
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 532.546

© Б. П. Шарфарец, В. Е. Курочкин

**К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНОСТИ ЧАСТИЦ И МОЛЕКУЛ
В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Дан краткий обзор уравнений сохранения при фильтрации жидкости в пористой среде: сохранения импульса, энергии и массы. Приведены законы фильтрации Дарси, Форхгеймера и Бринкмана. Приведены стандартные краевые условия для решения задач фильтрации. Предложены выражения для вычисления подвижностей частиц, молекул и ионов при различных процессах фильтрации в произвольной пористой среде при фильтрации, подчиняющейся закону Дарси. Рассмотрен также ряд прикладных вопросов, относящихся к этой тематике: величина тока в поровом пространстве, стационарное поле температуры в круглом капилляре, содержащем пористую среду, приведено выражение для определения гидродинамического радиуса молекулы (радиус Стокса—Эйнштейна). Рассмотрены другие вспомогательные вопросы. Результаты работы могут быть расширены и на другие законы фильтрации, отличные от закона Дарси. Полученные результаты позволяют качественно улучшить синтез систем разделения, в которых применяются пористые наполнители.

Кл. сл.: пористая среда, законы сохранения, закон Дарси, закон Бринкмана, подвижность в пористой среде, гидродинамический радиус молекулы

ВВЕДЕНИЕ

В теории разделения примесей, молекул, ионов и других субстанций важную роль играет их подвижность (см., например, [1–3]). Очень часто в процессе разделения используются пористые среды (см., например, [3]). И если феномен подвижности в беспоровой среде изучен достаточно детально, то в пористой — не столь хорошо. Этот факт снижает эффективность планирования процессов разделения в пористых средах.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Задачей настоящей работы является детальное описание подвижности примесей, молекул, ионов и других субстанций в пористой среде с единых позиций, связанных с теорией фильтрации в пористых средах. Для этого в первом разделе работы дается краткий обзор математических моделей пористой фильтрации, а затем на этой основе получаются общие выражения для подвижностей соответствующих субстанций.

**ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ПОРИСТОЙ ФИЛЬТРАЦИИ****Определения**

Пористые среды являются популярной темой научных и практических исследований. Ежегодно

по этой тематике публикуются сотни статей. В этой работе ссылки даются только на ограниченное число наиболее фундаментальных публикаций по этой теме [4–9], в которых и представлена многочисленная библиография по этой тематике (библиография только по одному из направлений этой тематики в [6] содержит около 5000 наименований).

Приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения [4].

Важной характеристикой пористой среды является пористость (porosity) m , равная относительной объемной доле порового пространства в материале. Так, если в случае однородного пористого материала объемом V объем пор составляет V_p , то пористость этого образца равна [4, с. 9]

$$m = \frac{V_p}{V}. \quad (1)$$

Пористость является безразмерной величиной со значениями в интервале $m \in [0, 1]$.

Характерный размер пор — d [4, с. 10]. В реальных пористых средах размеры пор распределены случайным образом. Поэтому введение характерного размера может быть произведено неоднозначно, однако определение такой величины бывает удобно для проведения оценок по порядку при анализе уравнений (см., например, [4, с. 27, 28]).

Просветность (surface porosity)

Если сделать мысленный поперечный разрез образца пористой среды, то в образовавшемся сечении площадью S часть площади S_p будет приходиться на поры. Отношение

$$n = \frac{S_p}{S}, \quad (2)$$

называется просветностью [4, с. 11]. Величина просветности зависит от характера разреза, однако среднее значение просветности для большого набора параллельных сечений какого-либо фиксированного образца равно пористости этого образца [4, с. 11]. Это свойство позволяет приближенно считать пористость и просветность практически равными величинами для реальных пористых сред со случайной структурой: $n \approx m$ [4, с. 11].

Процедура осреднения (по материалам [4–7] и др.)

Как правило, внутренняя поверхность порового пространства имеет случайную структуру, поэтому прямое описание движения жидкости, а также теплопереноса, массопереноса и т. д. во всех подробностях оказывается невозможным или возможным в небольшом числе частных случаев (например, для искусственно созданной периодической среды). К счастью, однако, в большинстве приложений характерные линейные размеры L фильтрационных задач значительно больше характерного размера пор d , а при практическом изучении фильтрационных явлений обычно интересуются осредненными характеристиками процессов, происходящих в процессе фильтрации. Это позволяет при описании крупномасштабных явлений рассматривать пористый материал как сплошную среду, характеристики которой (плотность, давление, температура и т. д.) в каждой точке получаются в результате осреднения по некоторой окрестности с характерным линейным размером l , содержащей достаточно большое число пор. При осреднении исходят из необходимости придерживаться соотношения

$$d \ll l \ll L.$$

Окрестность каждой конкретной точки порового пространства радиусом l называют репрезентативным элементарным объемом (REV — representative elementary volume). Это может быть окрестность произвольной конфигурации (куб, эллипсоид, шар) с характерным линейным размером l . Далее в качестве такой окрестности используется шар радиусом l . При этом величина l должна выбираться так, чтобы результаты осреднения мало

зависели от объема шара V_B [6, с. 5].

Если необходимо осреднить некоторую физическую величину $A(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, определенную в жидкости, то, поскольку жидкость отсутствует в пористом скелете, величина $A(\mathbf{x}, t)$ доопределяется в этих областях нулевыми значениями. Среднее значение $\langle A(\mathbf{x}_0, t) \rangle$ величины $A(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{x}_0$ определяется в REV с центром шара в точке $\mathbf{x}_0$ радиусом l (обозначим это множество $B_l(\mathbf{x}_0)$)

$$\langle A(\mathbf{x}_0, t) \rangle = \frac{1}{V_B} \int_{B_l(\mathbf{x}_0)} A(\mathbf{x}, t) dv.$$

Здесь V_B — объем шара $B_l(\mathbf{x}_0)$, в котором присутствуют и элементы скелета.

Так полученное среднее значение $\langle A(\mathbf{x}, t) \rangle$ в каждой точке $\mathbf{x}$ (индекс 0 у вектора $\mathbf{x}$ опущен для удобства) порового пространства является непрерывной и почти всюду дифференцируемой функцией координат центра объема $\mathbf{x}$ и времени t . Причем величина $\langle A(\mathbf{x}, t) \rangle$ будет уже определена везде в рассматриваемой области порового пространства, даже если точка $\mathbf{x}$ попадает внутрь пористого скелета [4, с. 24, 25].

