

УДК 517.956.255; 621.319.7

© С. И. Шевченко, 2019

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗЕРКАЛЕ ПРИ УЧЕТЕ ЭЛЕКТРОНОВ, ИМЕЮЩИХ АЗИМУТАЛЬНУЮ КОМПОНЕНТУ СКОРОСТИ

В работе вычислялся телесный угол, стартовав в пределах которого электроны попадают на детектор цилиндрического зеркала. Радиус наибольшего отклонения электронов от внутреннего цилиндра получен в виде ряда, который обеспечивает хорошую точность для углов до 20° . Решение уравнения движения электронов в цилиндрическом зеркале, полученное в виде ряда Тэйлора, показало хорошее совпадение с результатами прямого интегрирования модифицированного уравнения движения.

Кл. сл.: энергоанализатор, цилиндрическое зеркало, кольцо эмиссии, выходная диафрагма

ВВЕДЕНИЕ

Задача решения уравнения движения электронов в цилиндрическом зеркале (ЦЗ) при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости, рассматривалась во многих работах. Среди этих работ можно выделить работы [1–4], в которых, на наш взгляд, сделан основной вклад в решение проблемы. В этих работах удалось свести уравнения движения, записанные в цилиндрической системе координат, к зависимости времени от радиальной координаты в виде интегрального представления (в обозначениях работы [5])

$$T = \frac{2}{V_0} \int_{r_1}^{r_m} \frac{dr}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \phi \cdot \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}}, \quad (1)$$

где T — время пролета электронов через дисперсное пространство; r_m — точка наибольшего удаления электронов от внутреннего цилиндра, являющаяся корнем функции, стоящей под знаком радикала

$$\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \phi \cdot \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия для уравнений движения: R_0 — радиус для точки вылета электронов из источника; V_0 — скорость электронов до входа в дисперсное пространство; ϑ, ϕ — углы в локальной сферической системе координат, привязанной

к точке эмиссии R_0 , ϑ — угол между нормалью к плоскости XY (осью Z) и вектором скорости, ϕ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг точки R_0 , между осью Y и проекцией V_{xy} вектора

скорости на плоскость XY ; $k = -\left(\frac{E}{U}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$;

E — кинетическая энергия электронов до влета в дисперсное пространство; r_1, r_2 — радиусы внутреннего и внешнего электродов ЦЗ; U — потенциал на внешнем электроде ЦЗ, имеет отрицательный знак (в данной работе $U = -100$ В); на внутреннем электроде ЦЗ установлен потенциал, равный нулю.

Решение уравнения движения в его преобразованном виде (1) требует решения двух задач: нахождения корня уравнения (2) и собственно решения (интегрирования) уравнения (1).

Представленная статья является продолжением работ [5, 6], в которых с помощью расчета траекторий изучались особенности функционирования цилиндрического зеркала. В этих работах численными методами находились такие величины, как распределение моноэнергетичного пучка электронов по поверхности цилиндра, содержащего выходную диафрагму (ЦВД), распределение светосилы по поверхности эмиттера, аппаратная функция и прочие. В этих условиях важно иметь возможность проверять проводимые вычисления. Одним из возможных способов проверки получаемых результатов является применение различных методов расчета.

В работах [5, 6] для каждой траектории сперва вычислялось расстояние наибольшего удаления

электронов от внутреннего цилиндра (r_m), далее проводилась проверка неравенства $r_m < r_2$, которое означает, что электрон в процессе своего движения через дисперсионное пространство не касается верхнего электрода. И после этого для вычисления интеграла в (1) было применено правило вычисления [7], имеющее наивысшую алгебраическую точность (типа Гаусса).

Другой метод расчета траекторий — расчет методом Рунге—Кутты [8] в трехмерном декартовом пространстве. Недостатком метода Рунге—Кутты является относительно большое время счета. Сравнение метода интегрирования уравнения (1) и метода Рунге—Кутты показало, что при сравнимой точности расчета последний метод работает до 3 порядков медленнее [5]. Поэтому нет возможности применить метод Рунге—Кутты параллельно с методом (или вместо него) интегрирования уравнения (1) для всего массива вычислений, таких как в [5, 6]. А можно применять только в некоторых точках. Сравнение точности этих двух методов, проведенное в работе [5], показало совпадение результатов с точностью не хуже 10^{-8} м.

Еще одним методом решения уравнений движения является разложение редуцированных к виду (1) уравнений движения в ряд Тэйлора. В работе [1] было применено разложение выражения, стоящего в правой части (1), в ряд Тэйлора по малому углу γ с точностью до членов, порядка $\text{tg}^2(\gamma)$, где γ — угол, пропорциональный азимутальному углу. С одной стороны, в этом случае нельзя требовать изотропности начального распределения электронов по этому углу. С другой стороны, остается вопрос: достаточно ли разложение до членов порядка $\text{tg}^2(\gamma)$ для получения приличных по точности результатов. В работе [5] в каждой точке эмиссии рассматривалась (местная) сферическая система координат (СК). Поэтому для этого случая изотропное распределение эмитируемых электронов является обоснованным.

