
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 532.517.4

© Б. П. Шарфарец, С. П. Дмитриев

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ
ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ БУССИНЕСКА.
ОБЗОР**

Рассмотрено математическое моделирование турбулентного течения в сжимаемой и несжимаемой вязкой жидкости на примере простейшей модели турбулентного движения, полученной в результате осреднения уравнений Навье—Стокса по Рейнольдсу и Фавру совместно с гипотезой Буссинеска о наличии турбулентной вязкости. Приведены алгоритмы осреднения уравнений Навье—Стокса для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Приведены соответствующие уравнения для осредненных и пульсационных составляющих параметров полей для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Полученные результаты полезны при проектировании излучателя для его работы в турбулентном режиме движения жидкости.

Кл. сл.: турбулентное течение, система уравнений Навье—Стокса, гипотеза Буссинеска, сжимаемая и несжимаемая вязкая жидкость, осреднение по Рейнольдсу, осреднение по Фавру, осредненное и пульсационное течение

ВВЕДЕНИЕ

В теории и практике научного приборостроения часто приходится иметь дело с различным рода течениями жидкости и газа. Очень часто такие течения являются турбулентными, и тогда возникает необходимость их математического моделирования. Эта задача является очень актуальной в силу того, что течения в природе, как правило, являются турбулентными, и одновременно наиболее сложной из всех задач моделирования течения жидкости. Турбулентное движение жидкости описывается нелинейными уравнениями движения, а это, кроме отмеченных математических трудностей, может нести, как это часто бывает в теории нелинейных задач, и дополнительные позитивные качества нелинейной системы в целом. Общеизвестно, что возникновение нелинейности в системе сопровождается появлением у нее новых качеств, отсутствующих в этой же системе при ее линейном режиме. В качестве примера можно привести явление самофокусировки световых и звуковых пучков и ряд других явлений. В этом ряду можно упомянуть и явления, связанные с рассмотрением нового вида акустического излучателя, основанного на применении электроосмотических явлений и рассмотренного в работах [1, 2] в условиях ламинарного движения жидкости. Учитывая приобретение новых качеств с повышением уровня нелинейности системы в задачах, описанных в [1, 2], необходимо рассмотрение появления в них существенно турбулентного движения жидкости.

Постановка проблемы

Отсюда возникает следующая постановка проблемы: выбрать приемлемую и умеренно сложную математическую модель описания турбулентного движения вязкой несжимаемой и сжимаемой однородной жидкости.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ**Предпосылки**

Рассмотрим турбулентный режим движения жидкости. Турбулентность — наиболее трудный для изучения режим движения жидкости. Вот как характеризуется турбулентный режим в работе [3, § 1.6]: "Турбулентность — это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течений. Она является обычным состоянием движущейся жидкости за исключением течений при малых числах Рейнольдса". Турбулентные потоки встречаются лишь при достаточно больших числах Рейнольдса, и они часто возникают как результат неустойчивости в ламинарных течениях, когда число Рейнольдса становится слишком большим. Эти неустойчивости связаны с взаимодействием вязких и инерционных членов в уравнении Навье—Стокса (УНС), а само число Рейнольдса характеризует величину отношения нели-

нейного и диссипативного членов в УНС. Отметим, что гидродинамическая турбулентность является предметом изучения теории хаоса [4]. Теория турбулентности достаточно полно изложена в литературе (см., например, [3, 5–10] и целом ряде других источников).

Согласно [5, с. 92], "...уравнения Навье—Стокса описывают течение жидкости и в турбулентном режиме, даже при экстремально больших значениях безразмерных параметров... (имеется в виду число Рейнольдса, прим. авт.). Уверенность в том, что это возможно, держится на результатах многочисленных успешных попыток использования этих уравнений для турбулентных течений. Сама возможность приложения уравнений Навье—Стокса к турбулентности совсем неочевидна, т. к. при их выводе было сделано достаточно сильное предположение о том, что тензор вязких напряжений включает в себя только линейные комбинации первых производных поля скорости. В сильно нелинейных режимах нельзя исключить, что тензор вязких напряжений будет иметь более сложную зависимость от структуры поля скорости".

