

УДК 537.213, 537.612, 517.5

© А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьёв,
А. Г. Кузьмин, С. В. Масюкевич, Ю. А. Титов, Ю. К. Голиков, 2019ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ БАЗИС ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ
С НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ОДНОРОДНОСТИ

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами. Известно, что скалярные потенциалы подобных полей представляют собой трехмерные скалярные гармонические функции, однородные по Эйлеру, с заданной степенью однородности. Вопрос о параметризации трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности исчерпывающим образом решается с помощью формул Донкина для однородных гармонических функций со степенями однородности 0 и -1 , теоремы о дифференцировании трехмерных однородных гармонических функций и формулы Томсона для однородных гармонических функций. Однако число аналитических формул, которые можно использовать для описания трехмерных скалярных гармонических функций при нецелочисленных степенях однородности, к сожалению, в настоящий момент не слишком велико, а вопрос об исчерпывающем описании таких функций весьма далек от своего окончательного решения. В то же время использование трехмерных однородных гармонических потенциалов с нецелочисленными степенями однородности значительно расширяет инструментарий разработчиков электронно- и ионно-оптических систем. Целью данной работы является построение гипергеометрического базиса, составленного из базовых однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности, с помощью которого любую трехмерную однородную гармоническую функцию, не имеющую сингулярных точек за исключением луча $x = y = 0, z \leq 0$, можно представить в виде бесконечного ряда наподобие ряда Фурье. Полученный результат, по-видимому, отчасти решает проблему исчерпывающего описания трехмерных скалярных однородных гармонических функций при нецелочисленных степенях однородности.

Кл. сл.: электрические поля; гармонические функции; функции, однородные по Эйлеру; принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц; формула Донкина; аналитические решения уравнения Лапласа

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введение в проблему*

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида являются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [2–7]. Для полей, однородных по Эйлеру, напряженность электрического поля **E** и/или индукция магнитного поля **B** должны удовлетворять не только уравнениям Максвелла для электромагнитного поля, но и тождеству однородности:

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 0: \mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &\equiv \lambda^{m-1} \mathbf{E}(x, y, z), \\ \forall \lambda > 0: \mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &\equiv \lambda^{m-1} \mathbf{B}(x, y, z),\end{aligned}\quad (1)$$

где m — степень однородности поля (не обязательно целочисленная). Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [8, 9]. Отсюда следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц, если эти устройства используют однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля [2–6, 10–18].

Однородные по Эйлеру электрические или магнитные поля, подчиняющиеся тождеству (1), характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом в виде гармонической функции, которая будет однородной (точнее, положительно однородной) по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [19, 20]:

$$\forall \lambda > 0: U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^m U(x, y, z), \quad (2)$$

* Этот подраздел вставлен авторами статьи для полноты изложения, хотя он почти полностью воспроизводит раздел "Базовые определения" статьи [1] этого же авторского коллектива. (Ред.)

где m — степень однородности функции, совпадающая со степенью однородности электрического или магнитного поля, как она определена с помощью тождеств (1). Единственным исключением из данного общего правила являются поля с нулевой степенью однородности — для таких полей скалярный потенциал U в самом общем случае имеет вид:

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) + A \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad (3)$$

где U_0 является однородной гармонической функцией нулевой степени, а A — произвольная константа. Очевидно, что при $A \neq 0$ выражение (3) больше не является однородной по Эйлера функцией, хотя градиент функции (3) и подчиняется условиям однородности (1) для электрического либо магнитного поля. Вопрос об однородности скалярных и/или векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлера, подробно исследуется в [21].

Исследования Ю.К. Голикова [4, 22, 23] наглядно демонстрируют, каким удобным и эффективным инструментом при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем являются аналитические методы и, в частности, аналитические выражения для потенциалов электрических и магнитных полей. В случае однородных электрических и магнитных полей при получении аналитических выражений для их скалярных потенциалов требуется предпринимать дополнительные и целенаправленные усилия, поскольку таких функций в некотором смысле "много меньше", чем обычных гармонических функций.

Действительно, трехмерная гармоническая функция общего вида $U(x, y, z)$ полностью определяется двумя произвольными функциями двух переменных — например, значением $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$ и значением $U^{(0,n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0) / \partial z$ нормальной производной функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$. Это следует из того факта, что решение такой задачи Коши для трехмерного уравнения Лапласа однозначным образом находится (по крайней мере, в окрестности плоскости $z = 0$) с помощью ряда Шерцера по переменной z :

$$U(x, y, z) = U^{(0)}(x, y) + zU^{(0,n)}(x, y) - \frac{z^2}{2!} (U_{xx}^{(0)}(x, y) + U_{yy}^{(0)}(x, y)) -$$

$$- \frac{z^3}{3!} (U_{xx}^{(0,n)}(x, y) + U_{yy}^{(0,n)}(x, y)) + \frac{z^4}{4!} (U_{xxxx}^{(0)}(x, y) + 2U_{xxyy}^{(0)}(x, y) + U_{yyyy}^{(0)}(x, y)) + \frac{z^5}{5!} (U_{xxxx}^{(0,n)}(x, y) + 2U_{xxyy}^{(0,n)}(x, y) + U_{yyyy}^{(0,n)}(x, y)) - \dots, \quad (4)$$

где коэффициенты перед степенями переменной z выражаются однозначным образом через функции $U^{(0)}$, $U^{(0,n)}$ и их частные производные, поскольку функция U обязана удовлетворять уравнению Лапласа.

Для получения трехмерной *однородной* гармонической функции степени m необходимо и достаточно, чтобы функции $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ и $U^{(0,n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0) / \partial z$ были однородными по Эйлера со степенями однородности m и $(m-1)$ соответственно (достаточность следует из формулы (4) и того факта, что частные производные однородных функций $U^{(0)}(x, y)$ и $U^{(0,n)}(x, y)$ сами являются однородными функциями соответствующей степени [19, 20]). Однако однородная по Эйлера функция двух переменных задается с помощью произвольной функции одного переменного, как это следует из ее представления в виде $f(x, y) = x^k g(y/x)$ [19, 20]. Тем самым трехмерные однородные функции однозначным образом определяются через две произвольные функции всего лишь одного вещественного переменного в отличие от трехмерных гармонических функций общего вида, для однозначного определения которых в соответствии с формулой (4) требуется задать две произвольные функции двух переменных.