Чтобы искать решение выражения (1) в виде разложения в ряд по углу ϕ , необходима малость этого угла. Поэтому следует изучить телесный угол (ϑ, ϕ) , под которым из точки эмиссии видна выходная диафрагма (ВД). С точностью до константы этот телесный угол равен светосиле [9].

ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ (СВЕТОСИЛА)

Все вычисления в данной работе проведены для ЦЗ с радиусом внутреннего цилиндра $r_1 = 2$ см и радиусом внешнего цилиндра $r_2 = 5$ см. На внутреннем цилиндре установлено напряжение, равное нулю, на внешнем цилиндре — $U = -100$ В.

Для фиксированных значений R_0, E и для каждого x ($x = \cos(\vartheta)$) рассчитываем траектории при разных значениях угла ϕ методом, описанным в работе [5]. В результате получаем значения z -координат точек пересечения траектории и цилиндра, содержащего ВД, $L_k(x_k, \phi_k)$. Предположим, что определено некоторое положение ВД: L_B, L_E — значения расстояний вдоль оси Z от источника до ближнего и дальнего краев ВД. Тогда мы имеем возможность сравнивать два последовательных значения L_k и L_{k+1} с L_B и L_E . Если при каком-то значении индекса k выполняется неравенство $L_k \leq L_B < L_{k+1}$, то далее простой линейной интерполяцией можно вычислить угол ϕ_B , стартовав с которым (и при фиксированных значениях x, R_0, E) электрон попадет в передний край ВД:

$$\phi_B = \phi_k + (\phi_{k+1} - \phi_k) \frac{L_B - L_k}{L_{k+1} - L_k}. \quad (3)$$

С дальним краем ВД вычисления производятся вполне аналогично при $L_k \leq L_E < L_{k+1}$:

$$\phi_E = \phi_k + (\phi_{k+1} - \phi_k) \frac{L_E - L_k}{L_{k+1} - L_k}. \quad (4)$$

В результате мы получаем $\phi_B(x)$ и $\phi_E(x)$ — значения азимутального угла, стартовав с которым, электроны попадают в ближний и дальний края ВД. Разность $\phi_E(x) - \phi_B(x)$ дает нам диапазон азимутальных углов, стартовав в котором, электроны попадают на детектор. Телесный угол изображается некоторой областью на плоскости (ϑ, ϕ) , ограниченной линиями. В нашем случае это линии $\phi_B(\vartheta)$ и $\phi_E(\vartheta)$. Вычисляется телесный угол как двойной интеграл $\iint \sin \vartheta d\phi d\vartheta$ по этой области. Поэтому нахождение этого телесного угла (зависимости $\phi_{B,E}(\vartheta)$) может служить еще одним методом вычисления светосилы, светимости и т.д.

Некоторые возможные виды телесного угла (ТУ) представлены на рис. 1–3, на которых в различной комбинации варьируются четыре параметра: P_y — радиус цилиндра, содержащего ВД; E — энергия электронов; R_0 — радиус для точки эмиссии; d_{Diaphr} — ширина ВД. При рассмотрении рис. 1–3 следует иметь в виду, что на этих рисунках приведена только половина телесного угла. Полный телесный угол симметричен относительно оси ϑ ($\phi = 0^\circ$). На рисунках линии, ограничивающие телесный угол, имеют маркировку из 2 символов:

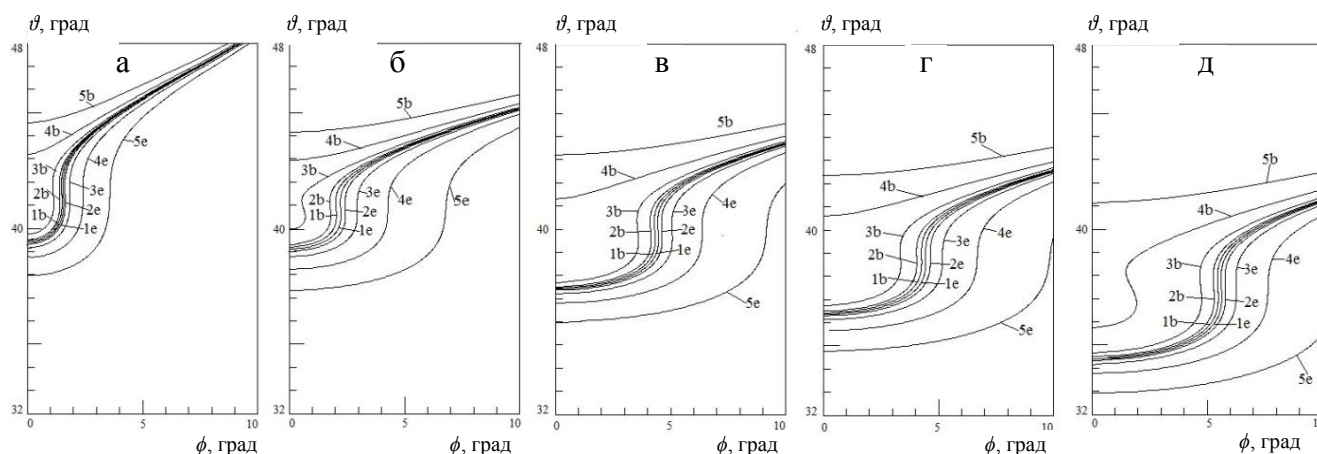


Рис. 1. Телесный угол в зависимости от ширины выходной диафрагмы для разных значений радиуса ЦВД. Пояснение в тексте

