в электрокинетическом электроакустическом преобразователе от величины скорости осмотического движения Гельмгольца—Смолуховского U_{∞} . Из них следует, что в отсутствие потерь, когда еще не сказывается нелинейность модели (2) и отсутствует турбулентный режим движения жидкости в капилляре, величины амплитуд акустических параметров — скорости $\mathbf{v}$ и давления p — линейно зависят от величины U_{∞} скорости осмотического движения Гельмгольца—Смолуховского.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 0074-2021-0013 Министерства науки и высшего образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электроакустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Часть I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35.
URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst2.php#abst4>
2. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электроакустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Часть II. Акустический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 36–44.
URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst2.php#abst5>
3. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Доклады Академии Наук. 2018. Т. 483, № 3. С. 265–268.
4. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Гуляев Ю.В.* О методе электроакустического преобразования, основанном на электрокинетических явлениях // Акуст. журн. 2020. Т. 66, № 4. С. 453–462.
5. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А.* О работе электроакустического преобразователя, основанного на электрокинетических явлениях, при турбулентном режиме движения жидкости // Акуст. журн. 2020. Т. 66, № 5. С. 575–580.
6. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Дмитриев С.П., Телятник С.Г.* Об электроакустическом преобразователе, основанном на использовании электрокинетических явлений // Труды всероссийской акустической конференции. СПб.: Политехпресс, 2020. С. 445–450.
7. *Касимзаде М.С., Халилов Р.Ф., Балашов А.Н.* Электрокинетические преобразователи информации. М.: Энергия, 1973. 136 с.
8. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. United States Patent # US 8,085,957, B2, Dec. 27, 2011.
9. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1986. 332 с.
10. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ. 2017. 252 с.

ООО "Биопродукт", Москва (Дмитриев С.П.)

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.)

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 17.02.2021

ON THE IMPROVEMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE ELECTROACOUSTIC TRANSDUCER UNDER THE CONDITION OF A THIN DOUBLE LAYER IN THE POROUS STRUCTURE OF THE TRANSDUCER BODY

S. P. Dmitriev¹, V. E. Kurochkin², B. P. Sharfarets²

¹*Bioproduct Ltd, Moscow, Russia*

²*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

In the approximation of a thin double layer, simple dependences of the acoustic fields excited in an electrokinetic electroacoustic transducer on the velocity of the Helmholtz—Smolukhovsky osmotic movement are obtained. From the dependencies it follows that in the absence of losses, when the nonlinearity of the fluid motion equation does not yet affect and there is no turbulent mode of fluid motion in the transducer body, the magnitudes of the amplitudes of the acoustic velocity and pressure linearly depend on the magnitude of the Helmholtz—Smolukhovsky electroosmotic motion velocity.

Keywords: electro-acoustic conversion, electrokinetic phenomena, Navier—Stokes equation, non-linear regime of fluid flow, energy pumping

INTRODUCTION

Earlier in the works [1–6] electroacoustic transformation based on such an electrokinetic phenomenon (EP) as electroosmosis was considered. The main difference from previously proposed similar conversions (see, for example, work [7], in which such transducers are called electrokinetic transducers (EKT)), is the use of the pumping mode of the energy of acoustic vibrations due to the energy of an additionally applied constant electric field. Apparently, for the first time in transducers based on EP, a scheme for pumping the energy of acoustic vibrations with a constant electric field was proposed in the patent [8].

In [2–6], a mathematical model of electroacoustic transformation was considered for an arbitrary thickness of an electric double layer (DL) inside a porous body of an electrokinetic transducer (EKT). In this work, under the assumption of a thin DS, the corresponding mathematical model is simplified, which leads to a more transparent physical interpretation of the final results.

FORMULATION OF THE PROBLEM

The aim of the work is to simplify the mathematical model of the conversion under assumption of the smallness of the DS thickness in the porous structure of the electroacoustic transducer in order to give a greater physical transparency of the cause-and-effect relationships between the main transformation parameters to the final expressions.

THE SOLUTION OF THE PROBLEM

Next, we will briefly reproduce the expressions for the mathematical model of electroacoustic conversion given in [2–6]. For simplicity, we assume that the porous body of the transducer is modeled with a cylindrical capillary filled with liquid. As in [1–6], we assume that a viscous compressible homogeneous fluid flows in the capillary. A constant electric field $\mathbf{E}_0$ and an alternating electric field $\mathbf{E}$ are simultaneously applied to the ends of a capillary filled with liquid. The liquid flow follows the Navier—Stokes momentum conservation equation

$$\rho_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\Sigma}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\Sigma} \right) = -\nabla p_{\Sigma} + \eta \Delta \mathbf{v}_{\Sigma} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}_{\Sigma} + \rho_{el} \mathbf{E}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (1)$$

Here $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ is the vector of the strength of the external electric field directed along the axis of the capillary; $\mathbf{E}$ is the vector of the intensity of the alternating electric field, collinear to the vector $\mathbf{E}_0$; η and ζ — respectively dynamic and the bulk viscosity of the liquid; $\rho_{\Sigma} = \rho_0 + \rho$, — respectively the density, velocity and pressure fields in the liquid, where the index 0 corresponds to the stationary flow of the liquid under the influence of the volume force $\rho_{el} \mathbf{E}_0$ (electroosmotic process), the variable fields without the index correspond to the unsteady (acoustic) motion of the liquid; ρ_{el} — the volumetric density

of the electric charge, which is not equal to zero due to the presence of DL.