Аналогична процедура осреднения и для величин, определенных только в скелете, а также во всем поровом пространстве. Кроме того, в работах [4, с. 25, 26], а также [7, с. 11–13, 46–49] приводятся выражения, позволяющие получать осредненные временные и пространственные производные функций величин, характеризующих процессы в пористых пространствах. Это позволяет осреднять микроскопические дифференциальные уравнения, характеризующие поведение среды в беспоровом пространстве. Осредненные таким образом уравнения называются макроскопическими и описывают непрерывное поведение полей в поровом пространстве. Далее для обозначения осредненных полей (величин) угловые скобки $\langle \rangle$ для простоты не применяются, а процедура осреднения каждый раз оговаривается.

Скорость фильтрации

Для характеристики массопереноса при движении жидкости через пористую среду вводится векторная величина — скорость фильтрации $\mathbf{u}$. Рассмотрим определение $\mathbf{u}$ на примере движения жидкости вдоль трубки, заполненной пористым материалом. Для такого течения скорость фильтрации определяется как вектор $\mathbf{u}$, направленный в сторону движения жидкости, величина которого

равна объемному расходу жидкости Q (объему жидкости, протекающему в единицу времени) в расчете на единицу площади полного поперечного сечения трубки, включающего как поры, так и пористую среду. Скорость фильтрации, имеющая размерность скорости, тем не менее не равна скорости движения отдельных частиц жидкости. Постоянство объемного расхода однородной несжимаемой жидкости можно записать в виде [4, с. 12]

$$Q = |\mathbf{u}|S = vS_p, \quad (3)$$

где Q — объемный расход жидкости через трубку; v — среднее значение проекции микроскопической (внутренней) скорости частиц $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ на ось трубки; вычисленной по площади сечения, занимаемой порами. Отсюда

$$v = \frac{|\mathbf{u}|S}{S_p} = \frac{|\mathbf{u}|}{n} \approx \frac{|\mathbf{u}|}{m}, \quad (4)$$

т. е. средняя скорость частиц жидкости приблизительно в $\frac{1}{m}$ раз больше скорости фильтрации.

В общем случае неоднородного движения жидкости в пористой среде скорость фильтрации определяется как вектор $\mathbf{u}$, проекция которого на некоторое направление равна объемному расходу жидкости через единичную площадку, перпендикулярную данному направлению. С помощью этого определения легко вычисляется объемный расход Q и массовый расход Q_M жидкости через произвольную поверхность Σ , проведенную внутри пористой среды

$$Q = \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds, \quad Q_M = \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ ; ρ — плотность фильтруемой жидкости.

Удобство использования скорости фильтрации состоит в том, что с ее помощью можно находить расход жидкости без использования информации о пористости, которая явно не входит в последние поверхностные интегралы.

В работе [6, с. 5] скорость фильтрации $\mathbf{u}$, равная $\mathbf{u} = m\mathbf{V}$, трактуется как вектор средней скорости жидкости по объему V_B (т. е. по совокупному объему порового пространства и скелета). Здесь $\mathbf{V}$ — вектор средней внутренней скорости, определенной осреднением текущей (микроскопической) скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ только во внутрипоровой области объема V_B , что полностью соответствует процедуре осреднения, описанной выше.

При описании поведения жидкости в обычной (не пористой) среде используется система уравнений Навье—Стокса, в которую входят уравнение сохранения массы (неразрывности), уравнение импульса (собственно уравнение Навье—Стокса), уравнение сохранения энергии и термодинамическое уравнение состояния. В простейших случаях изучения движения жидкости в пористых средах для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений оказывается достаточным использовать только два закона сохранения — уравнения баланса массы и импульса [4, с. 14].

Закон сохранения массы

Интегральная формулировка этого закона для произвольного объема пористой среды V с границей Σ имеет вид [4, с. 14]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho m dV = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV,$$

где объем V неподвижен относительно пористой среды. Последнее выражение при условии достаточной гладкости подынтегральных функций легко преобразуется к дифференциальной форме (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5)$$

Если плотность жидкости постоянна, а пористая среда не деформируется, то уравнение неразрывности принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5a)$$

Баланс импульса

Исторически первым уравнением баланса импульса для случая медленного стационарного движения несжимаемой жидкости в неподвижной изотропной пористой среде было уравнение Дарси (Darcy), имеющее для фильтрации в поле силы тяжести следующий вид [4, с. 15]

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Здесь μ — динамическая вязкость жидкости; k — коэффициент, называемый проницаемостью пористой среды и зависящий от типа пористой среды; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести. По структуре уравнение Дарси похоже на микроскопическое уравнение Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости при $\mu = \text{const}$, находящейся в беспоровом пространстве

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (7)$$

При медленных (ползущих) течениях внутри пористой среды, для которых и справедлив закон Дарси, инерционные силы много меньше вязких сил, что и позволяет пренебречь стоящим слева в (7) членом

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (7a)$$

В работе [4, § 5] показано, что макроскопический закон движения при фильтрации жидкости в пористой среде (закон Дарси (6)) может быть получен с помощью процедуры осреднения из уравнения Навье—Стокса (7) или (7a). Наличие же последнего слагаемого справа в (7), (7a), описывающего действие вязкости, приводит при переходе к макроскопическому описанию к появлению объемной силы вязкого сопротивления, действующего на жидкость со стороны пористого скелета. В рассматриваемом случае медленных течений сила сопротивления направлена противоположно скорости фильтрации, а ее величина прямо пропорциональна вязкости и модулю скорости фильтрации.

При $\mathbf{g} = 0$ закон Дарси (6) приобретает вид

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (8)$$

Закон Дарси справедлив при выполнении двух условий: для малых скоростей течения жидкости внутри пор и при условии, что жидкость является ньютоновской (т. е. предполагается линейная зависимость тензора напряжений от тензора деформаций (см., например, [10, с. 204]) либо, по другому определению, по смыслу совпадающему с предыдущим, вязкость не зависит от величины тензора деформации).