1-й — цифровой (от 1 до 5) на рис. 1 указывает на ширину ВД, 2-й буквенный — b или e — соответствует индексам В, Е в формулах (3), (4). На рис. 1 показан телесный угол для значений ширины выходной диафрагмы 1 — $d_{\text{Diaphr}} = 1$ мкм, 2 — $d_{\text{Diaphr}} = 3.3$ мкм, 3 — $d_{\text{Diaphr}} = 10$ мкм, 4 — $d_{\text{Diaphr}} = 33$ мкм, 5 — $d_{\text{Diaphr}} = 100$ мкм при разных значениях радиуса ЦВД для "окон" рис. 1: а — $P_y = 1$ мм, б — $P_y = 5$ мм, в — $P_y = 10$ мм, г — $P_y = 15$ мм, д — $P_y = 20$ мм. Энергия установлена на величину $E = E_p$, при которой максимум распределения электронов по ЦВД находится на ЦВД с радиусом P_y : для а — $E_p = 133.04$ эВ, для б —

$E_p = 125.54$ эВ, для в — $E_p = 114.96$ эВ, для г — $E_p = 102.46$ эВ, для д — $E_p = 87.34$ эВ (значения E_p взяты из работы [5]), точка эмиссии $R_0 = 5.01$ мм выбрана посередине ширины кольца эмиссии.

На рис. 2 представлены результаты вычисления телесного угла в зависимости от энергии электронов в окрестности энергии E_p . 1-й символ в маркировке линий на рисунке: 1 — $E = E_p - 0.02$ эВ, 2 — $E = E_p - 0.01$ эВ, 3 — $E = E_p$, 4 — $E = E_p + 0.01$ эВ, 5 — $E = E_p + 0.02$ эВ. В "окнах" рисунка кривые при значении радиуса ЦВД: а — $P_y = 1$ мм, б — $P_y = 5$ мм, в — $P_y = 10$ мм, г — $P_y = 15$ мм, д — $P_y = 20$ мм. О величине E_p для

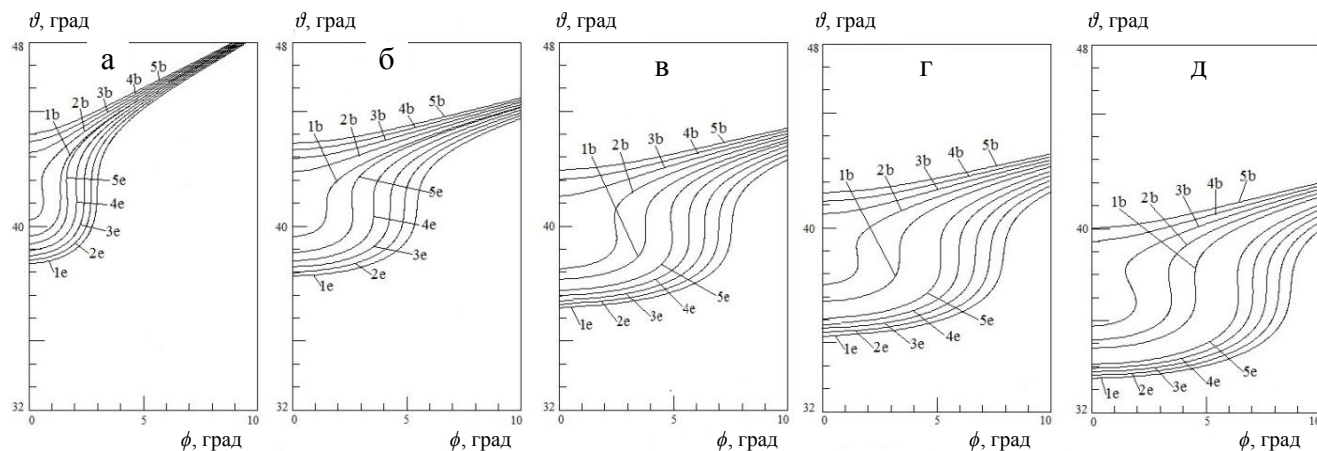


Рис. 2. Телесный угол в зависимости от энергии электронов в окрестности $E = E_p$ для разных значений радиуса ЦВД. Пояснения в тексте