Хотя формально турбулентные течения подчиняются УНС, полное решение УНС в турбулентном случае "выходит за рамки возможностей современных компьютеров" [3, § 1.4]. Это резюме не устарело за более чем 40 лет с момента издания книги [3] (современное состояние этого вопроса см., например, в [10, с. 95]). Кроме того, УНС, будучи нелинейным уравнением, за рядом редких исключений вырождения нелинейности не может быть решено аналитически, а только численно, причем численные решения могут быть некорректными, и неточность растет во времени (множество точных решений УНС конечно, а эти решения описывают тривиальные случаи движения жидкости (см., например, [6])).

Для решения УНС возникли многочисленные модели турбулентности, позволяющие упростить решение задачи расчетов характеристик турбулентных течений (см., например, [7, 10]). УНС определяют скорость, давление (и плотность в общем случае сжимаемой жидкости) потока жидкости. Основная идея моделей сводится к предположению о существовании средней скорости потока и его пульсационной составляющей (см. перевод известной статьи О. Рейнольдса — Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids at the Determination of the criterion. *Philos. Transact. Of the Royal Soc.*, 1895 — в работе [11, с. 185–227], а также [7, гл. 2], [10, гл. 1] и др.). Осреднение уравнений дает осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье—Стокса (RANS), которые определяют средний поток. В RANS помимо неизвестных средних скоростей появляются члены, содер-

жащие среднее от произведений пульсационных скоростей. Влияние этих членов, называемых тензором напряжений Рейнольдса, аналогично влиянию обычных напряжений, например давления или обычной вязкости.

Наличие в RANS тензора напряжений Рейнольдса делает систему уравнений RANS незамкнутой. Для получения уравнений, содержащих только средние скорость и давление, необходимо замкнуть уравнения RANS, моделируя каким-либо образом тензор напряжений Рейнольдса через параметры осредненного потока.

Существует большое количество моделей турбулентности, позволяющих либо замкнуть RANS, либо решить численно проблему определения параметров турбулентных потоков (см. URL-адрес https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_modeling). Приведем лишь некоторые из них:

- простейшая модель турбулентности — применение RANS совместно с гипотезой Буссинеска относительно тензора (турбулентных) напряжений Рейнольдса путем введения турбулентной вязкости (см. ниже);

- модели, основанные на уравнениях, связанных с кинетической энергией турбулентных течений (двухпараметрические модели) [5, § 3.6], [7, гл. 4];

- моделирование больших вихрей (LES, Large Eddy Simulation) [7, § 8.3], [10, с. 72];

- прямое численное моделирование (DNS, Direct Numerical Simulation) [7, § 8.2].

В дальнейших рассуждениях будем опираться на простейшую модель: RANS [5, § 3.2], [7, гл. 2], [11, с. 185–227], для замыкания которой используется гипотеза Буссинеска.

Осреднение по Рейнольдсу

В RANS принимается, что все неизвестные поля состоят из суммы осредненной части ψ_0 какого-либо поля ψ , характеризующего движение жидкости и пульсационной его части ψ_1 , т. е. $\psi = \psi_0 + \psi_1$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1; & p &= p_0 + p_1; & \rho &= \rho_0 + \rho_1; \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$, p , ρ — поля вектора скорости, давления и плотности в турбулентном течении; $\mathbf{F}$ — плотность сторонней объемной силы.