Об учете инерционного члена

Как отмечается в [6, с. 8–10], ряд авторов делали попытки решения уравнения баланса импульса для пористых сред, учитывая в уравнении (6) инерционный член по аналогии с уравнением Навье—Стокса (7) [6, (1.8)]

$$\rho \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{m^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u}. \quad (9)$$

Однако, как следует из обзора в [6], такое обобщение практически некорректно по ряду причин. Присутствие слева в скобках члена $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ведет к следующим несоответствиям:

– в пористой среде в отличие от однородной среды нарушается закон сохранения импульса

в условиях отсутствия внешних сил; это происходит вследствие потери импульса жидкости из-за ее взаимодействия с поровым пространством;

– введение этого члена повышает порядок дифференциального уравнения, вследствие чего становится невозможным режим скольжения жидкости на границах раздела, характерный для пористых сред (см. ниже);

– этот член должен определять нелинейное (относительно скорости $\mathbf{u}$) сопротивление (см. ниже закон Форхгеймера), имеющее место на практике, однако присутствие этого члена не объясняет наличие нелинейного сопротивления, например, для стационарного однонаправленного потока, поскольку при любой скорости потока вклад этого члена тождественно равен нулю.

В силу этих причин инерционный нелинейный член $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ должен, согласно [6], быть в (9) опущен. Далее — о правомерности присутствия в (9) инерционного члена $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

Этот член был получен в предположении о том, что производная по времени коммутирует с пространственным осреднением, хотя в общем случае это несправедливо [6, с. 9]. Там же отмечен еще целый ряд противоречий, вызванных наличием этого члена. Наконец, анализ выражения (9) с опущенным членом $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

$$\rho \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u}$$

показывает, что его решением является затухающая экспонента со временем релаксации менее 1 с (оценочное значение окрестностей верхней границы времени релаксации для жидких металлов с кинематической вязкостью $\nu = 10^{-7}$ м²/с и проницаемостью $k = 10^{-7}$ м² ([6, с. 10])), что говорит о практической стационарности процессов фильтрации в пористых средах.

Таким образом, инерционный член в уравнении баланса импульса может быть опущен.

О корректировке закона Дарси

Существует возможность корректировки закона Дарси для немалых скоростей фильтрации [4, с. 18–21], [6, с. 10–14]. Такую возможность дает двучленный закон фильтрации Форхгеймера (Forchheimer), который выглядит следующим образом [4, (4.3)], [6, (1.12)]:

$$0 = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} - \beta \frac{\rho |\mathbf{u}|}{\sqrt{k}} \mathbf{u}. \quad (10)$$

Здесь β — безразмерный параметр, зависящий

от структуры пористой среды. В [4, с. 21] дана грубая оценка этого параметра $\beta \sim O(1)$. В [6, с. 11], [7, с. 41] приведены точные выражения для его определения через параметры пористой среды — $\beta = b\sqrt{\alpha m^3}$. Здесь b — параметр; α — параметр, фигурирующий в определении коэффициента проницаемости (см. ниже).

Линейный по скорости фильтрации $\mathbf{u}$ член в (10) доминирует при малых числах Рейнольдса, вычисляемых относительно размера частиц, а квадратичный — при больших числах Рейнольдса.

Наконец, в работе [7, с. 41] приведена корректировка выражения (10) для учета влияния эффекта вязкого пограничного слоя при промежуточных значениях числа Рейнольдса; для этого в (10) добавлен еще один член

$$0 = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} - \frac{H \sqrt{\rho \mu |\mathbf{u}|}}{k^{3/4}} \mathbf{u} - \beta \frac{\rho |\mathbf{u}|}{\sqrt{k}} \mathbf{u}.$$

Здесь H — безразмерный коэффициент, зависящий от пористости k и от микроструктуры скелета.

В работе [4, с. 21–24] приведены уравнения баланса импульса для пористых сред для ряда отличных от линейных соотношений между тензорами напряжений и деформации, т. е. когда жидкость отличается от ньютоновской. Здесь, однако, приводить их не будем, отсылая читателя к первоисточнику.

Замечание 1. Как следует из выражений для балансов импульса для пористой среды Дарси (6) и Форхгеймера (10), в случае если полем силы тяжести можно пренебречь, вектор градиента давления ∇p совпадает с вектором скорости фильтрации $\mathbf{u}$.

Уравнение Бринкмана

В качестве альтернативы соотношениям Дарси, Форхгеймера (6) и (10) при описании динамики жидкости в пористых средах используется уравнение Бринкмана (H.C. Brinckman) [6, с. 15–18]

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{u} + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{u}, \quad (11)$$

первоначально полученное автором в приближении больших значений пористости среды.

Как видно, в уравнении (11) справа присутствуют два вязкостных члена. Первый — обычный вязкостный член в уравнении Дарси, второй — совпадает по форме с вязкостным членом в уравнении Навье—Стокса для несжимаемой жидкости (7). Уравнение (11) представляет собой стационарное уравнение баланса объемных сил с размерностью $[\text{Н/м}^3]$. Первый член в правой части представляет собой по смыслу силу, сходную со стоковой силой сопротивления при скорости потока

$\mathbf{u}$ и пропорциональную первой степени скорости, второй член учитывает сдвиговое сопротивление движению, вызванное пористым каркасом. Отметим, что решением стационарного уравнения (11) будет отличная от константы скорость потока $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) \neq \text{const}$, т. к. в противном случае уравнение Бринкмана (11) редуцируется к уравнению Дарси (6) или (8). А это означает, что на баланс (11) оказывают влияние и степени модуля скорости $\mathbf{u}$ выше первой. В этом смысле можно провести аналогию между законами Бринкмана (11) и Форхгеймера (10) с тем отличием, что в них заложен разный физический смысл.

Коэффициент $\tilde{\mu}$ называют коэффициентом эффективной вязкости. Бринкман полагал, что $\tilde{\mu}$ совпадает с коэффициентом динамической вязкости $\tilde{\mu} = \mu$. Однако дальнейшие исследования показали, что в общем случае это не так. Оказалось, что имеет место соотношение [6, с. 15]

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{mT^*}.$$

Здесь T^* — извилистость (tortuosity) порового пространства. Таким образом, отношение $\tilde{\mu}/\mu$ зависит от геометрии пространства. Оно может быть как больше, так и меньше единицы, и $\tilde{\mu}/\mu \rightarrow 1$ при $mT^* \rightarrow 1$.

Согласно [6, с. 16], для многих практических случаев нет нужды вводить второй член справа в (11). Это становится важным в случаях больших значений пористости, а также когда на границе контакта пористых сред с непористыми средами принимаются условия прилипания и учет этого члена оправдан в пограничном слое пористой среды с толщиной порядка $(\tilde{\mu}k/\mu)^{1/2}$. Кроме того, модель Бринкмана оправдана для такой структуры пористого пространства, когда размеры частиц твердой фазы имеют порядок η^3 , где $\eta \ll 1$ — характерный интервал между соседними частицами; для более крупных частиц по сравнению с η^3 фильтрация регулируется законом Дарси; для частиц, имеющих порядок, меньший чем η^3 , поток может быть описан в рамках модели Навье—Стокса.