Substitute the values of the total fields in (1). Further, we will assume that the flow in the electroosmotic process is laminar. Then equation (1), as applied to a stationary electroosmotic process in a liquid inside a capillary, taking into account the condition $\nabla p_0 = 0$, has the form (see, for example, [4, expression (19)])

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

The acoustic process in a capillary is described in terms of a compressible fluid in linearized form, and the momentum conservation equation for it is obtained by substituting expansions $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $p_\Sigma = p_0 + p$ in (1) and subtracting (2) from it:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = \\ = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3)$$

The equation of motion (3) should be supplemented with the standard linearized equation of continuity for a compressible fluid

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Equation (3) is linear with respect to the acoustic fields $\mathbf{V}$ and p , which are formed due to the presence of the volume force $\rho_{el} \mathbf{E}$ and, as will be seen below, also due to the pumping process arising due to the application of a constant electric field $\mathbf{E}_0$.

To simplify the equation of fluid motion (3), let us assume a small thickness of the double layer at the interface between the liquid and the inner surface of the capillary, which is determined by the inequality $\kappa a \ll 1$, where a is the capillary radius $\kappa = 1/\lambda$, λ is the Debye length (see, for example, [1]).

In this case, the velocity of electroosmotic flow of the liquid in almost the entire cross section of the capillary is equal to the velocity of the osmotic motion of Helmholtz-Smoluchowski [9, p. 10] (here, in contrast to [9], notation in the SI system):

$$U_{eo} = E_0 \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\eta} \tilde{\zeta} = \text{const}. \quad (5)$$

Here $\tilde{\zeta}$ is the electrokinetic potential (see [9]), ε is the dielectric constant, ε_0 is the electrical constant. Thus, we have $\mathbf{v}_0 = (0, 0, U_{eo})$ in the Cartesian and cylindrical coordinate systems, which leads to the expression (see, for example, [10, pp. 68, 83])

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \text{ or finally, taking into account (5)}$$

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} = E_0 \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\eta} \tilde{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}.$$

Let us rewrite (3) taking into account the last equality, as well as the obvious equality $\nabla \mathbf{v}_0 \equiv 0$:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}. \quad (6)$$

Assuming the process to be potential $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, as in [4], we reduce the last equation to scalar form¹

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Let us transform equation (7) by analogy with work [4]. From the continuity equation (4) and the liquid barotropy condition, we obtain

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}, \text{ where } c \text{ is the speed of sound, or}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \Delta \Phi \text{ through the scalar potential. In}$$

the harmonic case with the time factor $e^{-i\omega t}$, keeping the same notations for the amplitudes, we obtain

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi \text{ for the pressure amplitude } p. \text{ After that,}$$

in the case of a harmonic process, (7) is reduced to form

$$-\rho_0 i\omega \Phi = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_0 U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \Phi,$$

or to the form of the inhomogeneous Helmholtz equation

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + \frac{i\rho_0 \omega}{\left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}} \Phi = \\ = \frac{\rho_0}{\left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}} U_{eo} \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \end{aligned} \quad (8)$$

Introducing the notation for the square of the wave number

¹ Note, that in the case of a cylindrical coordinate system, in which the axis Oz coincides with the axis of the coordinate system, commutative operation is appropriate [14, c. 84]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla = \nabla \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$k^2 = \frac{i\rho_0\omega}{\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\rho_0}{\left(\rho_0 - \frac{i\omega}{c^2} \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\right)},$$

$$\text{or } k = \frac{\omega}{c} \left/ \left(1 - i\omega \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) / \rho_0 c^2\right)^{1/2} \right.,$$

reduction (8) is to be made to the form

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{k^2}{i\omega} U_{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \quad (9)$$

Equation (9) is an inhomogeneous Helmholtz equation with respect to the scalar velocity $\mathbf{v}$ potential Φ with the singularity that the derivative of the sought-for value $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ enters the right-hand side of equation (9). It can be seen that the solution of equation (9) linearly depends on the electroosmotic velocity U_{∞} . Similar equations appeared earlier, in particular in [4], where it was noted that the solution of such equations is reduced to a linear integral equation with a kernel representing the Green's function of the corresponding Helmholtz equation. In [4], qualitative reasoning is given for an equation of the type (9), from which it follows that the magnitude of the amplitude Φ and, consequently, the magnitudes of the amplitudes $\mathbf{v}$ and p should increase with an increase in the magnitude of the electroosmotic velocity U_{∞} , since there are dependencies $\mathbf{v} = \nabla\Phi$, $p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta\Phi$.