Текущее состояние

Для параметризации однородных гармонических функций 0-й степени и степени -1 используются явные формулы Донкина [2, 3, 12, 13, 24–28]:

$$V_0(x, y, z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (5)$$

$$V_{-1}(x, y, z) = \frac{1}{r} H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right) \quad (6)$$

(здесь и далее для упрощения формул используется подстановка $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Эти формулы устанавливают взаимно-однозначное соответствие

между решениями $H(p, q)$ двумерного уравнения Лапласа $H_{pp} + H_{qq} = 0$ и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и -1 (где для упрощения внешнего вида формул нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным). Переход от формулы (5) к формуле (6) и обратно может быть выполнен с помощью формулы Томсона для однородных гармонических функций [29–42]:

$$V_{-m-1}(x, y, z) = r^{-2m-1} V_m(x, y, z), \quad (7)$$

где $V_m(x, y, z)$ и $V_{-m-1}(x, y, z)$ — это трехмерные гармонические функции, однородные по Эйлеру с соответствующими степенями однородности.

Задача вычисления однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности может считаться полностью решенной. С помощью дифференциальных операторов Томсона—Донкина первого порядка [39–42] либо с помощью теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций [24, 27, 57] в комбинации с формулой Томсона для трехмерных гармонических функций [29–42] имеется возможность получать из алгебраических формул Донкина (5), (6) алгебраически-дифференциальные формулы для произвольной целочисленной степени однородности. Эти формулы позволяют выразить трехмерные однородные гармонические функции общего вида через решения двумерного уравнения Лапласа [24–27], причем гарантируется, что ни одна трехмерная однородная функция не будет пропущена. Публикации [25, 26] являются, по всей видимости, первыми, в которых исчерпывающим образом решен вопрос о перечислении всех трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными порядками однородности. Некоторым недостатком указанной процедуры является то, что для целочисленных степеней однородности, отличных от 0 и -1 , несовпадающие друг с другом решения двумерного уравнения Лапласа могут порождать одинаковые трехмерные однородные функции. При этом чем больше модуль степени однородности, тем выше коэффициент повторяемости для трехмерных однородных функций, генерируемых с помощью соответствующих алгебраически-дифференциальных формул.

К сожалению, решение задачи полного и конструктивного перечисления трехмерных однородных функций с нецелочисленными степенями однородности на настоящий момент неизвестно. Некоторые полезные аналитические выражения для гармонических функций, однородных по Эйлеру, которые можно использовать в качестве скаляр-

ных потенциалов, приводятся в [24, 43–49]. Ограниченную практическую применимость имеют интегральные выражения для однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности, которые приводятся в [45, 48, 49]. Однако, если ограничиваться лишь этими частичными аналитическими выражениями, то при оптимизации новых электронно- и ионно-оптических систем есть большой риск пропустить действительно оптимальное решение.

Формулировка задачи

Данная работа посвящена исследованию одного из возможных подходов к решению задачи о полном перечислении однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности. А именно, для разложения в ряд общего вида трехмерных однородных гармонических функций с произвольной степенью однородности будут сконструированы базисы из эталонных однородных гармонических функций, являющихся аналогом тригонометрического ряда Фурье. Как известно, с помощью ряда Фурье любую непрерывную периодическую функцию (возможно, обладающую конечным числом точек разрыва первого рода) можно однозначным образом разложить в ряд по тригонометрическим функциям. Аналогичным образом любую трехмерную однородную гармоническую функцию общего вида, у которой нет дополнительных сингулярных точек кроме, возможно, начала координат и/или лучей $x = y = 0, z \leq 0$ либо $x = y = 0, z \geq 0$, можно разложить в сходящийся ряд по рассматриваемым базисным функциям. Хотя такой подход и нельзя рассматривать как окончательное решение проблемы полного и конструктивного перечисления трехмерных однородных гармонических функций (поскольку при разложении в ряд достаточно простые алгебраические выражения способны превращаться в трудно обозримый бесконечный ряд с весьма сложной структурой), подобного рода базисы могут оказаться полезным инструментом при исследовании трехмерных однородных гармонических функций.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ТРЕХМЕРНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ И ДВУМЕРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Для дальнейших выкладок потребуется взаимно-однозначный переход от трехмерных однородных гармонических функций к двумерным функциям, которые удовлетворяют некоторым вспомогательным двумерным эллиптическим уравнениям. Данная операция представляет определенный

интерес и сама по себе, поэтому рассмотрим этот момент подробнее.

Для трехмерных гармонических функций степени 0 и степени -1 имеются формулы Донкина (5), (6), которые устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями $H(p, q)$ двумерного уравнения Лапласа $H_{pp} + H_{qq} = 0$ и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и -1 . По аналогии любую однородную функцию $U(x, y, z)$ степени m с помощью взаимно-однозначной замены переменных Донкина

$$\begin{cases} p = \frac{x}{z+r}, \\ q = \frac{y}{z+r}, \\ \lambda = r, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2p\lambda}{1+p^2+q^2}, \\ y = \frac{2q\lambda}{1+p^2+q^2}, \\ z = \frac{\lambda(1-p^2-q^2)}{1+p^2+q^2} \end{cases} \quad (8)$$

можно представить в виде

$$U(x, y, z) = r^m H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right) \quad (9)$$

(это представление является слегка модифицированной формой универсального представления $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m h(x_2/x_1, \dots, x_n/x_1)$ для однородных функций степени m [20, 21]). С помощью подстановки выражения (9) в трехмерное уравнение Лапласа $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ легко можно установить, что для того, чтобы функция (9) была гармонической (удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа), необходимо и достаточно, чтобы функция $H(p, q)$ удовлетворяла двумерному эллиптическому дифференциальному уравнению в частных производных определенного вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H(p, q)}{\partial q^2} + \\ & + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} H(p, q) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (9), (10) является взаимно-однозначной. Действительно:

а) если $U(x, y, z)$ является однородной гармонической функцией степени m , то существует такая функция $H(p, q)$, с помощью которой функция U может быть представлена в виде (9), при-

чем функция $H(p, q)$ обязана будет подчиняться уравнению (10);

б) если функция $H(p, q)$ подчиняется уравнению (10), то функция $U(x, y, z)$, вычисленная в соответствии с правилом (9), будет однородной гармонической функцией степени m ;

в) разным функциям $U(x, y, z)$ соответствуют разные функции $H(p, q)$, а при выборе разных функций $H(p, q)$ получаются разные функции $U(x, y, z)$.