Для ознакомления с более подробными деталями отсылаем к первоисточнику [6], где содержится очень обширная библиография, в том числе и по уравнениям Бринкмана.

Коэффициент проницаемости

Коэффициент проницаемости k зависит только от свойств пористой среды и определяется

в основном геометрией порового пространства. Он имеет размерность площади, а его величина имеет порядок квадрата характерного размера пор d [4, с. 16]: $k \sim d^2$. В работах [6, с. 13], [7, с. 41] дано более детальное выражение

$$k = \frac{m^3 d^2}{\alpha(1-m)^2},$$

где α — константа, определяемая геометрией скелета. Как видно из последнего выражения для коэффициента проницаемости, при $m \rightarrow 0$ (полное отсутствие пор в скелете) коэффициент проницаемости $k \rightarrow 0$, при $m \rightarrow 1$ и $d \rightarrow 0$ (т. е. при устремлении пористого пространства к беспоровому) в выражении для k возникает неопределенность

вида $\frac{0}{0}$. Не вникая в поведение коэффициента α ,

из физических соображений ясно, что этот предел должен быть равным единице

$$\lim_{\substack{m \rightarrow 1 \\ d \rightarrow 0}} k = 1.$$

Для примера [4, с. 16]: типичные значения проницаемости для песчанников имеют порядок 10^{-15} – 10^{-12} м², для почв 10^{-13} – 10^{-11} м². В работе [6, с. 3] приведена таблица свойств ряда пористых материалов, включая коэффициенты проницаемости.

Для неоднородных пористых сред коэффициент проницаемости является функцией пространственных координат и может меняться во времени $k = k(x, y, z, t)$ (например, при деформациях пористого скелета или за счет его засорения или растворения). То же относится, очевидно, и к пористости, и проницаемости.

Другие уравнения сохранения

Выше отмечалось, что при решении простейших задач фильтрации в пористых средах достаточно двух макроскопических уравнений сохранения — массы и импульса. Однако на практике необходимо уметь формулировать и другие макроскопические уравнения сохранения. Так, при переменном поле температуры возникает температурная вариация параметров пористой среды, в частности коэффициента динамической вязкости, которые может быть необходимо учесть. Поэтому надо решать уравнение теплопереноса, получаемое из уравнения сохранения энергии. То же относится к уравнению массопереноса. Здесь приведем макроскопический вариант этих уравнений.

Уравнение сохранения энергии (теплопереноса)

Вывод макроскопического уравнения энергии для пористой среды проводится методом осреднения микроскопического уравнения энергии [4–6] для каждой из фаз пористой среды. Остановимся на результатах, полученных в работах [4, 6]. В работе [4, с. 29–31] осредняется исходное микроскопическое уравнение сохранения энергии [11, § 49]. В [6, гл. 2] осредняются уравнения теплопереноса. Приведем уравнения сохранения энергии для пористых сред, выписанные в [6], как наиболее практически пригодные.

Вначале укажем исходные предположения, принятые в [6] при получении нижеследующих уравнений теплопереноса в пористых средах:

- пористая среда является изотропной;
- диссипативные потери (см. в [11, с. 273]) не учитываются;
- теплоперенос (теплопроводностью) в обеих фазах идет одновременно без разрыва температуры на границе фаз;
- пористость равна просветленности $m = n$.

После осреднения микроскопических уравнений теплопереноса для твердой и жидкой фаз пористого пространства с учетом приведенных выше предположений получены следующие макроскопические уравнения теплопереноса в отдельности [6, с. 31]:

- для твердой фазы (индекс s (solid))

$$(1-m)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-m) \nabla \cdot (\kappa_s \nabla T_s) + (1-m) q_s, \quad (12)$$

- для жидкой фазы (индекс f (fluid))

$$m(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T_f = m \nabla \cdot (\kappa_f \nabla T_f) + m q_f. \quad (13)$$

Здесь величины в индексированных скобках $(\dots)_s$ и $(\dots)_f$ — соответствующие плотности и удельные теплоемкости обеих фаз; T_s , T_f — температурные поля в фазах после осреднения по объему; κ_s , κ_f — коэффициенты теплопроводности; q_s , q_f — объемные источники тепла с размерностью [Вт/м³] (тепла, выделяемого в единице объема среды в единицу времени).

После объединения парциальных уравнений теплопереноса (12), (13) получено общее макроскопическое уравнение теплопереноса для единого

температурного поля T во всей пористой среде [6, с. 32]:

$$\begin{aligned}(\rho c)_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \nabla \cdot (\kappa_{\Sigma} \nabla T) + q_{\Sigma}, \\ (\rho c)_{\Sigma} &= (1-m)(\rho c)_s + m(\rho c_p)_f, \\ \kappa_{\Sigma} &= (1-m)\kappa_s + m\kappa_f, \\ q_{\Sigma} &= (1-m)q_s + mq_f.\end{aligned}\quad (14)$$

Уравнение массопереноса

Макроскопическое уравнение массопереноса в пористой среде для концентрации i -й примеси имеет структуру, сходную с уравнением теплопереноса, с тем отличием, что рассматривается только жидкая фаза. Пусть c_i — концентрация i -й примеси в жидкой фазе. Тогда макроскопическое уравнение массопереноса для нее имеет вид [6, с. 51]

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i = m \nabla \cdot (D_i \nabla c_i). \quad (15)$$

Здесь D_i — коэффициент диффузии i -й примеси.

В случае, если нельзя пренебречь эффектами Дюфура и Соре, уравнения теплопереноса и массопереноса становятся связанными. Тогда их необходимо решать как систему связанных уравнений. Такая система для макроскопических уравнений массо- и теплопереноса выписана в [6, с. 52].

Соотношения на разрывах и типичные краевые условия

Эти соотношения для задач пористой фильтрации приведем конспективно из [4, с. 30–37]. Связь параметров при переходе через поверхность разрыва получается из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии [4, (6.1)–(6.3)].