Since equation (9) is linear, then, within the framework of the validity of the linear model (9), all these magnitudes will *linearly depend* on the electroosmotic velocity U_{∞} . So, the pressure gradient $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p(z, U_{\infty})}{\partial z}$ will grow linearly in terms of linear nature of the growth of the distribution of the pressure amplitude $p = p(z, U_{\infty})$ in regard to the electroosmotic velocity U_{∞} . Integration of the last expression over the z coordinate shows that with an increase in the velocity of the electroosmotic flow, the modulus of the flow potential will also increase.

Thus, within the framework of the validity of the linear model described by equation (9), with an increase in the electroosmotic velocity U_{∞} , the magnitude of the amplitudes of the acoustic velocity $\mathbf{v}$ and pressure p increases linearly.

All of the above is true in the case of laminar fluid flow in a capillary (porous medium); otherwise, in a porous medium, pulsating parasitic oscillations arise in the pumping mode. These oscillations distort the characteristics of the initial received acoustic field (see [5], devoted to the operation of an electroacoustic transducer in a turbulent mode of fluid flow in the porous space of the transducer). As a result, a parasitic component of the flow potential arises, which distorts the adequacy of the acoustoelectric conversion. It is easy to verify this by assuming that the alternating electric field $\mathbf{E}$ is equal to zero, and in the porous structure of the transducer, instead of it, there are only pulsating components of the acoustic field caused by the pumping mode. Then the transducer will record only parasitic pulsating electrical oscillations.

CONCLUSIONS

In this work, in terms of the approximation of a thin DL, simple dependences of acoustic fields excited in an electrokinetic electroacoustic transducer on the velocity of the Helmholtz—Smoluchowski osmotic motion were obtained. It follows from them that in the absence of losses, when the nonlinearity of model (2) does not yet affect and there is no turbulent regime of fluid flow in a capillary, the amplitudes of the acoustic parameters — the velocity $\mathbf{v}$ and pressure p linearly depend on the magnitude of the velocity of the Helmholtz—Smoluchowski osmotic flow.

The work was carried out at the Institute for Analytical Instrumentation of RAS within the framework of State Assignment 075-00780-20-00 on topic No. 0074-2021-0013 of the Ministry of Science and Higher Education.

REFERENCES

1. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. Theory based on electrokinetic phenomena. Part I. Hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priboroostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. DOI: 10.18358/np-28-2-i2535 (In Russ.).
2. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. Theory based on electrokinetic phenomena. Part II. Acoustic aspect]. *Nauchnoe Priboroostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 36–44. DOI: 10.18358/np-28-2-i3644 (In Russ.).
3. Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Sharfarets B.P., Gulyaev Yu.V. [Theoretical justification of the new electroacoustic conversion method. Linear approximation]. *Doklady Akademii Nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences], 2018, vol. 483, no. 3, pp. 265–268. (In Russ.).
4. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Gulyaev Yu.V. [Theoretical justification of the new electroacoustic conversion method. Linear approximation]. *Doklady Akademii Nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences], 2018, vol. 483, no. 3, pp. 265–268. (In Russ.).

- yaev Yu.V. [On electroacoustic transformation method based on electrokinetic phenomena]. *Akust. zhurn.* [Acoustical Physics], 2020, vol. 66, no. 4, pp. 453–462. (In Russ.).
5. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A. [On operation of electroacoustic transducer based on electrokinetic phenomena in turbulent fluid movement mode]. *Akust. zhurn.* [Acoustical Physics], 2020, vol. 66, no. 5, pp. 575–580. (In Russ.).
6. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Dmitriev S.P., Telyatnik S.G. [About electroacoustic transducer based on the use of electrokinetic phenomena]. *Trudy vserossiyskoy akusticheskoy konferenzii* [Works of the All-Russian Acoustic Conference], SPb., Politechpress Publ., 2020, pp. 445–450. (In Russ.).
7. Kasimzade M.S., Chalilov R.F., Balashov A.N. *Elektrokineticheskie preobrazovateli informazii* [Electrokinetic Data Converters]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 136 p. (In Russ.).
8. Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V. *Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer*. United States Patent # US 8,085,957,B2, Dec. 27, 2011.
9. Duchin S.S., Deryagin B.V. *Elektroforez* [Electrophoresis]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 332 p. (In Russ.).
10. Guz' A.N. *Vvedenie v dinamiku szhimaemoy vyazkoy zhidkosti* [Introduction to compressible viscous fluid dynamics]. Saarbrücken, LAP Lambert Acad. Publ., 2017. 252 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received by the editorial office on 17.02.2021