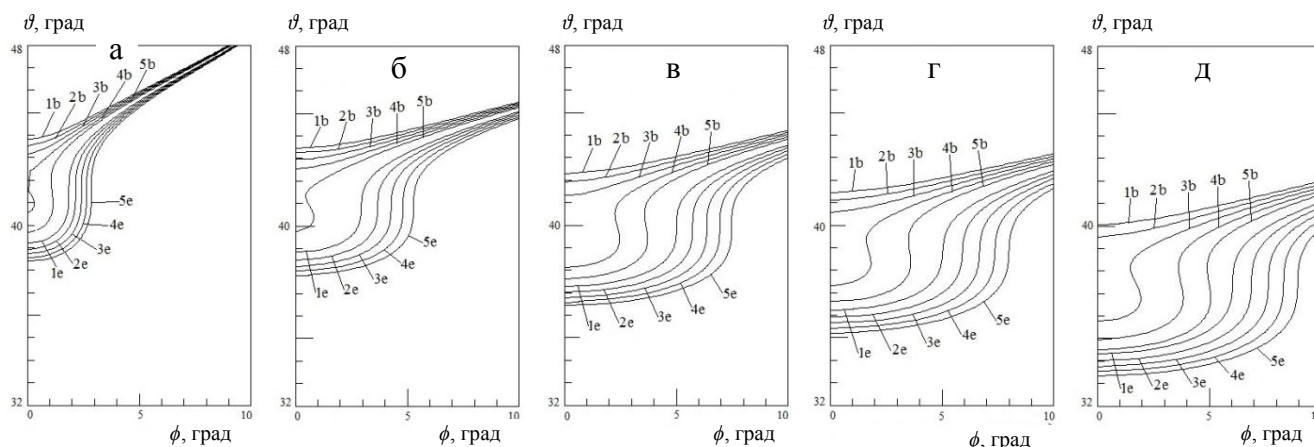


Рис. 3. Телесный угол в зависимости от положения точки эмиссии для разных значений радиуса ЦВД. Пояснения в тексте

каждого P_y и величине R_0 см. пояснения к рис. 1. Ширина ВД выбрана $d_{\text{Diaphr}} = 33$ мкм.

На рис. 3 приведены результаты вычисления телесного угла в зависимости от положения точки эмиссии: 1b, 1e — $R_0 = 5.00$ мм; 2b, 2e — $R_0 = 5.005$ мм; 3b, 3e — $R_0 = 5.01$ мм; 4b, 4e — $R_0 = 5.015$ мм; 5b, 5e — $R_0 = 5.02$ мм для разных значений радиуса ЦВД; "окна" рисунка: а — $P_y = 1$ мм, б — $P_y = 5$ мм, в — $P_y = 10$ мм, г — $P_y = 15$ мм, д — $P_y = 20$ мм. При этом ширина ВД $d_{\text{Diaphr}} = 33$ мкм, энергия электронов $E = E_p$ — энергия, при которой максимум распределения электронов по ЦВД находится на ЦВД с радиусом P_y (см. пояснение к рис. 1).

При рассмотрении рис. 1–3 с телесным углом важно понять, что делать, когда $\phi_E(x)$ существует, а $\phi_B(x)$ — нет. Например, на рис. 1 кривые 5b и 5e. В диапазоне углов $38^\circ < \vartheta < 43^\circ$ кривая 5e существует, а 5b — нет. При $\phi = 0$ кривая 5e упирается в ось ϑ в районе $\vartheta = 38^\circ$. Этому соответствует попадание электронов в дальний край ВД. При $\phi = 0$ и $\vartheta \approx 43^\circ$ электроны попадают в ближний край ВД. А в промежутке $38^\circ < \vartheta < 43^\circ$ точка попадания электронов перемещается от дальнего края ВД к ближнему. Так что в этом промежутке угла ϑ в качестве $\phi_B(x)$ можно использовать $\phi_B = 0$.

Отметим, что на рис. 1–3 функция $\phi(\vartheta)$ однозначна, а функция $\vartheta(\phi)$ не является однозначной.

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО УДАЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ОТ ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА

Наибольшее удаление электронов от внутреннего цилиндра определяется как решение уравнения (2) и выражается через функцию Ламберта [10]

$$r_m = r_{m0} \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{LambertW} \left(-2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \phi \cdot \frac{r_0^2}{r_{m0}^2} \right) \right\}, \quad (5)$$

где $r_{m0} = r_1 \cdot e^{k \cdot \sin^2 \vartheta}$ — наибольшее удаление электронов от внутреннего цилиндра при $\phi = 0$, т.е. без азимутальной компоненты скорости (коэффициент k определен выше), напомним, что для электронов U имеет отрицательный знак и в данной работе $U = -100$ В.

Решение уравнения движения мы собираемся искать в виде разложения в ряд по углу ϕ (или по некоторой функции от ϕ). Поэтому вполне логично расстояние r_m также искать в виде разложения в ряд. Для функции Ламберта существует разложение в степенной ряд [10] по переменной

$$x = -2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \phi \cdot \frac{r_0^2}{r_{m0}^2} \text{ в окрестности } x = 0:$$

$$\begin{aligned} \text{LambertW}(x) &= \\ &= x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6. \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнение расстояния r_m , вычисленного по

Табл. 1. Расстояние r_m , вычисленное по формулам (5, 6), и это расстояние, полученное при решении уравнения (2) методом половинного деления (см. [5]). (Все расстояния приведены в мм. Пояснения в тексте.)