Например, если требуется проанализировать некоторое соотношение между однородной гармонической функцией $U(x, y, z)$ степени m и однородной гармонической функцией $V(x, y, z)$ степени j , то подстановка

$$U(x, y, z) = r^m H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

$$V(x, y, z) = r^j J\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right)$$

позволяет без потери общности свести задачу к анализу эквивалентного соотношения между функциями двух переменных $H(p, q)$ и $J(p, q)$, подчиняющимися уравнениям

$$\frac{\partial^2 H(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} H(p, q) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 J(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 J(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4j(j+1)}{(1+p^2+q^2)^2} J(p, q) = 0.$$

Подстановка (9) не является единственно возможной. В равной степени можно использовать подстановки

$$U(x, y, z) = (z+r)^m H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (11)$$

$$U(x, y, z) = r^m H\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right), \quad (12)$$

$$U(x, y, z) = z^m H\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad (13)$$

которые, как и формула (9), являются взаимно-однозначным способом параметризации трехмерных однородных функций общего вида с помощью

произвольных вспомогательных двумерных функций $H(p, q)$. Для того, чтобы функция вида (11) была однородной гармонической функцией, двумерная функция $H(p, q)$ должна удовлетворять эллиптическому уравнению

$$(1 + p^2 + q^2) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \right) - 4mp \frac{\partial H}{\partial p} - 4mq \frac{\partial H}{\partial q} + 4m^2 H = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы функция вида (12) была однородной гармонической функцией, двумерная функция $H(p, q)$ должна удовлетворять эллиптическому уравнению

$$(1 - p^2) \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - 2pq \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + (1 - q^2) \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2p \frac{\partial H}{\partial p} - 2q \frac{\partial H}{\partial q} + m(m+1)H = 0. \quad (15)$$

Наконец, для того чтобы функция вида (13) была однородной гармонической функцией, двумерная функция $H(p, q)$ должна удовлетворять эллиптическому уравнению

$$(1 + p^2) \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + 2pq \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + (1 + q^2) \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2(m-1)p \frac{\partial H}{\partial p} - 2(m-1)q \frac{\partial H}{\partial q} + m(m-1)H = 0. \quad (16)$$

Приведенные здесь способы параметризации однородных гармонических функций являются, по-видимому, самыми очевидными, но далеко не единственными. Выбор того, какую именно подстановку следует использовать для решения конкретной задачи, определяется удобством манипулирования тем или иным двумерным эллиптическим уравнением в частных производных применительно к рассматриваемой задаче, а также эстетическими предпочтениями исследователя.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО БАЗИСА ДЛЯ КРУГА

Рассмотрим параметризацию трехмерных однородных гармонических функций в форме (9), (10). С помощью замены переменных (8) трехмерное полупространство $z > 0$ отображается на внутреннюю часть $p^2 + q^2 < 1$ единичной окруж-

ности с центром в начале координат. При этом полупространство $z < 0$ отображается на внешнюю часть $p^2 + q^2 > 1$ этой же окружности, а плоскость $z = 0$ отображается на саму окружность $p^2 + q^2 = 1$.

Перейдем в уравнении (10) от декартовых переменных (p, q) к полярным координатам (μ, φ) :

$$\begin{cases} \mu = \sqrt{p^2 + q^2}, \\ \varphi = \arctg(q/p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \mu \cos \varphi, \\ q = \mu \sin \varphi. \end{cases} \quad (17)$$

После такой замены переменных решения $H_m(p, q)$ уравнения (10), полученного для трехмерных однородных гармонических функций степени m , преобразуются в решения $\Phi_m(\mu, \varphi)$ эквивалентного линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varphi} + \frac{4m(m+1)}{(1+\mu^2)^2} \Phi_m = 0. \quad (18)$$

Предположим, что функция $H_m(p, q)$ не имеет особых точек внутри единичного круга $p^2 + q^2 \leq 1$. Тогда функцию $\Phi_m(\mu, \varphi)$, которая является периодической по переменной φ с периодом 2π , можно разложить в сходящийся ряд Фурье

$$\Phi_m(\mu, \varphi) = c_0 \Phi_{m,0}(\mu) + \sum_{k=1, \infty} \Phi_{m,k}(\mu) (c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi), \quad (19)$$

где c_k и s_k — произвольные константы, а функции $\Phi_{m,k}(\mu)$ в соответствии с условием (18) обязаны будут удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi_{m,k}''(\mu) + \frac{1}{\mu} \Phi_{m,k}'(\mu) + \left(\frac{4m(m+1)}{(1+\mu^2)^2} - \frac{\kappa^2}{\mu^2} \right) \Phi_{m,k}(\mu) = 0. \quad (20)$$

У уравнения (20) имеется единственное (с точностью до множителя) решение, не имеющее сингулярности в точке $\mu = 0$. Это решение можно записать как

$$\Phi_{m,k}(\mu) = \mu^k (1 + \mu^2)^{m+1} \times$$

$$\times {}_2F_1(1+m, 1+m+k; 1+k; -\mu^2), \quad (21)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция [50–52].

Гипергеометрическая функция, обозначаемая как ${}_2F_1(a, b; c; z)$, где a, b, c — параметры, а z — переменная, вообще говоря, комплексная, удовлетворяет гипергеометрическому уравнению Эйлера

$$z(1-z)F''(z) + [c - (a+b+1)z]F'(z) - abF(z) = 0. \quad (22)$$

Если $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то гипергеометрическая функция разлагается в сходящийся при $|z| < 1$ гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{j=1, \infty} \left[\prod_{s=0, j-1} \frac{(a+s)(b+s)}{(1+s)(c+s)} \right] z^j = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0, \infty} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(c+j)} \frac{z^j}{j!}, \end{aligned}$$

а при условии сходимости рассматриваемого ниже интеграла (т.е. при $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$) может быть представлена как

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times \\ &\times \int_0^1 \tau^{b-1} (1-\tau)^{c-b-1} (1-\tau z)^{-a} d\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

Формула (23) обеспечивает при $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ корректное аналитическое продолжение гипергеометрического ряда на всю комплексную плоскость с разрезом на действительной оси от 1 до $+\infty$ и, в частности, позволяет вычислять такую гипергеометрическую функцию конструктивным образом при любых вещественных значениях z , удовлетворяющих условию $-\infty < z < 1$.

Для гипергеометрических функций с параметрами, используемыми в формуле (21), интеграл (23) расходится, если $m \leq -1$ либо $m \geq 0$. Однако с учетом того, что с помощью линейных дифференциальных операторов Томсона—Донкина первого порядка [39–42] можно неограниченно понижать либо повышать степень однородности m в соответствии с правилами $m \rightarrow m+1$ и $m \rightarrow m-1$, а при $m=0$ и $m=-1$ однородные гармонические функции исчерпывающим образом могут быть

описаны с помощью алгебраических формул Донкина (5) и (6), то возможность конструктивно вычислять функции (21) лишь при $-1 < m < 0$ представляется вполне достаточной. Для упрощения вычисления решений (21) и/или для вычисления решений (21) при степенях однородности m , отличных от интервала значений $-1 < m < 0$, обеспечивающего сходимость для интеграла (23), можно использовать разнообразные линейные и квадратичные гипергеометрические тождества [50–52], позволяющие достаточно гибко изменять аргументы гипергеометрических функций.

