
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 532.73-1+532.73-2+532.73-3

© В. Е. Курочкин, Б. П. Шарфарец, Е. Б. Шарфарец

**ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ
ПРОЦЕСС ТРАНСПОРТА ПРИМЕСЕЙ И ОДИНОЧНЫХ ЧАСТИЦ
В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ**

Рассматриваются некоторые математические модели, описывающие процесс транспорта дисперсных смесей и одиночных частиц в потоке жидкости. Применительно к движению одиночных частиц приведены условия, когда смещением их траектории относительно основного потока жидкости можно пренебречь. Отмечена относительная простота и полезность теории массопереноса примесей в разбавленных растворах.

Кл. сл.: поток жидкости, растворитель, растворенное вещество, дисперсные смеси, транспорт растворенного вещества, транспорт частиц

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач научного приборостроения является выделение компонентов в жидких смесях. В этой связи представляют интерес закономерности транспорта дисперсных смесей в гидродинамическом потоке растворителя. Настоящая работа посвящена обзору математических моделей, описывающих процесс транспорта примесей и одиночных частиц в гидродинамическом потоке.

ДИСПЕРСНЫЕ СМЕСИ

Как правило, среды, встречающиеся в природе, не являются однородными. Их называют многофазными (гетерогенными) средами (смесями). К ним можно отнести газовзвеси, аэрозоли, суспензии, эмульсии, жидкости с пузырьками газа, композитные материалы, насыщенные жидкостью и газом, грунты и т. д. Они характеризуются, в отличие от гомогенных смесей (смесей газов, растворов, сплавов), наличием макроскопических (по отношению к молекулярным масштабам) неоднородностей или включений. В гомогенных же смесях составляющие перемешаны на молекулярном уровне. На границах раздела фаз в гетерогенных средах возможны фазовые переходы и химические реакции. Различия свойств отдельных фаз играют важную роль в динамике таких сред.

Основой для описания течений в гетерогенных средах является гипотеза взаимопроникающих континуумов, предложенная Х.А. Рахматулиным [1]: многокомпонентная гетерогенная среда представляется совокупностью N сплошных сред,

каждая из которых описывается своей скоростью, плотностью, удельной внутренней энергией, давлением, температурой и т. д. Это положило начало использованию методов механики сплошных сред для описания различного рода смесей с привлечением идеи механики взаимопроникающих (много-скоростных) континуумов и определением взаимопроникающего движения составляющих смеси. Близкие результаты были получены К. Трусделлом в 1957 г. [2, 3].

Далее в работах Р.И. Нигматулина, в частности [4–6], эта идея последовательно развивается. Отметим также некоторые другие работы [7–12], посвященные этой тематике, библиография которой весьма обширна и достаточно полно приведена в упомянутых работах.

Динамика среды при таком подходе изучается с помощью систем уравнений сохранения массы, импульса и энергии для компонент смеси.

Согласно работам [4, с. 9] и [5, с. 15], наиболее изучены двухфазные дисперсные среды, одна из фаз которых, называемая *дисперсной*, — капли, пузырьки или твердые частицы. Различают следующие виды дисперсных смесей:

- суспензии — смеси жидкости с твердыми частицами;
- эмульсии — смеси жидкости с каплями другой жидкости;
- газовзвеси — смеси газа с твердыми частицами.

Окружающая несущая фаза (жидкость или газ) называется *дисперсионной фазой*.

В литературе наряду с динамикой многофазных сред рассматривается и динамика одиночных частиц в потоке жидкости. Изучение динамики одиночной частицы в потоке жидкости важно для

описания дисперсной среды в целом и представляет самостоятельный интерес [10]. Известно [12, с. 5, 6.], что траектория частицы в общем случае не совпадает с траекторией жидкой (лагранжевой) частицы из-за эффекта инерции. Если (массовая) концентрация C частиц достаточно мала ($C < 10^{-2}$) и не происходит процессов перехода одной фазы в другую и химических реакций, то воздействие частиц на несущую жидкость осуществляется благодаря силе трения, возникающей из-за наличия проскальзывания, т. е. отличия скорости отдельно взятой частицы от локальной скорости жидкости.

Начнем с описания динамики одиночных частиц.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОДИНОЧНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Теория

Изложенная ниже теория движения одиночной частицы в несжимаемой вязкой жидкости, а также подробный обзор публикаций приведены, например, в работе [12]. Изложим в общем виде строгую математическую постановку задачи о движении одиночной частицы в несжимаемой вязкой жидкости (попутно исправляя опечатки оригинала). Полагаем далее, что в отличие от [12] частица не обязательно является сферической.