Метод, степень ряда разложения	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 5^\circ$	$\phi = 10^\circ$	$\phi = 15^\circ$	$\phi = 20^\circ$
Работа [5]	32.6834057772	32.6805402909	32.6720264516	32.6581101140	32.6391943608
x^1	— " —	32.6805407933	32.6720343726	32.6581492394	32.6393138103
$+x^2$	— " —	32.6805402910	32.6720264598	32.6581102048	32.6391948449
$+x^3$	— " —	32.6805402909	32.6720264516	32.6581101142	32.6391943631
$+x^4$	— " —	32.6805402909	32.6720264516	32.6581101140	32.6391943608
$+x^5$	— " —	32.6805402909	32.6720264516	32.6581101140	32.6391943608

формулам (5, 6), и этого расстояния, полученного при решении уравнений (2) методом половинного деления (см. [5]), приведено в табл. 1 для значений угла ϕ : 0, 5, 10, 15, 20°.

В строке "Работа [5]" даны результаты решения уравнения (2) методом половинного деления (см. работу [5]). Строки, лежащие ниже, представляют результаты, полученные с применением формул (5, 6). В строке " x^1 " приведены результаты, для получения которых в формуле (6) оставлен только член с x в 1-й степени. В строке " $+x^2$ " оставлены члены с x в 1-й и 2-й степенях. И так — до x в 5-й степени. В столбце $\phi = 0^\circ$ все результаты одинаковы, т.к. при этом угле $r_m = r_{m0}$. При больших углах ϕ результаты применения формул (5, 6) показывают, что количество членов, необходимых для получения хорошего результата, невелико. Так, для $\phi = 20^\circ$ использование в формуле (6) членов до x^4 дает результат с точностью 10 знаков после запятой (в мм), не отличающийся от результата, полученного с помощью алгоритма работы [5]. Применение в (6) членов с x^5 дает результаты, не отличающиеся от результатов с x^4 . Поэтому результаты с x^6 не приведены. Ясно видно, что для получения r_m с относительной точностью не хуже 10^{-10} в формуле (6) достаточно оставить члены до x^3 включительно.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Обратимся к уравнению (1). Нас интересует присутствующий в этом уравнении в качестве параметра азимутальный угол ϕ (в $\sin^2 \phi$). Удобно выбрать в качестве параметра разложения в ряд

$x = \sin^2 \phi$. Этот параметр входит не только в подынтегральное выражение, но и в верхний предел интегрирования.

Первый коэффициент разложения правой части уравнения (1) в ряд (коэффициент при x^0)

$$T^{(0)} = \frac{2}{V_0} \cdot \int_{r_1}^{r_{m0}} \frac{dr}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \frac{1}{k} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right)}}, \quad (7)$$

представляет собой время прохождения дисперсного пространства электронами, имеющими нулевую азимутальную компоненту скорости. Это выражение было рассмотрено в работе [11]. Для него легко получить

$$T^{(0)} = \frac{4 \cdot \sqrt{k}}{V_0} r_{m0} \int_0^p e^{-y^2} dy. \quad (8)$$

Стоящий в правой части интеграл может быть сведен к функции ошибок, для которой есть интерполяционные формулы. Но если вычислить этот интеграл по формуле Гаусса, то точность можно получить заметно лучшей.

Второй коэффициент разложения (коэффициент при x^1):

$$T^{(1)} = \frac{2}{V_0} \cdot k^{3/2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot r_0^2 \times \\ \times \left[\int_{r_1}^{r_{m0}} \frac{dr}{2 \cdot r^2 \cdot \left(k \cdot \sin^2 \vartheta - \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \right)^{3/2}} - \right]$$

$$-\frac{1}{r_{m0} \cdot \left(k \cdot \sin^2 \vartheta - \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \right)^{1/2}} \Bigg|.$$

Подобно работе [11], делаем замену переменной $y^2 = k \cdot \sin^2 \vartheta - \ln \left(\frac{r}{r_1} \right)$. Отсюда получаем $r = r_1 \cdot e^{kx - y^2} = r_{m0} \cdot e^{-y^2}$, $dr = -2y \cdot r_{m0} \cdot e^{-y^2} \cdot dy$ и выражение для $T^{(1)}$ преобразовывается:

$$T^{(1)} = \frac{2}{V_0} \cdot k^{3/2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \frac{r_0^2}{r_{m0}} \cdot \left(\int_0^p \frac{e^{y^2}}{y^2} dy - \frac{1}{y} \Big|_{y \rightarrow 0} \right).$$

Видны две бесконечности: при нижнем пределе интегрирования и во втором члене, стоящем в скобках. Представим выражение, стоящее в скобках, в виде предела

$$\left(\int_0^p \frac{e^{y^2}}{y^2} dy - \frac{1}{y} \Big|_{y \rightarrow 0} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_\varepsilon^p \frac{e^{y^2}}{y^2} dy - \frac{1}{y} \Big|_{y \rightarrow \varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left(-\frac{e^{y^2}}{y} + \sqrt{\pi} \cdot i \cdot \operatorname{erf}(iy) \right) \Big|_\varepsilon^p - \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Видно, что члены с $1/\varepsilon$ сокращаются, $\operatorname{erf}(i0) = 0$ и после перехода к пределу остается только

$$\left(-\frac{e^{p^2}}{p} + \sqrt{\pi} \cdot i \cdot \operatorname{erf}(ip) \right), \text{ где второй член равен}$$

(см. [10]) $-2e^{p^2} \cdot \operatorname{Daw}(p)$, $\operatorname{Daw}(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \cdot dt$ —

функция (интеграл) Доусона, для которого существует интерполяционная формула и можно получить значения численным интегрированием.