Функции $\Phi_{m,0}(\mu)$, $\Phi_{m,k}(\mu)\cos k\varphi$, $\Phi_{m,k}(\mu)\sin k\varphi$, заданные с помощью формул (21), образуют базис для решений $\Phi_m(\mu, \varphi)$ уравнения (18), не имеющих сингулярных точек внутри круга $p^2 + q^2 \leq 1$. После обратной замены переменных (17) и обратной "донкиновской" подстановки (8) эти функции образуют базис из однородных гармонических функций.

Однородная гармоническая функция, порождаяемая функцией $\Phi_{m,0}(\mu)$, соответствует трехмерному осесимметричному решению. Однородные гармонические функции, порождаемые функциями $\Phi_{m,k}(\mu)\cos k\varphi$, $\Phi_{m,k}(\mu)\sin k\varphi$, можно интерпретировать как трехмерные мультипольные гармоники, характеризующие однородные гармонические функции соответствующей степени.

С помощью полученного базиса любая однородная гармоническая функция степени m , не имеющая дополнительных особых точек на полупространстве $z \geq 0$, за исключением неизбежной особой точки в начале координат и составленного из особых точек луча $x=y=0, z \leq 0$ (результат использования "донкиновских" аргументов в формуле (9)), может быть представлена в виде сходящегося ряда. Особыми точками считаются точки с сингулярным поведением функции, а также точки, в окрестности которых функция не может быть разложена в сходящийся ряд Тейлора, т.е. не является аналитической.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО БАЗИСА ДЛЯ КОЛЬЦА

У уравнения (20) существует еще одно решение $\Psi_{m,k}(\mu)$, линейно независимое от приведенного ранее решения $\Phi_{m,k}(\mu)$, не имеющего сингулярности в точке $\mu=0$, которое демонстрирует сингулярное поведение при $\mu \rightarrow 0$. С учетом того, что вронскиан

$$W(\mu) = \Phi'_{m,k}(\mu)\Psi_{m,k}(\mu) - \Phi_{m,k}(\mu)\Psi'_{m,k}(\mu) = \\ = (\Psi_{m,k}(\mu))^2 \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\Phi_{m,k}(\mu)}{\Psi_{m,k}(\mu)} \right),$$

составленный из решений линейного дифференциального уравнения (20), удовлетворяет уравнению

$$W'(\mu) + \frac{1}{\mu}W(\mu) = 0,$$

это решение может быть представлено в соответствии с формулой Лиувилля—Остроградского в интегральной форме как

$$\Psi_{m,k}(\mu) = \Phi_{m,k}(\mu) \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{1}{\Phi_{m,k}^2(s)} \frac{ds}{s}.$$

С помощью специальных функций парное решение $\Psi_{m,k}(\mu)$ выражается как

$$\Psi_{m,k}(\mu) = G_{2,2}^{0,2} \left(-\mu^2 \left| \begin{matrix} \{ \} & \{-k-m, -m\} \\ \{-k, 0\} & \{ \} \end{matrix} \right. \right), \quad (24)$$

где

$$G_{p,q}^{l,n} \left(z \left| \begin{matrix} \{a_1, \dots, a_l\}, \{a_{n+1}, \dots, a_p\} \\ \{b_1, \dots, b_l\}, \{b_{l+1}, \dots, b_q\} \end{matrix} \right. \right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^l \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=l+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds$$

это — G -функция Мейера ([51, п. 5.3]). (Здесь контур интегрирования L выбирается как разрез вдоль мнимой оси от $-\infty$ до $+\infty$, возможно, с захватом некоторого участка действительной оси, при котором все полюсы функций $\Gamma(b_j - s)$, где $1 \leq j \leq l$, остаются справа от разреза, а все полюсы функций $\Gamma(1 - a_j + s)$, где $1 \leq j \leq n$, остаются слева от разреза.) При $k \neq 0$ решение, линейно независимое $\Psi_{m,k}(\mu)$ с сингулярностью при $\mu = 0$, может быть также выражено с помощью гипергеометрической функции

$$\Psi_{m,k}(\mu) = \\ = \mu^{-k} (1 + \mu^2)^{m+1} {}_2F_1(1+m, 1+m-k; 1-k; -\mu^2), \quad (25)$$

конструктивное вычисление которой, впрочем,

сопряжено с определенными техническими трудностями (интегральная формула (23) для вычисления гипергеометрической функции, которая используется в формуле (25), не может быть использована, поскольку при таких параметрах в случае $k > 1$ интеграл (23) расходится).

Однако можно поступить проще. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если функция $\Phi(\mu)$ удовлетворяет уравнению (20), то этому же уравнению обязана будет удовлетворять также и функция $\Phi(1/\mu)$. (Отсюда, в частности, следует, что если функция $H(p, q)$ удовлетворяет уравнению (10), то и функция

$$H(p/(p^2 + q^2), q/(p^2 + q^2)),$$

получаемая после замены переменных, имеющей смысл инверсии плоскости (p, q) относительно единичного круга с центром в начале координат, также удовлетворяет уравнению (10).) Поэтому в качестве дополняющего базиса, позволяющего разлагать решения уравнения (18) в кольце $0 < \varepsilon \leq \mu \leq 1$, можно использовать функции

$$\Psi_{m,k}(\mu) = \\ = \mu^{-k} \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right)^{m+1} {}_2F_1 \left(1+m, 1+m+k; 1+k; -\frac{1}{\mu^2} \right). \quad (26)$$

В итоге функции

$$\Phi_{m,0}(\mu), \Phi_{m,k}(\mu) \cos k\varphi, \Phi_{m,k}(\mu) \sin k\varphi,$$

$$\Psi_{m,0}(\mu), \Psi_{m,k}(\mu) \cos k\varphi, \Psi_{m,k}(\mu) \sin k\varphi,$$

заданные с помощью формул (21) и (24), (25) либо (26), образуют базис для тех решений $\Phi_m(\mu, \varphi)$ уравнения (18), которые не имеют сингулярных точек внутри кольца $0 < \varepsilon^2 \leq p^2 + q^2 \leq 1$:

$$\Phi_m(\mu, \varphi) = c_0 \Phi_{m,0}(\mu) + \\ + \sum_{j=k, \infty} \Phi_{m,k}(\mu) (c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi) + \\ + d_0 \Psi_{m,0}(\mu) + \\ + \sum_{j=k, \infty} \Psi_{m,k}(\mu) (d_k \cos k\varphi + e_k \sin k\varphi). \quad (27)$$

После обратной замены переменных (17) и (8) эти функции образуют расширенный базис для однородных гармонических функций, а формула (27) переходит в разложение трехмерной однородной гармонической функции степени m . Для трехмерных однородных гармонических функций,

которые можно представить с помощью ряда, получаемого из разложения (27) при обратном переходе к декартовым координатам (x, y, z) , кроме особой точки в начале координат и состоящего из особых/сингулярных точек луча $x = y = 0, z < 0$, имеется также состоящий из сингулярных точек луч $x = y = 0, z > 0$, являющийся прообразом точки $p = q = 0$ на плоскости (p, q) . Однако, никаких других сингулярных точек у этих трехмерных однородных гармонических функций быть не может, поэтому как ряд (19), так и ряд (27) не покрывают все возможные трехмерные однородные гармонические функции степени m .