Рассматривается частица с границей S_p , плотностью ρ_p , с координатой $\mathbf{r}_p(t)$, движущаяся со скоростью

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t). \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$ — невозмущенные скорость течения и давление, которые имели бы место в однофазной жидкости, а $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{p}(\mathbf{r}, t)$ — соответствующие поля, возмущенные наличием частицы. Уравнение для скорости частицы имеет вид

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = m_p g_i + \oint_{S_p} n_j (-\tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}) ds. \quad (2)$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; m_p — масса частицы, легко рассчитываемая по ее плотности и объему; g_i — i -я компонента ускорения силы тяжести; $\frac{d}{dt}$ — производная вдоль траектории частицы; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S_p . Тензор вязких напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ равен

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

где μ — динамическая вязкость жидкости.

Далее используется гипотеза о несжимаемости жидкости. Поля скорости и давления $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{p}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнению Навье—Стокса, которое в координатной записи имеет вид

$$\rho_f \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \tilde{U}_i + \rho_f g_i, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где $\rho_f = \text{const}$ — плотность жидкости; по повторяющемуся индексу $k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование. Поле скорости жидкости удовлетворяет условию несжимаемости

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для поля скорости $\tilde{\mathbf{U}}$ на поверхности твердой частицы задаются условиями непротекания (прилипания) жидкости

$$\tilde{\mathbf{U}}|_{S=S_p} = \mathbf{V}. \quad (5)$$

На расстояниях от поверхности частицы, многократно превышающих ее поперечный размер, скорость и давление равны

$$\tilde{\mathbf{U}}|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{U}, \quad \tilde{p}|_{r \rightarrow \infty} = p,$$

где $\mathbf{U}$ и p — невозмущенные поля течения при отсутствии частицы, удовлетворяющие системе уравнений

$$\rho_f \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i + \rho_f g_i, \quad (3a)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (4a)$$

Частица приносит локальное возмущение в течение жидкости благодаря условию прилипания на ее поверхности.

Принимаются следующие представления

$$\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U} = \mathbf{U}^d, \quad \tilde{p} - p = p^d.$$

Здесь поля $(\mathbf{U}^d, p^d)$ представляют собой соответствующие возмущения исходных полей без частицы $(\mathbf{U}, p)$, вызванные наличием частицы. Тогда поля $\mathbf{U}^d$ и p^d удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\rho_f \left(\frac{\partial U_i^d}{\partial t} + U_k^d \frac{\partial U_i^d}{\partial x_k} + U_k^d \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial U_i^d}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p^d}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i^d, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^d = 0, \quad \mathbf{U}^d|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad p^d|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Далее вычисляется поверхностная сила $\oint_{S_p} n_j (-\tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}) ds$ в (2), действующая на частицу:

$$\oint_{S_p} n_j (-\tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}) ds = \oint_{S_p} n_j (-p \delta_{ij} + \sigma_{ij}) ds + \oint_{S_p} n_j (-p^d \delta_{ij} + \sigma_{ij}^d) ds, \quad (8)$$

где соответствующие тензоры вязких напряжений равны

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij}^d = \mu \left(\frac{\partial U_i^d}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^d}{\partial x_i} \right).$$

После применения теоремы Гаусса—Остроградского к поверхностным интегралам в (8) получаем

$$\oint_{S_p} n_j (-\tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}) ds = \int_{\Omega_p} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i \right) dV + \int_{\Omega_p} \left(-\frac{\partial p^d}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i^d \right) dV, \quad (8a)$$

где Ω_p — объем частицы. Далее, используя предположение о том, что размер частицы много меньше характерного пространственного размера несущего течения L (для сферического включения диаметром d это условие имеет вид $d/L \ll 1$), из (8a) получено

$$\oint_{S_p} n_j (-\tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}) ds = \Omega_p (F_i + F_i^d)|_{r=r_p}. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{r}_p$ — геометрический центр частицы. Из (3a) и (6) находим

$$F_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i = \rho_f \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - g_i \right); \quad (10)$$

$$F_i^d = -\frac{\partial p^d}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i^d =$$

$$= \rho_f \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k^d \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial U_i^d}{\partial x_k} \right). \quad (11)$$

Подстановка (9) в (2) с учетом последних равенств приводит к итоговому уравнению

$$\rho_p \frac{dV_i}{dt} = \rho_f \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \Big|_{r=r_p} + g_i (\rho_p - \rho_f) + F_i^d \Big|_{r=r_p}, \quad (12)$$

для решения которого необходимо нахождение полей $(\mathbf{U}, p)$ и $(\mathbf{U}^d, p^d)$ из соответственно краевых задач (3a), (4a) и (6), (7).