В результате получаем

$$T^{(1)} = \frac{2}{V_0} \cdot k^{3/2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \frac{r_0^2}{r_{m0}} \cdot e^{p^2} \times \left(-\frac{1}{p} + 2 \cdot \operatorname{Daw}(p) \right). \quad (9)$$

Вполне аналогично получаем выражения для следующих коэффициентов ряда:

$$T^{(2)} = \frac{3}{2V_0} \cdot k^{5/2} \cdot \sin^4 \vartheta \cdot \frac{r_0^4}{r_{m0}^3} \cdot e^{3p^2} \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{3p^3} - \frac{2}{p} + 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{Daw}(\sqrt{3}p) \right), \quad (10)$$

$$T^{(3)} = \frac{5}{4V_0} \cdot k^{7/2} \cdot \sin^6 \vartheta \cdot \frac{r_0^6}{r_{m0}^5} \cdot e^{5p^2} \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{5p^5} - \frac{2}{3p^3} - \frac{20}{3p} + 40\sqrt{5} \cdot \operatorname{Daw}(\sqrt{5}p) \right). \quad (11)$$

Полное время пролета электрона через дисперсное пространство

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} \cdot \sin^2 \phi + T^{(2)} \cdot \sin^4 \phi + T^{(3)} \cdot \sin^6 \phi. \quad (12)$$

Расстояние вдоль оси Z, проходимое электроном при пролете через дисперсное пространство,

$$L = T \cdot V_0 \cdot \cos(\vartheta). \quad (13)$$

Сравнение расстояния, пройденного электроном в дисперсном пространстве, полученного прямым интегрированием в формуле (1) (см. работу [5]), с этим же расстоянием, вычисленным по формулам (12, 13), для углов вылета $\phi = 0, 5, 10, 15, 20^\circ$ приведено в табл. 2. В первом столбце применяются следующие обозначения: "Работа [5]" — в этой строке приведены результаты прямого интегрирования в формуле (1) (см. работу [5]).

Табл. 2. Сравнение результатов решения уравнения движения в приведенном к интегральному виду (1) методом прямого интегрирования (см. работу [5]) и методом разложения в ряд (7–13). Подробности в тексте

Метод, степень ряда разложения	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 5^\circ$	$\phi = 10^\circ$	$\phi = 15^\circ$	$\phi = 20^\circ$
Работа [5]	63.81075911	63.80767615	63.79851575	63.78354129	63.76318471
$\sin^0 \phi$	63.81075939	63.81075939	63.81075939	63.81075939	63.81075939
$+\sin^2 \phi$	— " —	63.80767686	63.79852295	63.78357579	63.76328954
$+\sin^4 \phi$	— " —	63.80767642	63.79851603	63.78354164	63.76318540
$+\sin^6 \phi$	— " —	63.80767642	63.79851603	63.78354156	63.76318499

В строке " $\sin^0 \phi$ " приведены результаты, для получения которых в (12) оставлен только член с $T^{(0)}$. В строке " $\sin^2 \phi$ " — оставлены $T^{(0)} + T^{(1)} \sin^2 \phi$ и т.д. до " $\sin^6 \phi$ ". В столбце с $\phi = 0^\circ$ по формулам (12, 13) получаются результаты с отсутствующей азимутальной компонентой скорости. Понятно, что они должны быть одинаковы. Результаты, приведенные в строке " $\sin^6 \phi$ ", оказываются совпадающими с результатами строки " $\sin^4 \phi$ " с точностью $1 \cdot 10^{-6}$ мм вплоть до $\phi = 20^\circ$. Это говорит о том, что если оставить в формуле (12) члены вплоть до $T^{(3)}$, то результат будет иметь относительную точность не хуже 10^{-8} .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Изучение телесного угла, стартовав в пределах которого электроны попадают на детектор, показало, что вдоль диапазона изменения энергии и вдоль диапазона изменения радиуса эмиссии, наблюдается максимум телесного угла. Из этого следует, что возможно получение максимума светосилы.

Из рис. 1–3 видно, что выбор диапазона изменения угла ϑ может привести к определенности диапазона изменения угла ϕ . Можно выделить три диапазона изменения углов (ϑ, ϕ) : на первом, начальном отрезке, кривая $\phi_E(x)$ перпендикулярно отходит от оси ϑ и далее идет почти перпендикулярно к оси ϑ . После некоторого переходного участка наблюдается отрезок, на котором $\phi_E(\vartheta)$ почти параллельна оси ϑ . На третьем участке наблюдается значительный рост $\phi_B(x)$ и $\phi_E(x)$. Причем с увеличением P_y наклон кривых $\phi_B(x)$ и $\phi_E(x)$ увеличивается. Исключением из этого является $\phi_B(x)$ для самых больших значений ширины ВД (33 мкм и 100 мкм), когда $\phi_B(x)$ не имеет почти горизонтальной части (кривые 4b и 5b для $P_y \leq 15$ мм и кривая 5b для $P_y = 20$ мм).