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА, ПОЛУЧАЕМЫЕ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО БАЗИСА

В публикациях [39–42] приводятся дифференциальные аналоги первого порядка формулы Томсона для трехмерных гармонических функций. Эти формулы преобразуют трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции, причем форма трансформирующих выражений сознательно выбрана таким образом, чтобы при подстановке в них однородных по Эйлеру функций на выходе получались новые однородные по Эйлеру функции, возможно, с другой степенью однородности. Указанный список формул выглядит следующим образом:

$$V^{(m)}(x, y, z) = U^{(m)}(x, y, z), \quad (28)$$

$$V^{(m-1)}(x, y, z) = U_x^{(m)}(x, y, z), \quad (29)$$

$$V^{(m-1)}(x, y, z) = U_y^{(m)}(x, y, z), \quad (30)$$

$$V^{(m-1)}(x, y, z) = U_z^{(m)}(x, y, z), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} V^{(m+1)}(x, y, z) &= xU^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ (x^2 - y^2 - z^2)U_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ 2xyU_y^{(m)}(x, y, z) + 2xzU_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} V^{(m+1)}(x, y, z) &= yU^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ 2xyU_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ (-x^2 + y^2 - z^2)U_y^{(m)}(x, y, z) + 2yzU_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} V^{(m+1)}(x, y, z) &= zU^{(m)}(x, y, z) + 2xzU_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ 2yzU_y^{(m)}(x, y, z) + (-x^2 - y^2 + z^2)U_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} V^{(m)}(x, y, z) &= \\ &= xU_x^{(m)}(x, y, z) + yU_y^{(m)}(x, y, z) + zU_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (35)$$

$$V^{(m)}(x, y, z) = yU_x^{(m)}(x, y, z) - xU_y^{(m)}(x, y, z), \quad (36)$$

$$V^{(m)}(x, y, z) = zU_x^{(m)}(x, y, z) - xU_z^{(m)}(x, y, z), \quad (37)$$

$$V^{(m)}(x, y, z) = zU_y^{(m)}(x, y, z) - yU_z^{(m)}(x, y, z), \quad (38)$$

$$V^{(-m-1)}(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m+1}}U^{(m)}(x, y, z), \quad (39)$$

$$V^{(-m)}(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_x^{(m)}(x, y, z), \quad (40)$$

$$V^{(-m)}(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_y^{(m)}(x, y, z), \quad (41)$$

$$V^{(-m)}(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_z^{(m)}(x, y, z), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} V^{(-m-2)}(x, y, z) &= \frac{x}{r^{2m+3}}U^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ \frac{x^2 - y^2 - z^2}{r^{2m+3}}U_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ \frac{2xy}{r^{2m+3}}U_y^{(m)}(x, y, z) + \frac{2xz}{r^{2m+3}}U_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} V^{(-m-2)}(x, y, z) &= \\ &= \frac{y}{r^{2m+3}}U^{(m)}(x, y, z) + \frac{2xy}{r^{2m+3}}U_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ \frac{-x^2 + y^2 - z^2}{r^{2m+3}}U_y^{(m)}(x, y, z) + \frac{2yz}{r^{2m+3}}U_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} V^{(-m-2)}(x, y, z) &= \\ &= \frac{z}{r^{2m+3}}U^{(m)}(x, y, z) + \frac{2xz}{r^{2m+3}}U_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ \frac{2yz}{r^{2m+3}}U_y^{(m)}(x, y, z) + \frac{-x^2 - y^2 + z^2}{r^{2m+3}}U_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} V^{(-m-1)}(x, y, z) &= \frac{x}{r^{2m+1}}U_x^{(m)}(x, y, z) + \\ &+ \frac{y}{r^{2m+1}}U_y^{(m)}(x, y, z) + \frac{z}{r^{2m+1}}U_z^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} V^{(-m-1)}(x, y, z) &= \\ &= \frac{y}{r^{2m+1}}U_x^{(m)}(x, y, z) - \frac{x}{r^{2m+1}}U_y^{(m)}(x, y, z), \end{aligned} \quad (47)$$

$$V^{(-m-1)}(x, y, z) = \frac{z}{r^{2m+1}} U_x^{(m)}(x, y, z) - \frac{x}{r^{2m+1}} U_z^{(m)}(x, y, z), \quad (48)$$

$$V^{(-m-1)}(x, y, z) = \frac{z}{r^{2m+1}} U_y^{(m)}(x, y, z) - \frac{y}{r^{2m+1}} U_z^{(m)}(x, y, z), \quad (49)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а верхний индекс показывает, какая степень однородности должна быть у соответствующей однородной гармонической функции.

Как входная, так и выходная функции могут быть представлены с помощью подстановки Донкина (11), (12), а соответствующие им двумерные функции $H(p, q)$ и $J(p, q)$ записаны в полярных координатах (17) и представлены в виде ряда Фурье (19), где коэффициенты ряда определяются единственно возможным образом. Сравнение между собой коэффициентов Фурье справа и слева от знака равенства в тождествах (28)–(49) позволяет установить полезные тождества для радиальных функций $\Phi_{m,k}(\mu)$ (с точностью до множителя, выбираемого достаточно произвольным образом, поскольку и сами функции $\Phi_{m,k}(\mu)$ определены с точностью до множителя). Однако практическая полезность таких соотношений сомнительна, тем более что все они фактически копируют соотношения, получаемые для решений (26) с помощью классических соотношений для гипергеометрических функций, которые можно найти, в частности, в [50–52].

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕНЯМИ ОДНОРОДНОСТИ $-1 < m < 0$

Интегральная формула (23) для гипергеометрических функций после ее подстановки в решение (21) для функций $\Phi_{m,k}(\mu)$ и далее в разложение Фурье (19) дает формулу

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mu, \varphi) &= \sum_{k=0, \infty} \Phi_{m,k}(\mu) (c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi) = \\ &= \sum_{k=0, \infty} \left((c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi) \mu^k (1 + \mu^2)^{m+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 \tau^{m+k} (1 - \tau)^{-m-1} (1 + \tau\mu^2)^{-(1+m)} d\tau \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + \mu^2)^{m+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0, \infty} \mu^k \tau^k (c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi) \right) \times \\ &\quad \times \tau^m (1 - \tau)^{-m-1} (1 + \tau\mu^2)^{-(1+m)} d\tau = \\ &= (1 + \mu^2)^{m+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0, \infty} \mu^k \tau^k (\hat{c}_k e^{+ik\varphi} + \hat{s}_k e^{-ik\varphi}) \right) \times \\ &\quad \times \tau^m (1 - \tau)^{-m-1} (1 + \tau\mu^2)^{-(1+m)} d\tau, \quad (50) \end{aligned}$$

которую можно без каких-либо опасений использовать при $-1 < m < 0$. В этой формуле комплексные коэффициенты $\hat{c}_k$ и $\hat{s}_k$ являются не совсем произвольными, поскольку выбираются так, чтобы результирующее выражение было вещественным. Однако их можно считать совершенно произвольными, если в формуле (50) произвольные вещественные константы c_k и s_k заменить на произвольные комплексные константы, но при этом для получившегося комплексного выражения использовать лишь его вещественную часть.