На непроницаемых границах ставится условие непротекания

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Отметим, что при микроскопическом описании движения жидкости (при рассмотрении скорости $\mathbf{v}$) на границе стенки и поверхности пор ставится условие прилипания

$$\mathbf{v} = 0,$$

т. е. обращается в нуль как нормальная, так и касательная составляющие микроскопической скорости. При макроскопическом описании движения жидкости на границе можно поставить условие только на объемный поток жидкости через границу: он должен быть равен нулю, т. к. стенка непроницаема. Касательная же составляющая скоро-

сти фильтрации $\mathbf{u}_\tau$ может быть отлична от нуля — жидкость может мигрировать (проскальзывать) в пристеночном слое вдоль границы, что вызвано несхожестью математических моделей в обоих случаях. Микроскопическое уравнение движения (уравнение Навье—Стокса (7)) имеет второй порядок пространственных производных, а макроскопические (закон Дарси (6), закон Форхгеймера (10)) зависят от скорости алгебраически. При использовании закона Бринкмана (11) это противоречие снимается.

Граница пористой среды с чистым флюидом

Как правило, на таких границах ставятся условия сохранения массы

$$[\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0,$$

и непрерывности давления

$$[p] = 0,$$

где квадратные скобки означают скачок величины в скобках при переходе через границу.

В работах [4, с. 34–37] и [6, с. 18–25] приведены и другие виды граничных условий, встречающиеся в процессе фильтрации в пористых средах.

О ПОДВИЖНОСТИ

Понятие подвижности обычно рассматривают применительно к носителям заряда, находящимся в приложенном внешнем электрическом поле. Ее определение дано, например, в [10, с. 245]. Однако здесь несколько перефразируем это определение. *Подвижностью* u_0 называется средняя скорость компонента в растворе при действии на него объемной силы единичной величины независимо от происхождения этой силы. Размерность объемной силы при этом может меняться, например, быть в единицах Н/м³.

Для примера получим из этого определения макроскопическую подвижность единицы объема при фильтрации в пористом пространстве, определяемой законом Дарси (8).

Как видно из (8), объемной силой здесь является градиент давления ∇p . Тогда из приведенного выше определения очевидно, что макроскопическая подвижность u_0 выражается так:

$$\tilde{u}_0 = \frac{k}{\mu}, \quad (16)$$

с размерностью $[\tilde{u}_0] = \left[\frac{k}{\mu} \right] = \frac{\text{м}^3 \text{с}}{\text{кг}}$, что следует и из

(8) напрямую и из размерностей $[k] = \text{м}^2$ и $[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$. Отметим, что (16) представляет собой среднюю макроскопическую скорость фильтрации при действии единичной объемной силы.

Существуют разнообразные определения подвижности. Приведем примеры из [1], где, согласно данному выше определению, подвижность выводится из законов, где скорость миграции связана с силой линейным соотношением, коэффициент которого и определяет подвижность. Далее пользуемся понятием микроскопической скорости $\mathbf{v}$.

– Стоксова подвижность рассматривается в случае баланса какой-либо сторонней силы $\mathbf{F}$, действующей на шарик радиусом a , помещенный в жидкость с динамической вязкостью μ и силой сопротивления Стокса, возникающей при движении шарика со скоростью $\mathbf{v}$ при малых числах Рейнольдса (ползущее течение). Этот баланс определяется соотношением [11, с. 93]

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a \mathbf{v},$$

откуда получаем

$$\mathbf{v} = \frac{1}{6\pi\mu a} \mathbf{F}, \quad (17)$$

а отсюда (см., также [6, с. 192])

$$u_{0st} = \frac{1}{6\pi\mu a}. \quad (18)$$

– Электроосмотическая подвижность выводится также в предположении ползущего течения [1, с. 159], [2, §63], т. к. уравнение баланса импульса рассматривается в предположении о малости числа Рейнольдса. Электроосмотическая скорость вне диффузного слоя определяется в системе СИ выражением [1, с. 159]

$$\mathbf{U}_{eo} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} \mathbf{E}, \quad (19)$$

где ζ — электрокинетический потенциал (дзета-потенциал) [3, с. 34]; ε , ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды и электрическая постоянная соответственно; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Отсюда

$$u_{eo} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu}. \quad (20)$$

– Электрофоретическая (ионная) подвижность заряженной частицы (в предположении ползущего течения сферической частицы радиусом a и зарядом Ze , где e — элементарный заряд (заряд протона), Z — валентность иона) в электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}$ в стоковом приближении определяется из уравнения [1, с. 144]

$$\mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{drag} = Ze\mathbf{E} - 6\pi\mu a \mathbf{U}_{ion} = 0,$$

или

$$\mathbf{U}_{ion} = \frac{Ze}{6\pi\mu a} \mathbf{E}, \quad (21)$$

откуда для частицы следует выражение для ионной электрофоретической подвижности

$$u_{0epion} = \frac{Ze}{6\pi\mu a}. \quad (22)$$

Это — частный случай стоковой подвижности, когда сила $\mathbf{F}$ определена равенством $\mathbf{F} = Ze\mathbf{E}$, однако, как видно из сравнения (18) и (22), множитель Ze из соображений удобства вынесен в выражение для подвижности.

– Электрофоретическая подвижность диэлектрической частицы можно определить из соотношения для скорости электрофоретической миграции в электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}$ [3, с. 39]:

$$\mathbf{U}_{epd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} \mathbf{E}, \quad (23)$$

откуда следует электрофоретическая подвижность диэлектрической частицы

$$u_{0epd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu}. \quad (24)$$

Согласно выводу этого выражения в [2, §§ 63, 64], здесь также предполагается приближение ползущего течения; как отмечается в [3, с. 40], имеет место соотношение $u_{0epd} / u_{0epion} \approx 1/\lambda a$, где λ — дебаевская длина [2, с. 97], [3, с. 16].

О МАКРОСКОПИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ МИГРАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В ЖИДКОСТИ

При решении уравнения Навье—Стокса необходимо учитывать возможность наличия объемных сил различной природы: электрической, магнитной и т. д., оказывающих влияние на динамику жидкости. В контексте тематики данной работы приведем уравнение Навье—Стокса для несжи-

маемой жидкости вида (7) с учетом действия электрического поля [1, с. 24]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (25)$$

Здесь ρ_{el} — плотность электрического заряда в функции координат и времени с размерностью $[\rho_{el}] = \text{Кл/м}^3$; $\mathbf{E}$ — по-прежнему вектор напряженности электрического поля. Упростим уравнение (25), опустив в нем несколько членов после ряда допущений. А именно опустим стоящий слева инерционный член в предположении о малости числа Рейнольдса (приближение Стокса; режим ползущего течения). Предположим отсутствие градиента давления, опустив первый член справа. И наконец, опустим второй член справа, пренебрегая полем силы тяжести. В результате после сделанных предположений уравнение (25) преобразуется к упрощенному виду

$$\mu \Delta \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E} = 0.$$

Последнее уравнение перепишем иначе:

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \rho_{el} \nabla \varphi = 0. \quad (26)$$

Здесь φ — скалярный потенциал вектора электрической напряженности $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Как видно, уравнение (26) подобно уравнению, которое получается из уравнения Навье—Стокса (7), если в нем пренебречь всеми членами кроме первого и третьего членов справа

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad (27)$$

и из которого осреднением найден закон Дарси (8) для макроскопического движения жидкости в пористой среде. Уравнения (26) и (27) совершенно идентичны при выполнении условия

$$\nabla p = \rho_{el} \nabla \varphi.$$

Если, кроме того, решение ищется в рамках одних и тех же геометрии, краевых условий и физических параметров задачи, то совершенно правдоподобно ожидать макроскопического закона движения жидкости в пористой среде при микроскопическом законе движения (27), сходного с законом Дарси (8) движения жидкости. Запишем его в следующем виде

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (28)$$

Для подвижности и в этом случае, по определению, остается справедливым выражение (16).