Осреднение по Рейнольдсу можно проводить по времени, по пространству и по ансамблю. Независимо от типа осреднения необходимо, чтобы оно удовлетворяло условиям Рейнольдса (оператор осреднения по Рейнольдсу символизирует

прямая черта сверху осредняемой величины f :
 $f = f_0 + f_1$, $\bar{f} = f_0$:

$$\begin{aligned} \overline{f+g} &= \bar{f} + \bar{g}; & \overline{af} &= a\bar{f}; & a &= \text{const}; & \bar{a} &= a; \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial s}; & \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g}; & \bar{f} &= \bar{f}; & \bar{f}_1 &= 0; \\ \overline{\bar{f}g} &= \bar{f}\bar{g}; & \overline{\bar{f}g_1} &= 0; & \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f_1g_1}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать осреднение по времени. В этом случае осредненные величины получают следующим образом [7, с. 13], [5, § 3.2.1]:

$$\psi_0(\mathbf{x}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{x}$ — пространственные координаты; t — время; T — интервал осреднения, выбираемый из условия $T_1 \ll T \ll T_2$, где T_1 — характерный масштаб колебаний пульсационной составляющей, T_2 — характерный масштаб медленных изменений величины $\psi_0(\mathbf{x}, t)$ во времени (см. [7, с. 13, рис. 2.1]). При этом справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [\psi(\mathbf{x}, \tau) - \psi_0(\mathbf{x}, \tau)] d\tau = \\ &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) - \psi_0(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = 0; \quad \bar{p}_1 = 0; \quad \bar{\rho}_1 = 0, \quad \bar{\mathbf{F}}_1 = 0. \quad (3)$$

Несжимаемая жидкость

Вначале рассмотрим несжимаемую жидкость. Исходная математическая модель для турбулентного движения жидкости в однородной несжимаемой среде записывается в виде УНС следующим образом [3, 5–10]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\rho_0 = \bar{\rho}$ — плотность несжимаемой среды; η — динамическая вязкость жидкости.

Применяя оператор осреднения по времени (2) к системе уравнений (4) и учитывая (3), получаем уравнения для осредненных полей [5, с. 99], [7, с. 16]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) &= \\ &= -\nabla p_0 + \eta \Delta \mathbf{v}_0 - \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + \mathbf{F}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Здесь } (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} v_{1x}v_{1x} & v_{1x}v_{1y} & v_{1x}v_{1z} \\ v_{1y}v_{1x} & v_{1y}v_{1y} & v_{1y}v_{1z} \\ v_{1z}v_{1x} & v_{1z}v_{1y} & v_{1z}v_{1z} \end{pmatrix} = v_{1i}v_{1j} \quad —$$

тензорное (внешнее) произведение векторов, равное произведению двух матриц (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) и $(v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})^T$, где T в индексе означает транспонирование матрицы; тензор $-\rho_0 \overline{(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1)} = -\rho_0 \overline{v_{1i}v_{1j}}$, $i, j = 1, 2, 3$, называется тензором турбулентных напряжений Рейнольдса или просто тензором Рейнольдса [5, с. 100], [7, с. 16]. Уравнение движения в (5) называется уравнением Рейнольдса для несжимаемой жидкости.

Как видно, исходные уравнения Навье—Стокса (4) применительно к осредненным величинам видоизменились: собственно в уравнении Навье—Стокса появился дополнительный член $\rho_0 \nabla \cdot \overline{v_{1i}v_{1j}}$, связанный с тензором напряжений Рейнольдса, вычисляемый по вектору пульсационной скорости $\mathbf{v}_1$. Этот тензор нельзя выразить через осредненные характеристики турбулентных полей и число неизвестных в (5) превышает число уравнений (система уравнений становится незамкнутой).

Самый простой подход к замыканию системы уравнений (5) состоит в попытке выражения тензора напряжений Рейнольдса через характеристики среднего поля скорости $\mathbf{v}_0$. При этом практически все модели оперируют понятием "турбулентная вязкость". В наиболее общем виде турбулентная вязкость вытекает из формулы Буссинеска, предложенной для тензора напряжений Рейнольдса T_{ij} применительно к несжимаемой жидкости [5, с. 102], [8, с. 220], [10, с. 29]

$$T_{ij} = -\rho_0 \overline{v_{1i}v_{1j}} = -\frac{2}{3} \rho_0 k \delta_{ij} + \eta_t \left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right).$$

Здесь $k = \frac{\overline{v_{1i}v_{1i}}}{2}$ — кинетическая энергия турбулентных пульсаций на единицу массы жидкости; η_t — турбулентная динамическая вязкость. В работе [8, с. 292–294] приведены некоторые результаты и библиография, касающиеся существующих оценок и характера пространственного поведения величины η_t . Так, например, согласно [5, с. 103], значения турбулентной вязкости могут на 9 порядков превышать значения молекулярной вязкости.