Выражение $\sum_{k=0, \infty} \mu^k \tau^k (\hat{c}_k e^{+ik\varphi} + \hat{s}_k e^{-ik\varphi})$ в формуле (50) можно упростить. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0, \infty} \hat{c}_k t^k &= K_c(t) = K_{cr}(u, v) + iK_{ci}(u, v), \\ \sum_{k=0, \infty} \hat{s}_k t^k &= K_s(t) = K_{sr}(u, v) + iK_{si}(u, v) \end{aligned}$$

это произвольные аналитические функции комплексного переменного $t = u + iv$, разложенные в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0, \infty} \mu^k \tau^k (\hat{c}_k e^{+ik\varphi} + \hat{s}_k e^{-ik\varphi}) &= \\ &= \sum_{k=0, \infty} \hat{c}_k (\mu\tau e^{+i\varphi})^k + \sum_{k=0, \infty} \hat{s}_k (\mu\tau e^{-i\varphi})^k = \\ &= K_c(\mu\tau e^{+i\varphi}) + K_s(\mu\tau e^{-i\varphi}) = \\ &= K_{cr}(\mu\tau \cos \varphi, \mu\tau \sin \varphi) + iK_{ci}(\mu\tau \cos \varphi, \mu\tau \sin \varphi) + \\ &\quad + K_{sr}(\mu\tau \cos \varphi, -\mu\tau \sin \varphi) + iK_{si}(\mu\tau \cos \varphi, -\mu\tau \sin \varphi) = \\ &= K(\mu\tau \cos \varphi, \mu\tau \sin \varphi), \quad (51) \end{aligned}$$

где $K(u, v)$ — это произвольная вещественная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа. Действительно, функции K_{ci} и K_{si} в формуле (51) должны сократиться, чтобы получить на выходе вещественное значение. Из условия

$$K_{ci}(u, v) = -K_{si}(u, -v)$$

и соотношений Коши—Римана [53–56], справедливых для пар функций $K_{cr}(u, v)$, $K_{ci}(u, v)$ и $K_{sr}(u, v)$, $K_{si}(u, v)$, следует цепочка равенств

$$\frac{\partial K_{cr}(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial K_{ci}(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial K_{si}(u, -v)}{\partial v} = \frac{\partial K_{sr}(u, -v)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial K_{cr}(u, v)}{\partial v} = -\frac{\partial K_{ci}(u, v)}{\partial u} = -\frac{\partial K_{si}(u, -v)}{\partial u} = -\frac{\partial K_{sr}(u, -v)}{\partial v},$$

откуда следует условие $K_{sr}(u, -v) = K_{cr}(u, v) + C$, где C — это вещественная константа. Следовательно, с точностью до аддитивной вещественной константы функции $K_c(t)$ и $K_s(t)$ должны быть комплексно сопряженными: $K_s(t) = \overline{K_c(\bar{t})} + C$. Если ввести в рассмотрение новую функцию $K(u, v) = 2K_{cr}(u, v) + C$, которая обязана будет удовлетворять двумерному уравнению Лапласа вследствие соотношений Коши—Римана для вещественной и мнимой частей аналитической функции комплексного переменного [53–56], то получим конечное равенство в цепочке (51). Поскольку для любой функции $K(u, v)$, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа, можно восстановить подходящую аналитическую функцию $K(t)$ комплексного переменного $t = u + iv$, вещественной частью которой является заданная функция $K(u, v)$, то никакие дополнительные ограничения на функцию $K(u, v)$ кроме ее гармоничности не накладываются.

Переходя от полярных координат (μ, φ) к декартовым координатам (p, q) в соответствии с формулами (17), получаем интегральное выражение

$$H_m(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{m+1} \times$$

$$\times \int_0^1 K(p\tau, q\tau) \frac{\tau^m}{(1-\tau)^{m+1} (1+\tau(p^2+q^2))^{m+1}} d\tau \quad (52)$$

для решения эллиптического уравнения (10), когда это решение не имеет особых точек внутри круга $p^2 + q^2 < 1$. В этом выражении функция $K(u, v)$ должна быть произвольной двумерной гармонической функцией, не имеющей особых точек внутри круга $u^2 + v^2 < 1$.

В частном случае в качестве функций $K(u, v)$ можно использовать гармонические однородные полиномы степени k , которые вычисляются по фор-

муле $K(u, v) = \operatorname{Re}(u + iv)^k$ либо по формуле $K(u, v) = \operatorname{Im}(u + iv)^k$. Тогда формула (52) с точностью до замены переменных $(p, q) \Leftrightarrow (\mu, \varphi)$ и константы-множителя будет порождать функции $\Phi_{m,k}(\mu) \cos k\varphi$ и $\Phi_{m,k}(\mu) \sin k\varphi$, принадлежащие гипергеометрическому базису.

Прямая подстановка выражения (52) в уравнение (10) показывает, что формула (52) обеспечивает решение для уравнения (10) даже тогда, когда двумерная гармоническая функция $K(u, v)$ имеет особые точки внутри круга $u^2 + v^2 < 1$. Однако вопрос о том, в какой степени формула (52) дает *все* решения для уравнения (10), требует аккуратного исследования и будет являться предметом отдельной публикации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные аналитические выражения для базисных функций (21) и (26), которые содержат гипергеометрические функции, после умножения их на тригонометрические функции $\cos(m\varphi)$ и $\sin(m\varphi)$, обратной замены полярных координат (μ, φ) на переменные (p, q) с помощью формул (17), возвращения от вспомогательных переменных (p, q) к трехмерным декартовым координатам (x, y, z) с помощью подстановки Донкина (8) и окончательного восстановления трехмерных однородных гармонических функций $U(x, y, z)$ степени m в соответствии с формулой (9) позволяют сконструировать для однородных гармонических функций степени m аналог тригонометрического базиса Фурье. С помощью этого базиса любая однородная гармоническая функция степени m , не имеющая "лишних" сингулярных точек, может быть разложена в сходящийся ряд. Использование для этой цели лишь тех базисных функций, которые порождаются формулами (21), позволяет получать однородные гармонические функции степени m , которые не имеют сингулярных точек вдоль луча $x = 0, y = 0, z > 0$, но при этом неизбежным образом имеют сингулярные точки вдоль луча $x = 0, y = 0, z < 0$.