Весьма интересный эффект можно наблюдать на рис. 1. Если рассматривать разность $\phi_E(\vartheta) - \phi_B(\vartheta)$ на участке изменения ϑ , на котором график функции $\phi_E(\vartheta)$ почти параллелен оси ϑ , то видно, что $\phi_{3e} - \phi_{3b}$ растет при росте P_y , $\phi_{4e} - \phi_{4b}$ растет от рис. 1, а, до рис. 1, г, а на рис. 1, д, эта разность меньше, чем на рис. 1, г. Разность $\phi_{3e} - \phi_{3b}$ имеет максимум при $P_y = 5$ мм.

На рис. 2, б–д хорошо видно, что кривые 1е–5е идут с почти равным сдвигом друг относительно

друга. А вот разница $\phi_E - \phi_B$ сперва увеличивается (с увеличением энергии) от 1-й к 3-й кривой и, начиная с третьей кривой, уменьшается. Т.е. на этом рассматриваемом нами отрезке изменения энергии телесный угол и светосила имеют максимум вблизи $E = E_p$.

По-другому ведет себя разность $\phi_E - \phi_B$ на начальном участке изменения угла ϑ , там, где ϕ_B отсутствует и приходится брать $\phi_B = 0$. На этом участке ϕ_E растет с ростом энергии и поэтому телесный угол и светосила растут.

На третьем участке изменения угла ϑ визуальное трудно определить, как изменяется разность $\phi_E - \phi_B$ с ростом энергии.

На рис. 3 ситуация похожа на рис. 2. Начиная с рис. 3, б, графики $\phi_E(\vartheta)$ выглядят сдвинутыми друг относительно друга на примерно равное расстояние ($\Delta\phi \approx \text{const}$). А вот между графиками ϕ_B расстояние неодинаково, и сами графики не выглядят подобными. Это позволяет говорить о том, что разница $\phi_E - \phi_B$ имеет максимум вблизи $R_0 = 5.01$ мм, т.е. вблизи середины ширины кольца эмиссии.

Нахождение радиуса наибольшего отклонения электронов от внутреннего цилиндра ЦЗ методом решения уравнения (2) и последующим разложением функции Ламберта в степенной ряд показало хорошую сходимость и хорошее соответствие с результатами, полученными решением уравнения (2) методом половинного деления. Проверка проводилась для углов $0^\circ \leq \phi \leq 20^\circ$, а точность совпадения была не хуже 10^{-10} .

Решение уравнения движения в форме (1) методом разложения в ряд Тэйлора по параметру $x = \sin^2(\phi)$ показало хорошее совпадение с результатами прямого интегрирования уравнения (1) (см. [5]) с относительной точностью не хуже 10^{-8} .

В решении уравнения (1) (формулы (8)–(12)) не используется точное значение радиуса наибольшего отклонения электронов от внутреннего цилиндра ЦЗ r_m , а применяется r_{m0} — радиус наибольшего отклонения электронов от внутреннего цилиндра ЦЗ для электронов без азимутальной компоненты скорости. Из этого, однако, не следует, что r_m вычислять не следует. Радиус r_m используется для сравнения с радиусом внешнего цилиндра r_2 . Если для некоторой траектории $r_2 \geq r_m$, то такая траектория касается или пересекает верхний электрод ЦЗ. Т.е. эта траектория не проходит на детектор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заишквара В.В., Корсунский М.И., Лавров В.П., Редькин В.С.* О влиянии конечного размера источника на фокусировку пучка заряженных частиц в электростатическом спектрометре с цилиндрическим полем // ЖТФ. 1971. Т. 41, № 1. С. 187–192.
2. *Сар-Эль Х.З.* Анализатор типа цилиндрического зеркала с входной и выходной щелями на поверхности электрода. I. Нерелятивистский случай // Приборы для научных исследований. 1971. Т. 42, № 11. С. 43–48 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1684948
3. *Аксела С.* Аппаратная функция цилиндрического анализатора энергий электронов // Приборы для научных исследований. 1972. Т. 43, № 9. С. 122–128 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1685923
4. *Дрейпер Д.Е., Ли Ч.-И.* Характеристики анализатора типа цилиндрического зеркала с геометрией "кольцо-ось", "ось-ось" и $n = 1.5$ при конечных размерах источника и щели для углов средней траектории $30^\circ \dots 65^\circ$ // Приборы для научных исследований. 1977. Т. 48, № 7. С. 138–154 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1135170
5. *Шевченко С.И.* О свойствах цилиндрического зеркала при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости. Распределение электронов вблизи выходной диафрагмы // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 1. С. 90–101.
URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst1.php#abst15>
6. *Шевченко С.И.* О свойствах цилиндрического зеркала при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости. Фокусировка и линия фокусов // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 81–89.
URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst3.php#abst10>
7. *Крылов В.И., Шульгина Л.Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.
8. *Абрамовиц В.А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. *Козлов И.Г.* Современные проблемы электронной спектроскопии. М.: Атомиздат, 1978. 248 с.
10. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Учеб. пособие для вузов. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2006. 160 с.
11. *Заишквара В.В., Корсунский М.И., Космачев О.С.* Фокусирующие свойства электростатического зеркала с цилиндрическим полем // ЖТФ. 1966. Т. 36, № 1. С. 132–137.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург**