Как уже отмечалось выше, выражения (17)–(24) получены в рамках приближения Стокса для урав-

нений баланса импульса.

Итак, уравнениям Навье—Стокса для микроскопического описания движения жидкости в приближении Стокса (26) и (27) соответствуют законы Дарси макроскопического движения жидкости в пористой среде (8) и (28) соответственно.

Как видно из (8) и (28), макроскопическая подвижность в обоих случаях равна отношению (16) коэффициента проницаемости k к динамической вязкости μ . При этом коэффициент проницаемости k характеризует свойства только порового пространства, а динамическая вязкость μ характеризует только свойства жидкости в межпоровом пространстве.

ПОДВИЖНОСТЬ В ПОРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С помощью качественных рассуждений попытаемся определить, как должны измениться выражения для парциальных подвижностей в поровом пространстве. Макроскопическая подвижность (16), полученная в результате осреднения, является интегральной характеристикой всего объема однородной жидкости. Если проанализировать подвижности при различных процессах в беспоровом пространстве (18), (20), (22) и (24), то можно увидеть, что все они зависят обратно пропорционально от динамической вязкости μ , также как и макроскопическая подвижность (16). Все остальные стоящие в них величины являются эксклюзивными, зависящими от самого процесса. Однако выражения (18), (20), (22) и (24) относятся к беспоровому пространству и, как видно из выражения (16), отличаются от него отсутствием множителя k — коэффициента проницаемости.

Совершенно очевидно, что макроскопические аналоги подвижностей (18), (20), (22) и (24) в поровом пространстве должны зависеть от коэффициента проницаемости k .

Если в однородной жидкости в процессе движения в поровом пространстве присутствуют фракции с различной подвижностью каждая, то следует говорить об осредненной подвижности для каждой фракции в отдельности. В силу линейности процедуры осреднения, а также линейности микроскопических уравнений (26) и (27) очевидно, что макроскопические аналоги подвижностей (18), (20), (22) и (24) в поровом пространстве должны содержать первую степень коэффициента проницаемости k . Однако добавление в (18), (20), (22) и (24) коэффициента k с размерностью $[k] = \text{м}^2$ нарушает их исходную размерность. Для нейтрализации этого расхождения все рассматриваемые подвижности необходимо разделить

на один и тот же коэффициент χ также с размерностью $[\chi] = \text{м}^2$. Смысл этого коэффициента прост: он должен характеризовать поперечное сечение частиц или ионов, участвующих в переносе во внутривыводовом пространстве. Отметим, что минимальным значением коэффициента χ должно быть значение $\chi_{\min} = 1$ в случае, когда проницаемость частиц или ионов сквозь поры совпадает с проницаемостью самой буферной жидкости (т. е. когда частицы беспрепятственно, как буферная жидкость проникают сквозь поровое пространство и подвижность частиц или ионов от коэффициента χ не зависит). Максимальным значением следует признать $\chi_{\max} = \infty$, когда проникновение частиц сквозь поровое пространство невозможно в силу относительных размеров частиц и пор и тем самым коэффициент проницаемости для данных частиц равен нулю.

Коэффициент χ трудно измерим. Гораздо более удобен безразмерный коэффициент

$$k_{pp} = k / \chi,$$

который назовем коэффициентом проницаемости частиц (permeability of the particles). При заданном фиксированном поровом пространстве с коэффициентом проницаемости k значение величины k_{pp} варьируется в интервале $k_{pp} \in [0, k]$. Величина $k_{pp} = 0$ отвечает случаю полного непроникновения этим поровым пространством данных частиц, а величина $k_{pp} = k$ соответствует полному пропусканию всех частиц или ионов данного вида. Таким образом, безразмерный коэффициент проницаемости k_{pp} характеризует степень пропускания конкретных частиц данным поровым пространством. В отличие от величины k , которая полностью определяется свойствами порового пространства, величина k_{pp} действительно является относительной величиной, зависящей от соотношения характерных размеров порового пространства и конкретных частиц или ионов.

С учетом приведенных рассуждений можно переписать выражения (18), (20), (22) и (24) для подвижности в беспоровом пространстве применительно к случаю макроскопического движения в поровом пространстве

$$\tilde{u}_{0_{st}} = k_{pp} \frac{1}{6\pi\mu a} = k_{pp} u_{0_{st}}; \quad (29)$$

$$\tilde{u}_{0_{eo}} = k_{pp} \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} = k_{pp} u_{0_{eo}}; \quad (30)$$

$$\tilde{u}_{0_{epion}} = k_{pp} \frac{Ze}{6\pi\mu a} = k_{pp} u_{0_{epion}}; \quad (31)$$

$$\tilde{u}_{0_{epd}} = k_{pp} \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} = k_{pp} u_{0_{epd}}. \quad (32)$$

Выражения для парциальных микроскопических скоростей частиц и ионов (17), (19), (21) и (23) с учетом их движения в поровом пространстве и с учетом их макроскопических подвижностей в этом пространстве (29)–(32) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{u}_{st} = k_{pp} \frac{1}{6\pi\mu a} \mathbf{F} = k_{pp} u_{0_{st}} \mathbf{F}, \quad (33)$$

$$\mathbf{u}_{eo} = k_{pp} \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} \mathbf{E} = k_{pp} u_{0_{eo}} \mathbf{E}, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_{ion} = k_{pp} \frac{Ze}{6\pi\mu a} \mathbf{E} = k_{pp} u_{0_{epion}} \mathbf{E}, \quad (35)$$

$$\mathbf{u}_{epd} = k_{pp} \frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\mu} \mathbf{E} = k_{pp} u_{0_{epd}} \mathbf{E}. \quad (36)$$

Заметим, что величина k_{pp} может быть легко получена из последних выражений путем их сопоставления с опытными данными.