Точно также из формулы (52) после подстановки в формулу (9) с учетом замены переменных (8) получается интегральная формула общего вида для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности m , удовлетворяющих условию $-1 < m < 0$. С помощью процедуры дифференцирования [24, 27, 57] и формулы Томсона (7) либо напрямую с помощью дифференциальных операторов Томсона—Донкина [39–42] из этой формулы можно полу-

чить общие формулы и для других степеней однородности. Следует, однако, обратить внимание, что в интегральной формуле (52) при дифференцировании под знаком интеграла не надо забывать о предварительном выделении и аналитическом интегрировании сингулярностей интегрального ядра.

Авторы публично заявляют, что у них нет конфликта интересов, в том числе и финансовых. Данная работа частично выполнена в рамках НИП 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИАП РАН. Для проведения и проверки аналитических выкладок использовалась программа Wolfram Mathematica версии 11 (<http://wolfram.com/mathematica/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В., Титов Ю.А. Скрещенные гармонические потенциалы, однородные по Эйлеру // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 4. С. 84–95.
- Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
- Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
- Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
- Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектроскопии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.
- Краснова Н.К. Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
- Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, №1. С. 50–58.
URL: <http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst6>
- Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектроскопии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
- Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р. Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43. DOI: 10.1134/S106378501702002X
- Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьёв К.В. Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15, № 1. С. 26–43.
- Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 4. С. 609–613. DOI: 10.21883/JTF.2018.04.45732.2483
- Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 11. С. 1711–1719. DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46635.2498
- Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Применение формулы Донкина в теории отражающих и поворотных устройств // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, № 12. С. 1946–1963. DOI: 10.21883/JTF.2019.12.48496.201-18
- Бердников А.С., Аверин И.А. О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 67–70.
- Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К. Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. Общий принцип и однокаскадные схемы // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281
- Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К. Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. Условия двойной фокусировки высокого порядка у двухкаскадной схемы // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
- Бердников А.С., Аверин И.А. Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
- Аверин И.А., Бердников А.С. Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 616 с.
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
- Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
- Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.
- Голиков Ю.К., Соловьёв К.В. Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2008. 152 с.
- Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Науч-

- ное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: <http://iairas.ru/mag/2016/abst4.php#abst2>
25. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1857. Vol. 147. P. 43–57. DOI: 10.1098/rstl.1857.0005
 26. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1856–1857. Vol. 8. P. 307–310.
 27. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
 28. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
 29. *Thomson W.* Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1847. Т. XII. P. 256–264.
 30. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 572 с.
 31. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. 560 с.
 32. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.–Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
 33. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.
 34. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
 35. *Kellogg O.D.* Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967. 386 p.
 36. *Уэрмлер Дж.* Теория потенциала. М.: Изд-во "Мир", 1980. 134 с.
 37. *Helms L.L.* Potential Theory. Second Edition. Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014. 485 p.
 38. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // *Вестник Актыбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки*. 2016. № 2. С. 165–181.
 39. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12, № 2. С. 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203
 40. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12, № 2. С. 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204
 41. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12, № 3. С. 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303
 42. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12, № 3. С. 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304
 43. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // *Вестник Актыбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова*. 2016. № 2. С. 17–32.
 44. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // *Вестник Актыбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова*. 2016. № 2. С. 147–165.
 45. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // *Научное приборостроение*. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: <http://iairas.ru/mag/2016/abst4.php#abst3>
 46. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80. DOI: 10.18721/JPM.10107
 47. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92. DOI: 10.18721/JPM.10108
 48. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // *Научное приборостроение*. 2017. Т. 27, № 4. С. 63–71. URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst4.php#abst8>
 49. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // *Научное приборостроение*. 2017. Т. 27, № 4. С. 72–89. URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst4.php#abst9>
 50. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.).* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
 51. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 296 с.
 52. *Aomoto K., Kita M.* Theory of Hypergeometric Functions (Springer Monographs in Mathematics Series, Vol. 305). Springer, 2011. 317 p.

53. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
54. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 1. 486 с., т. 2. 624 с.
55. Евграфов М.А. Аналитические функции. 3-е изд. перераб., доп. М.: Наука, 1991. 448 с.
56. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.
57. Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В. Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 107–119. URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst3.php#abst13>

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (Бердников А.С., Соловьёв К.В., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В., Титов Ю.А., Голиков Ю.К.)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (Краснова Н.К., Соловьёв К.В., Голиков Ю.К.)

Контакты: Бердников Александр Сергеевич, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 23.09.2019

HYPERGEOMETRIC BASIS FOR THREE-DIMENSIONAL HARMONIC FUNCTIONS WHICH ARE HOMOGENEOUS IN EULER TERMS WITH A NON-INTEGGER POWER OF HOMOGENEITY

A. S. Berdnikov¹, N. K. Krasnova², K. V. Solovyev^{1,2}, A. G. Kuzmin¹,
S. V. Masyukevich¹, Yu. A. Titov¹, Yu. K. Golikov^{1,2}

¹*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

²*Peter The Great Saint Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms, are a convenient tool for the synthesis of electron and ion optical systems with special properties. It is known that the scalar potentials of such fields are three-dimensional scalar harmonic functions which are homogeneous in Euler terms with a given power of homogeneity. The problem of the exhaustive parameterization of three-dimensional homogeneous harmonic functions with integer powers of homogeneity is already solved using the Donkin formulas for homogeneous harmonic functions with powers of homogeneity 0 and -1 , the theorem on the differentiation of three-dimensional homogeneous harmonic functions and Thomson's formula for homogeneous harmonic functions. However, the number of analytical formulas that can be used to describe three-dimensional scalar harmonic functions with non-integer powers of homogeneity is, unfortunately, not very large at the moment, and the problem of an exhaustive description of such functions is very far from its final solution. At the same time, the usage of three-dimensional homogeneous harmonic potentials with non-integer powers of homogeneity significantly expands the toolkit of developers of electron and ion optical systems. The goal of this work is to construct a hypergeometric basis composed of basic homogeneous harmonic functions with non-integer powers of homogeneity, with the help of which any three-dimensional homogeneous harmonic function without singular points except the line $x = y = 0, z \leq 0$ can be represented as an infinite series like the Fourier series. It seems that this result partially solves the problem of an exhaustive description of three-dimensional scalar homogeneous harmonic functions with non-integer powers of homogeneity.