Концепция турбулентной вязкости предполагает, что перенос количества движения происходит

аналогично переносу за счет молекулярного движения (молекулярная вязкость). Подвергаясь справедливой критике как физически необоснованная, она, однако, широко применяется, поскольку позволяет получать вполне приемлемые результаты в инженерной практике [12, с. 16], в частности при описании крупномасштабных турбулентных течений [5, с. 103].

С учетом выражения для тензора напряжений Рейнольдса запишем (5) в следующем виде¹⁾

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla \left(p_0 + \frac{2}{3} \rho_0 k \right) + (\eta + \eta_t) \Delta \mathbf{v}_0 + \mathbf{F}_0, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0.$$

Подчеркнем, что турбулентная вязкость η_t не является свойством самой жидкости, как это имеет место для обычной вязкости, а зависит от самого течения, и для заданного течения может меняться от точки к точке [5, с. 102]. Самый простой подход к рассмотрению турбулентных течений состоит в предположении о том, что турбулентная вязкость и кинетическая энергия турбулентных пульсаций k для данного течения есть постоянные величины во всей области турбулентного течения. В этом случае $\nabla k = 0$ и добавка $\frac{2}{3} \rho_0 k$ к давлению p_0 в (6) пропадает. Уравнение Рейнольдса (6) для случая несжимаемой жидкости принимает при этом простейший вид [5, с. 103]

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla p_0 + (\eta + \eta_t) \Delta \mathbf{v}_0 + \mathbf{F}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \quad (7)$$

Сжимаемая жидкость

Рассмотрим далее случай однородной сжимаемой вязкой жидкости. Систему уравнений Навье—Стокса для суммарного течения [6, с. 73]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

запишем, исходя из того, что верна гипотеза Стокса $\zeta = 0$ (такой выбор сделан вследствие того, что в литературе по турбулентности в вязкой жидкости рассматривается именно эта форма УНС):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Представим (8) в тензорной форме [6, с. 73]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + F_i, \quad (8a) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) &= 0. \end{aligned}$$

В цепочке равенств (8a) в выражении для сохранения импульса члены под номерами (снизу) 1 и 2 равны с той разницей, что член под номером 2 записан в консервативном виде (см., например, [6, §§ 7, 15]).

Для получения достаточно простых осредненных уравнений из уравнений (8), (8a) одного осреднения Рейнольдса уже недостаточно. В этом случае применяется еще и осреднение по Фавру [7, 10, 13 и др.]. Согласно подходу Фавра²⁾, произвольная функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ представляется в виде суммы ее осредненной по Фавру величины $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ и флуктуационной части $\psi''(\mathbf{x}, t)$:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\psi}(\mathbf{x}) + \psi''(\mathbf{x}, t),$$

где величина $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ определяется так [7, § 5.2], [10, с. 99]

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho(\mathbf{x}, \tau) \psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \overline{\frac{\rho \psi}{\bar{\rho}}}.$$

Последний оператор позволяет связать величину, осредненную по Фавру с величинами, осредненными по Рейнольдсу

$$\tilde{\psi} = \overline{\frac{\rho \psi}{\bar{\rho}}}.$$

¹⁾ См. также, например, [13, выражение (2.17)].

²⁾ Осреднение по Фавру, еще называемое осреднением по массе, не привносит дополнительного физического смысла, а просто удобное математическое упрощение [13, с. 12].