Замечание 2. Возможна ситуация, когда пористость скелета может меняться во времени из-за засорения пор фильтруемым веществом. Тогда очевидно, что параметры скелета m , n и k меняются во времени. В результате коэффициент k_{pp} становится функцией времени $k_{pp} = k_{pp}(t)$, и этот факт нужно учитывать на практике. Выявить наличие временной зависимости $k_{pp}(t)$ можно, в частности, по вариациям силы тока через электролит (см. ниже) во времени, учитывая при этом неединственность влияния этой причины на силу тока в электролите.

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РАДИУСЕ МОЛЕКУЛЫ (ИОНА).

При вычислении подвижности молекулы (иона) в беспоровом (22) и поровом пространстве (31) необходимо указывать радиус иона (молекулы) a . Такой радиус называют гидродинамическим радиусом, радиусом Стокса, или радиусом Стокса—Эйнштейна. Его вычисляют, пользуясь уравнением Нернста—Эйнштейна [2, с. 258], которое применительно к отдельной молекуле имеет вид

$$D = k_B T u_0.$$

Здесь D — коэффициент диффузии для молекул (ионов) данного вида; k_B — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; u_0 — подвижность в беспоровом пространстве.

Молекулу (ион) полагают сферической. Для подвижности используется выражение (18)

$$u_0 = \frac{1}{6\pi\mu a}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение Нернста—Эйнштейна приводит к следующему выражению для величины радиуса Стокса—Эйнштейна [1, с. 117]:

$$a = \frac{k_B T}{6\pi\mu D}.$$

ВЕЛИЧИНА ТОКА В ЭЛЕКТРОЛИТЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПОРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим ситуацию зонного электрофореза. При рассмотрении вопроса о величине тока исходим из того, что буферная жидкость представляет собой раствор электролита. Течение в буферной жидкости отсутствует. При приложении внешнего электрического поля возникает миграционный поток ионов. Все остальные составляющие потока заряженных частиц (диффузионный, конвекционный, электроосмотический и т. д.) отсутствуют. Миграционный поток для i -го иона равен [2, с. 245]

$$\mathbf{N}_i = z_i \tilde{u}_{0i} F c_i \mathbf{E}. \quad (37)$$

Здесь $z_i = Z_i e$ — заряд i -го иона; Z_i — валентность иона без учета его знака; $\tilde{u}_{0i}$ — ионная подвижность в пористой среде (см. выражение (31))

$$\tilde{u}_{0i} = k_{ppi} \frac{Z_i e}{6\pi\mu a}; \quad (38)$$

F — число Фарадея (электрический заряд моля протонов); c_i — концентрация i -го иона $[c_i] = \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}$; k_{ppi} — коэффициент проницаемости i -го иона; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Плотность тока определяется через поток ионов [2, с. 246]

$$\mathbf{j} = F \sum_i z_i \mathbf{N}_i = F^2 \sum_i z_i^2 \tilde{u}_{0i} c_i \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (39)$$

Здесь $\sigma = F^2 \sum_i z_i^2 \tilde{u}_{0i} c_i$ — проводимость электролита.

Если плотность тока определяется выражением (39), то векторы плотности тока и напряженности электрического поля — коллинеарные. Тогда если

рассматривается ток в капилляре и вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль оси капилляра, то вектор плотности тока направлен также вдоль его оси. Поскольку рассматривается пористое пространство в макроскопическом варианте, то сила тока получается простым умножением плотности тока на эффективное сечение капилляра с учетом пористости

$$\mathbf{I} = n\pi R^2 \mathbf{j} \approx m\pi R^2 \mathbf{j}, \quad (40)$$

где n — просветность, а m — пористость среды (см. выше); R — радиус капилляра. Величина силы тока при постоянстве вектора $\mathbf{E}$ зависит от свойств пористого пространства (таких его параметров, как просветность n , а следовательно, и пористость m , коэффициент проницаемости k), от безразмерных коэффициентов проницаемости частиц k_{ppi} , а также от температурной зависимости динамической вязкости $\mu = \mu(T)$, которая может быть существенной, а также от концентрации ионов. Все это следует из анализа выражений (38)–(40).

О СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ТОКА В ПОРИСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе [12] было получено стационарное температурное поле при протекании тока в беспоровом капилляре, заполненном электролитом. Здесь попытаемся получить качественную оценку температурного поля в пористой среде, заполненной электролитом, при протекании через него тока.

Для решения задачи воспользуемся макроскопическим уравнением теплопереноса во всей среде (14). Перепишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_\Sigma} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{(\rho c)_\Sigma} \nabla \cdot (\kappa_\Sigma \nabla T) + \frac{q_\Sigma}{(\rho c)_\Sigma}. \quad (41)$$

Здесь все параметры определены в (14). Упростим (41), исходя из следующих допущений:

- процесс является стационарным, т. е. производная по времени равна нулю;
- скорость фильтрации $\mathbf{u} = 0$, т. е. конвекционный член в (41) отсутствует;
- коэффициенты теплопроводности в скелете κ_s и в жидкости κ_f не зависят от координат, т. е. $\kappa_\Sigma = \text{const}$;
- в поровом пространстве, состоящем из скелета и жидкости, заполняющей весь объем пор, ток протекает только в жидкой фазе, т. е. функция объемного источника тепла в скелете равна нулю $q_s = 0$, тогда $q_\Sigma = m q_f$ (см. (14)).

С учетом принятых допущений (41) запишется в виде

$$\Delta T = -\frac{mq_f}{(1-m)\kappa_s + m\kappa_f} = -\frac{q_f}{\left(\frac{1}{m}-1\right)\kappa_s + \kappa_f}.$$

Согласно [14] $q_f = \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}$, где $\mathbf{j}_f$ и $\mathbf{E}$ — векторы плотности тока в электролите и напряженности электрического поля соответственно. С учетом этого последнее уравнение переписывается в виде

$$\Delta T = -\frac{\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}}{\left(\frac{1}{m}-1\right)\kappa_s + \kappa_f}. \quad (42)$$

Из уравнения (42) видно, что в случае беспорового пространства, т. е. $m=1$, оно трансформируется к обычному стационарному микроскопическому уравнению теплопроводности для жидкости (см. [12])

$$\Delta T_f = -\frac{\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}}{\kappa_f}. \quad (43)$$

В работе [12] при условии $\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} = \text{const}$ получено решение уравнения Пуассона (43) для стационарного поля температуры в круглом капилляре с условием Дирихле на внешней границе капилляра $T_f|_{r=r_0} = T_0$

$$T_f(r) = T_0 + \frac{r_0^2 - r^2}{4} \frac{\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}}{\kappa_f}. \quad (44)$$

Здесь r_0 — радиус капилляра; r — текущий радиус.