Keywords: electric fields; harmonic functions; functions homogeneous in Euler' terms; similarity principle for charged particle trajectories; Donkin formula; analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V., Kuzmin A.G., Masyukevich S.V., Titov Yu.A. [Crossed harmonic potentials which are homogeneous in Euler' terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 4, pp. 84–95 (In Russ.).
2. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davy-

- dov S.N. [The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. I]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.).
3. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. II]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.).
 4. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza ehlektrostaticheskikh ehnergoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic power analyzers]. Saint Petersburg, Polytechnical university Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
 5. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.).
 6. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyushchih i fokusiruyushchih ehlektronno-opticheskikh sred.* Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the dispersing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saint Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
 7. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. (In Russ.).
URL: <http://iairas.ru/en/mag/2014/abst1.php#abst6>
 8. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Applied physics], 2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).
 9. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43.
DOI: 10.1134/S106378501702002X (In Russ.).
 10. Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Soloviev K.V. [Synthesis of Fringing Magnetic Fields for Static Mass Analyzers of the Spectrographic Type]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2018, vol. 15, no. 1, pp. 26–43. (In Russ.).
 11. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Synthesis of Electrode Configurations that Conserve Fringing Electric Field Homogeneity in Euler Terms]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2018, vol. 88, no. 4, pp. 609–613. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2018.04.45732.2483
 12. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Application of the Donkin Formula in the Theory of Electrostatic Prisms]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2018, vol. 88, no. 11, pp. 1711–1719. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46635.2498
 13. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Applications of Donkin formula in the theory of reflecting and turning devices]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 2019, vol. 89, no. 12, pp. 1946–1963. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2019.12.48496.201-18
 14. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 67–70. (In Russ.).
 15. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
 16. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II. Conditions of high-order double focusing for two-cascade schemes]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
 17. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoy fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
 18. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Fringing fields of gridless electron spectrographs with electrostatic fields homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoy fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8 (In Russ.).
 19. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus], vol. 1. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
 20. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
 21. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoy fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
 22. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V. *Raschet elementov ehlektrostaticheskikh ehlektronno-opticheskikh sistem. Uchebnoe posobie* [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems. Education book]. Leningrad, LPI Publ., 1984. 79 p. (In Russ.).
 23. Golikov Yu.K., Solovyov K.V. *Ehlektrorostaticheskie ionnye lovushki* [Electrostatic ion traps]. Saint Petersburg, Saint-Petersburg Polytechnic University Publ., 2008. 152 p. (In Russ.).
 24. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3d electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. DOI: 10.18358/np-26-4-i1330 (In Russ.).
 25. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57.
DOI: 10.1098/rstl.1857.0005
 26. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856–1857, vol. 8, pp. 307–310. DOI: 10.1098/rspl.1856.0075
 27. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskikh i ellipsoidal'nykh funktsiy* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1952. 476 p. (In Russ.).
 28. Whittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analy-*

- sis. Cambridge, University Press, 1920. 608 p. (Russ. ed.: Uitteker E.T., Vatson G. *Kurs sovremennogo analiza. Chast 2. Transcendentnye funktsii*. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p.). (In Russ.).
29. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1847, tome XII, pp. 256–264.
30. Thomson W, (later Lord Kelvin), Tait P.G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford University Press, 1867. (Russ. Ed.: Tomson U. (Lord Kelvin), Tet P.G. *Traktat po natural'noj filosofii. Part. I*. Moscow-Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", 2010. 572 p.). (In Russ.).
31. Thomson W, (later Lord Kelvin), Tait P.G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford University Press, 1867. (Russ. Ed.: Tomson U. (Lord Kelvin), Tet P.G. *Traktat po natural'noj filosofii. Part. II*. Moscow-Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", 2011. 560 p.). (In Russ.).
32. Sretenskiy L.N. *Teoriya nyutonovskogo potentsiala* [Theory of Newtonian potential]. Moscow-Leningrad, OGIZ-GITTL Publ., 1946. 318 p. (In Russ.).
33. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 4, part 2. Moscow, Nauka Publ., 1981. 297 p. (In Russ.).
34. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).
35. Kellogg O.D. *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967. 386 p.
36. Wermer J. *Potential theory. Second edition. Ser. "Lecture Notes in Mathematics"*, vol. 408. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981. 166 p. (Russ. Ed.: Uermlyer G. *Teoriya potentsiala*. Moscow, Mir Publ., 1980. 134 p.). (In Russ.).
37. Helms L.L. *Potential Theory. Second Edition*. Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014. 485 p.
38. Golikov Yu.K. [Analytical ways of describing harmonic functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 165–181. (In Russ.).
39. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 2, pp. 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203 (In Russ.).
40. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 2, pp. 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204 (In Russ.).
41. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 3, pp. 26–44. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12303
42. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 3, pp. 45–62. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12304
43. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 17–32. (In Russ.).
44. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 147–165. (In Russ.).
45. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integral expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms and have non-integer orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. DOI: 10.18358/np-26-4-i3142 (In Russ.).
46. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-Polynomial 3D Electric and Magnetic Potentials Homogeneous in Euler Terms]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.10107
47. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [On the Quasi-Polynomial 3D Potentials of Electric and Magnetic Fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.10108
48. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Analysis of the general whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 4, pp. 63–71. DOI: 10.18358/np-27-4-i6371 (In Russ.).
49. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequences]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 4, pp. 72–89. DOI: 10.18358/np-27-4-i7289 (In Russ.).
50. Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) *Handbook on Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series*, vol. 55, 10th

- ed. USA National Bureau of Standards, 1972. 1046 p. (Russ. Ed.: Abramovic M., Stigan I. (red.). *Spravochnik po specialnym funkciyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.). (In Russ.).
51. Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions*, vol. I. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1953. 302 p. (Russ. Ed.: Beytmen G., Erdeji A. *Vysshie transcendentnye funkcii. T. 1. Izd. 2*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 296 p.). (In Russ.).
52. Aomoto K., Kita M. *Theory of Hypergeometric Functions*. Springer Monographs in Mathematics Series, vol. 305. Springer, 2011. 317 p. DOI: 10.1007/978-4-431-53938-4
53. Lavrentev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkciy kompleksnogo peremennogo* [Methods of complex variable function theory]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 716 p. (In Russ.).
54. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funkciy. T. 1, 2*. [Theory of analytical functions. V. 1, 2]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 486 p., 624 p. (In Russ.).
55. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkcii. 3-e izd. pererab., dop* [Analytical functions. 3rd ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 448 p. (In Russ.).
56. Gurvic A., Kurant P. *Teoriya funkciy* [Theory of functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 646 p. (In Russ.).
57. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem on integration and differentiation of 3D electric and magnetic potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 107–119. DOI: 10.18358/np-27-3-i107119 (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Aleksandr Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

Article received by the editorial office on 23.09.2019