Из последнего равенства следует цепочка равенств (см. [7, с. 73])

$$\overline{\rho\psi} = \overline{\rho\psi} = \overline{(\bar{\rho} + \rho_1)(\bar{\psi} + \psi_1)} = \bar{\rho}\bar{\psi} + \overline{\rho_1\psi_1},$$

позволяющая записать уравнение непрерывности из (8а) после осреднения по Рейнольдсу в компактном виде

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho v_i}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{v}_i).$$

Таким образом, для получения осредненного условия непрерывности по Фавру необходимо вначале осреднить исходное условие непрерывности из (8), (8а) по Рейнольдсу, а затем осредненные по Рейнольдсу величины представить через осредненные по Фавру величины.

Кроме приведенного выше преобразования для перехода в уравнении непрерывности от среднего по Рейнольдсу к среднему по Фавру, справедлив также целый ряд соотношений, связывающих осредненные по Фавру и по Рейнольдсу величины (см., например, [7, § 5.2]). Ниже приведены некоторые из них:

$$\begin{aligned} \overline{\rho\psi''} &= 0; & \overline{\rho\psi} &= \bar{\rho}\tilde{\psi} + \overline{\rho\psi''} = \bar{\rho}\tilde{\psi} + \overline{\rho_1\psi_1}; \\ \psi'' &= \psi - \tilde{\psi} - \frac{\rho_1\psi_1}{\rho}; & \psi'' &= -\frac{\rho_1\psi_1}{\rho} \neq 0. \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости $\tilde{\psi} = \bar{\psi}$.

Для получения достаточно простых осредненных уравнений на базе системы (8), (8а) поступают следующим образом (см., например, [7, § 5.3], [10, гл. II, § 2.7], [13, с. 12], [14, § 2.2.2, 2.2.3] и др.): составляющие скорости представляют по Фавру, а давление и плотность — по Рейнольдсу

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \tilde{v}_i + v_i'', \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho_1, \\ p &= \bar{p} + p_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Затем эти представления подставляются в систему (8), (8а). После чего производится осреднение по Рейнольдсу полученных уравнений. Затем, подставляя в получившиеся уравнения выражение для осредненной по Фавру скорости, получают окончательные (осредненные по Фавру) уравнения. Такая система уже может решаться обычными методами, сходными со случаем несжимаемой жидкости.

Запишем осредненную по Фавру систему (8а) в версии работы [14, с. 17]

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{T}_{ik} + \tilde{T}_{tik}) + \bar{F}_i, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\tilde{T}_{ik}$ и $\tilde{T}_{tik}$ — соответственно осредненные по Фавру вязкий молекулярный тензор напряжений и турбулентный тензор напряжений.³⁾ Они определяются в [14, с. 17] (турбулентный тензор напряженности см. также в [7, с. 181]) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ik} &= \eta \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right), \\ \tilde{T}_{tik} &= -\overline{\rho v_i'' v_t''} = \eta_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} k \bar{\rho} \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Здесь η , η_t — соответственно динамическая

вязкость и турбулентная вязкость; $k = \frac{\overline{v_i'' v_i''}}{2}$ —

удельная (на единицу массы) кинетическая энергия турбулентного движения [14, с. 14]. Заметим, что так определенный тензор турбулентной напряженности является распространением гипотезы Буссинеска для несжимаемых жидкостей на случай сжимаемых жидкостей (см. также [13, (2.23)] и URL-адрес

https://en.wikipedia.org/wiki/Turbulence_modeling).

Второй член справа в последнем выражении для турбулентной вязкости $\tilde{T}_{tik}$ по строению за

вычетом слагаемого $-\frac{2}{3} k \bar{\rho} \delta_{ik}$ совпадает с выра-

жением для вязкого тензора напряжений для сжимаемой жидкости при условии справедливости соотношения Стокса, т. е. выполнении условия равенства нулю объемной вязкости $\zeta = 0$ (см., [6, выражение (15.5), с. 73]) и переходит в выражение для тензора Рейнольдса для несжимаемой жидко-

сти при условии $\frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} = 0$.