Теперь при условии $\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} = \text{const}$ с учетом различий в правых частях уравнений (42) и (43) выписываем решение макроскопического стационарного уравнения теплопереноса для пористой среды (42) в круглом капилляре с условием Дирихле на внешней границе капилляра $T|_{r=r_0} = T_0$:

$$T(r) = T_0 + \frac{r_0^2 - r^2}{4} \frac{\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}}{\left(\frac{1}{m}-1\right)\kappa_s + \kappa_f}. \quad (45)$$

Как видно, распределение температуры в капилляре в отсутствие пористой среды (44) имеет такое же параболическое распределение по сечению капилляра, как и в присутствии пористой среды (45), с той лишь разницей, что отношение величин

$$\frac{T_f(r) - T_0}{T(r) - T_0} = \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\kappa_s + \kappa_f}{\kappa_f},$$

больше единицы при любом $m \in (0,1)$, что означает, что профиль разогрева внутренней области капилляра совпадает в обоих случаях с точностью до постоянного множителя, но в пористой среде разностная температура разогрева $T(r) - T_0$ меньше

в $\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\kappa_s + \kappa_f}{\kappa_f}$ раз, чем разностная температура $T_f(r) - T_0$ в беспоровой среде. При $m=1$ (беспоровое пространство) отношение равно 1, а при $m=0$ (жидкость отсутствует) уравнение Пуассона (42) вырождается в уравнение Лапласа и имеет решение, отличное от параболического.

ВЫВОДЫ

В работе дан краткий обзор ряда уравнений сохранения при фильтрации жидкости в пористой среде. Предложены выражения для вычисления линейки подвижностей частиц, молекул и ионов при различных процессах фильтрации в произвольной пористой среде. Эти выражения ориентированы на фильтрацию, подчиняющуюся закону Дарси. Получение таких выражений позволяет качественно улучшить синтез систем разделения, в которых применяется пористый наполнитель. Рассмотрен также ряд вспомогательных вопросов, относящихся к этой тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruus H. Theoretical microfluidics. Oxford: University Press, 2008. 346 p.
2. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
3. Духин С.С., Дерягин Б.В. Электрофорез. М.: Наука, 1976. 328 с.
4. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. М.: МГУ, 2009. 87 с.
5. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. N-Y, London, Amsterdam: American Elsevier Publ. Comp, 1972. 764 p.
6. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. N-Y: Springer, 2013. 778 p. doi: [10.1007/978-1-4614-5541-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5541-7).
7. Handbook of porous media. Ed. by Kambiz Vafai. 2-d edition. CRC Press, 2005. 744 p. doi: [10.1201/9780415876384](https://doi.org/10.1201/9780415876384).
8. Dullien F.A.L. Porous Media Fluid Transport and Pore Structure. London: Academic Press, 1979. 396 p.

9. Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: ИТТЛ, 1954. 296 с.
10. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 256 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е. К вопросу об определении стационарного температурного поля в капилляре при прохождении в нем электрического тока, а также об изменении полей концентрации примесей в этом температурном поле // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 2. С. 53–60. doi: [10.18358/np-25-2-i5360](https://doi.org/10.18358/np-25-2-i5360).

**Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 16.09.2015

TO THE QUESTION OF MOBILITY OF PARTICLES AND MOLECULES IN POROUS MEDIA

B. P. Sharfarets, V. E. Kurochkin

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

Here presented brief review of conservation equations when filtering liquids in porous substance: the conservation of momentum, energy and mass. Are the laws of filtration Darcy, Forchheimer and Brinkman. Given the standard boundary conditions for solving problems of filtration. Expressions for the calculation of the mobility of the particles, molecules and ions at different filtration processes in a general porous medium during filtration, satisfying the Darcy's law, are proposed. We also consider the number of applied questions related to this subject: the current magnitude in the pore medium, stationary temperature field in a circular capillary, containing a porous medium, the formula for determining the hydrodynamic radius of the molecule (radius, Stokes—Einstein) is given. Considered other supporting issues. The results can be extended to other laws of the filtering, differ from Darcy's law. The obtained results enable to improve the synthesis of separation schemes, in which porous fillers are used.

Keywords: porous media, conservation laws, Darcy's law, Brinkman law, mobility in porous media, hydrodynamic radius of the molecule

REFERENCES

1. Bruus H. *Theoretical microfluidics*. Oxford, University Press, 2008. 346 p.
2. N'yumen Dzh. *Elektrochimicheskie sistemy* [Electrochemical systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p. (In Russ.).
3. Duchin S.S., Deryagin B.V. *Elektroforez* [Elektroforez]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 328 p. (In Russ.).
4. Leont'ev N.E. *Osnovy teorii fil'trazii* [Bases of the theory of a filtration]. Moscow, MGU Publ., 2009. 87 p. (In Russ.).
5. Bear J. *Dynamics of fluids in porous media*. N-Y, London, Amsterdam, American Elsevier Publ. Comp, 1972. 764 p.
6. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media*. N-Y, Springer, 2013. 778 p.
7. Kambiz Vafai, Ed. *Handbook of porous media*. 2-d edition. CRC Press, 2005. 744 p. doi: [10.1201/9780415876384](https://doi.org/10.1201/9780415876384).
8. Dullien F.A.L. *Porous Media Fluid Transport and Pore Structure*. London, Academic Press, 1979. 396 p.
9. Lykov A.V. *Yavleniya perenosov v kapillyarno-poristyykh telakh* [The transfer phenomena in capillary and porous bodies]. Moscow, ITTL Publ., 1954. 296 p. (In Russ.).
10. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* [Mathematical bases of classical mechanics of liquid]. Moscow, Izd. Inostrannoy Literatury, 1963. 256 p.
11. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. V. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.
12. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E. [To the question about the definition of a stationary temperature field in the capillary during the passage of electric current and the

change in water concentration of impurities in the temperature field]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Science Instrumentation], 2015. vol. 25, no. 2, pp. 53–60. doi: [10.18358/np-25-2-i5360](https://doi.org/10.18358/np-25-2-i5360). (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 16.09.2015