Контакты: *Шевченко Сергей Иванович,*
pyro2@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 14.11.2018

ON THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE ELECTRONS MOTION EQUATION IN A CYLINDRICAL MIRROR WHEN TAKING INTO ACCOUNT ELECTRONS HAVING AZIMUTHAL VELOCITY COMPONENT

S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

In this work, the solid angle was calculated by starting within which the electrons fall on the detector of a cylindrical mirror. The study of the solid angle, starting within which the electrons fall on the detector, showed that along the range of change of energy and along the range of change of the radius of emission, the maximum of the solid angle is observed. The radius of the largest deviation of electrons from the inner cylinder is obtained as a series, which provides good accuracy for angles up to 20° . The solution of the equation of motion of electrons in a cylindrical mirror, obtained as a Taylor series, showed good agreement with the results of direct integration of the modified equation of motion.

Keywords: energy analyzer, cylindrical mirror, emission ring, output aperture

Fig. 1. Solid angle depending on the width of the output diaphragm for different values of the radius of the cylinder containing the output diaphragm (CCOD)

Fig. 2. Solid angle depending on the electron energy in the vicinity $E = E_p$ for different values of the CCOD radius.

Fig. 3. Solid angle depending on the position of the emission point for different values of the CCOD radius

Table 1. The distance r_m calculated by the formulas (5, 6), and the same distance obtained by solving the equation (2) with the use of the bisection method

Table 2. Comparison of the results of solving the motion equation in the reduced to integral form (1) by the direct integration method (see [5]) and the method of expansion into series (7–13).

REFERENCES

1. Zashkvara V.V., Korsunskiy M.I., Lavrov V.P., Redkin V.S. [About influence of the final size of a source on focusing of a bunch of charged particles in an electrostatic spectrometer with the cylindrical field]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 1971, vol. 41, no. 1, pp. 187–192. (In Russ.).
2. Sar-El H.Z. Cylindrical mirror analyzer with surface entrance and exit slots. I. Nonrelativistic part. *Review of Scientific Instruments*, 1971, vol. 42, no. 11, pp. 43–48. DOI: 10.1063/1.1684948
3. Aksela S. Instrument function of a cylindrical electron energy analyzer. *Review of Scientific Instruments*, 1972, vol. 43, no. 9, pp. 122–128. DOI: 10.1063/1.1685923
4. Dreyper J.E., Li Ch.-I. Response functions of ring-to-axis, axis-to-axis, and $n = 1.5$ cylindrical mirror analyzers with finite source and slit and central angle 30° – 65° . *Review of Scientific Instruments*, 1977, vol. 48, no. 7, pp. 138–154. DOI: 10.1063/1.1135170
5. Shevchenko S.I. [About the properties of cylindrical mirrors for the accounting of electrons with the azimuthal component of velocity. The distribution of electrons near the output aperture]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 1, pp. 90–101. DOI: 10.18358/np-27-1-i90101 (In Russ.).
6. Shevchenko S.I. [About the properties of cylindrical mirrors for the accounting of electrons with the azimuthal component of velocity. The focusing and focus line]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 81–89. (In Russ.). DOI: 10.18358/np-27-3-i8189
7. Krylov V.I., Shulgina L.T. *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirvaniyu* [The reference book on numerical integration]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 370 p. (In Russ.).
8. Abramovic M., Stigan I. *Spravochnik po special'nyim funkciyam* [Reference book on special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 830 p. (In Russ.).
9. Kozlov I.G. *Sovremennye problemy elektronnoy spektroskopii* [Modern problems of electronic spectroscopy].

Moscow, Atomizdat Publ., 1978. 248 p. (In Russ.).

10. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saykov S.K. *W-funkciya Lamberta i ee primeneniye v matematicheskikh zadachah fiziki. Ucheb. posobie dlya vuzov* [Lambert's W-function and its application in mathematical problems of physics. Studies. a grant for higher education institutions]. Sarov,

FGUP "RFYAC-VNIIEF", 2006. 160 p. (In Russ.).

11. Zashkvara V.V., Korsunskiy M.I., Kosmachev O.S. [The focusing properties of an electrostatic mirror with the cylindrical field]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 1966, vol. 36, no. 1, pp. 132–137. (In Russ.).

Contacts: *Shevchenko Sergei Ivanovich*,
nyro2@yandex.ru

Article received by editing board on 14.11.2018