В векторной форме система (10) запишется так:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right) =$$

³⁾ Именно версия работы [14] применяется в известном вычислительном пакете COMSOL.

$$= -\nabla \left(\bar{p} + \frac{2}{3} k \bar{p} \right) + (\eta + \eta_t) \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} (\eta + \eta_t) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{F}},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0.$$

В последней системе уже учтено, что, согласно гипотезе Стокса, объемная вязкость $\zeta = 0$, кроме того, согласно предыдущим обозначениям $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0$. Полагая $k = \text{const}$, получаем осредненную по Фавру систему уравнений Навье—Стокса для сжимаемой вязкой жидкости в каноническом виде:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right) =$$

$$= -\nabla \bar{p} + (\eta + \eta_t) \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} (\eta + \eta_t) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{F}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0.$$

Пульсационная составляющая

Выражение для пульсационной составляющей течения особенно просто получить для случая несжимаемой жидкости. Исходная система Навье—Стокса имеет вид (4). Если в эту систему подставить параметры поля $\rho = \rho_0$, $p = \bar{p} + p_1 = p_0 + p_1$, $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, а также $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$ то получаем следующую ее форму

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_0 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{F}_0}{\rho_0} + \frac{\mathbf{F}_1}{\rho_0},$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) = 0.$$

Если из последней системы вычесть систему для осредненных по Рейнольдсу параметров течения (7), то получаем систему уравнений для пульсационных параметров в случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 - \nu_t \Delta \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}_1}{\rho_0}, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Здесь $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ и $\nu_t = \frac{\eta_t}{\rho_0}$ — соответственно молекулярная и турбулентная кинематические вязкости.

Уравнение (12), записанное для пульсационных составляющих является нелинейным, вследствие наличия конвективного члена $\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1$. Кроме того при его решении предполагается известным вектор осредненной скорости $\mathbf{v}_0$. В случае, если конвективным членом можно пренебречь ввиду малого значения числа Рейнольдса для пульсационного течения, система (12) линеаризуется

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 - \nu_t \Delta \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}_1}{\rho_0}, \quad (12a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Аналогичные рассуждения годны и для случая сжимаемой вязкой жидкости.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрено математическое моделирование турбулентного течения в сжимаемой и несжимаемой вязкой жидкости на примере простейшей модели турбулентного движения: осреднение уравнений Навье—Стокса по Рейнольдсу и по Фавру совместно с гипотезой Буссинеска о наличии турбулентной вязкости. Приведены алгоритмы осреднения УНС для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Приведены соответствующие уравнения для осредненных и пульсационных составляющих параметров полей для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Приведенные результаты полезны при проектировании излучателя нового типа, описанного в [1, 2] при его работе в турбулентном режиме движения жидкости.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках НИИР по государственному заказу 0074-2014-0010, государственный регистрационный номер АААА-А16-116041310008-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электро-акустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35.
URL: <http://213.170.69.26/mag/2018/abst2.php#abst4>.
2. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электро-акустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. II. Акустический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 36–44.
URL: <http://213.170.69.26/mag/2018/abst2.php#abst5>.
3. *Брэдшоу П.* Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974. 278 с.

4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
5. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Ч. 1. Пермь.: Перм. гос. техн. ун-т, 1998. 108 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
7. Wilcox C.D. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1994. 460 p.
8. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
9. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
10. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
11. Проблемы турбулентности / Пер. М.А. Великанова и Н.Т. Швейковского. М.: НКТП СССР, 1936. 332 с.
12. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.
13. Упражнения по курсу "Моделирование турбулентности" // Курс лекций "Модели турбулентности". Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Институт прикладной математики и механики, кафедра гидроаэродинамики.
14. Larsson J. Numerical simulation of turbulent flows for turbine blade heat transfer applications. Doctoral Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Department of Thermo and Fluid Dynamics Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1998. 57 p.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург (Шарфарец Б.П.)**

ООО "БИОПРОДУКТ", Москва (Дмитриев С.П.)

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 15.06.2018

MODELING OF TURBULENT FLUID MOTION BASED ON THE BOUSSINESQ HYPOTHESIS. OVERVIEW

B. P. Sharfarets¹, S. P. Dmitriev²

¹*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

²*OOO "BIOPRODUKT", Moscow, Russia*

A mathematical simulation of a turbulent flow in a compressible and incompressible viscous fluid is considered using the example of the simplest model of turbulent motion, obtained as a result of averaging the Navier—Stokes equations from Reynolds and Favre in conjunction with the Boussinesq hypothesis on the presence of turbulent viscosity. Algorithms for averaging the Navier—Stokes equations for a compressible and incompressible fluid are given. Appropriate equations for the averaged and pulsating field parameters for incompressible and compressible liquids are given. The results obtained are useful in the design of a new type of radiator, described in [1, 2], when operating in the turbulent regime of fluid motion.

Keywords: turbulent flow, Navier—Stokes equations system, Boussinesq hypothesis, compressible and incompressible viscous liquid, Reynolds averaging, Favre averaging, the averaged and pulsating flow

REFERENCES

1. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part I. The hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priboorostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. Doi: 10.18358/np-28-2-i2535.
2. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part II. The acoustic aspect]. *Nauchnoe Priboorostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 36–44. Doi: 10.18358/np-28-2-i3644.
3. Bradshaw P. *An Introduction to Turbulence and its Measurement*. Oxford, Pergamon Press., 1975. 218 p. (Russ. ed.: Bradshaw P. *Vvedenie v turbulentnost' i ee izmerenie*. Translate G.S. Glushko, Moscow, Mir Publ., 1974. 278 p.).
4. Zaslavskij G.M., Sagdeev R.Z. *Vvedenie v nelinejnyu fiziku: ot mayatnika do turbulentnosti i haosa* [Introduction to nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 368 p. (In Russ.).
5. Friik P.G. *Turbulentnost': modeli i podhody. Kurs lekcij. Ch. 1* [Turbulence: models and approaches. Course of lectures. Part 1], Perm, Perm National Research Polytechnic University, 1998. 108 p. (In Russ.).
6. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics], Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
7. Wilcox C.D. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1994. 460 p.
8. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statisticheskaya gidromekhanika. Mekhanika turbulentnosti. Ch. 1* [Statistical hydro-mechanics. Mechanics of turbulence. P. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 640 p. (In Russ.).
9. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statisticheskaya gidromekhanika. Mekhanika turbulentnosti. Ch. 2* [Statistical hydro-mechanics. Mechanics of turbulence. P. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 720 p. (In Russ.).
10. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Modelirovanie krupnykh vihref v raschetah turbulentnykh techenij* [Modeling of large whirlwinds in calculations of turbulent flows]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 368 p. (In Russ.).
11. Velikanov M.A., Shvejkovskij N.T., eds. *Problemy turbulentnosti* [Turbulence problems]. Moscow, NKTP OF THE USSR Publ., 1936. 332 p. (In Russ.).
12. Belov I.A., Isaev S.A. *Modelirovanie turbulentnykh techenij* [Modeling of turbulent flows]. Saint-Petersburg, Baltic State Technical University, 2001. 108 p. (In Russ.).
13. Uprazhneniya po kursu "Modelirovanie turbulentnosti" [Exercises at the rate "Modelling of Turbulence"]. *Kurs lekcij "Modeli turbulentnosti"* [Course of lectures of "Turbulence model"], Saint-Petersburg, St. Petersburg State Polytechnical University, Institute of applied mathematics and mechanics, department of hydroaerodynamics. (In Russ.).
14. Larsson J. *Numerical simulation of turbulent flows for turbine blade heat transfer applications*. Doctoral Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Department of Thermo and Fluid Dynamics Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1998. 57 p.

Contacts: Sharfarets Boris Pinkusovich,
sharb@mail.ru

Article received in edition 15.06.2018