Одним из случаев, когда решения граничной задачи для поля возмущения $\mathbf{U}^d$ и p^d (6), (7) и выражение для силы $\mathbf{F}^d$ (11) могут быть найдены аналитически, является случай, когда движение частицы происходит в стоксовом режиме, а это означает здесь, что наряду с условием малости диаметра частицы ($d/L \ll 1$) должны выполняться следующие условия [13]:

— число Рейнольдса частицы в относительном потоке мало

$$Re_p = d \frac{|\mathbf{V}_0 - \mathbf{U}_0|}{\nu} < 1, \quad (13)$$

— отношение ε квадрата диаметра частицы d^2 к квадрату характерного масштаба пограничного слоя в окрестностях частицы $\frac{\nu L}{U_0}$ мало

$$\varepsilon = \frac{U_0 d^2}{L \nu} \ll 1, \quad (14)$$

где U_0 и V_0 — характерные масштабы скорости жидкости и частицы соответственно. При этом числа Рейнольдса несущего течения $\frac{U_0 L}{\nu}$ и $\frac{U_0 d}{\nu}$ могут быть немалыми.

Решение задачи (6), (7) получено в работе [13]. Выражение для $\mathbf{F}^d$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^d = & -\frac{\rho_f}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{Q}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{d^2}{60} \Delta \mathbf{U} \right) - \\ & - \frac{18 \rho_f}{d^2} \nu \mathbf{Q}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{9 \rho_f}{d} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt'} (\mathbf{Q}(\mathbf{r}(t'), t')) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}(t), t) = \mathbf{V} - \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{d^2}{24} \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t). \quad (16)$$

Слагаемые в правой части (15) соответствуют в порядке следования силам присоединенной массы, вязкого трения Стокса и силе Бассе (о силе Бассе см. в [14, с. 131, 132]).

Для анализа решения уравнения движения частицы (12) его удобно переписать в безразмерных переменных, например, нормированных на масштаб скорости и времени U_0 и $T = L / U_0$, в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \frac{d\mathbf{V}}{dt} = & \varepsilon \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + (\delta - 1) g' - \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{V} - \mathbf{U}) - \\ & - 9(\mathbf{V} - \mathbf{U}) - \frac{9}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt'} (\mathbf{V} - \mathbf{U}(\mathbf{r}(t'), t')) \frac{dt'}{\sqrt{t - t'}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\delta = \rho_p / \rho_f; \quad g' = \varepsilon g d^2 / (v U_0);$$

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$$

или в тензорной записи

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z).$$

Далее следуют некоторые результаты анализа уравнения (17), заимствованные из [15].

Диаметр частицы предполагается достаточно малым (см. условие (13)), что позволяет считать

поправки, пропорциональные $d^2 \Delta \mathbf{U} \sim U_0 \frac{d^2}{L^2}$

в формуле (16) (поправки Факсена), пренебрежимо малыми. Время релаксации частицы в стоксовом режиме определяется так:

$$\tau_p = \frac{d^2 \delta}{18\nu}. \quad (18)$$

Из анализа (17) следует, что при $\delta = O(1)$ сила вязкого трения (сила Стокса) преобладает над инерционными силами (связанными с градиентом давления и эффектом присоединенной массы). Это означает, что скорость частицы быстро за время релаксации $\tau_p \ll T$ подстраивается под скорость окружающей жидкости. В общем случае плотности частицы и несущей жидкости не равны $\rho_p \neq \rho_f$ и инерция частицы обуславливает ее

смещение относительно линий тока несущей жидкости. Из (17) также следует, что характерное время, за которое происходит это смещение, оценивается как $T / |1 - \delta|$.

Если произведение $\varepsilon \delta \sim 1$, то сила инерции частицы сравнима с силой вязкого трения и тяжести. В этом случае движение частицы определяется ее инерцией и силами вязкого трения и тяжести.

Рассмотрение частного случая

В работе [16, с. 116, 117] рассматривается одномерное движение сферической частицы радиусом a в следующем виде:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \frac{dV}{dt} = -6\pi\mu a V + F_{ext}. \quad (19)$$

Здесь $V(t)$ — скорость частицы; $-6\pi\mu a V$ — сила вязкого сопротивления Стокса при движении частицы со скоростью V ; F_{ext} — некоторая внешняя сила. В предположении того, что $F_{ext} = \text{const}$ и $V|_{t=0} = 0$, в [16] получено следующее решение:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{F_{ext}}{6\pi\mu a} \left(1 - \exp\left(-\frac{9\mu}{2\rho_p a^2} t\right) \right) = \\ = & \frac{F_{ext}}{6\pi\mu a} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Конкретизируем уравнение (19). Примем допущение о том, что частица находится в стационарном плоском потоке жидкости, двигающемся с постоянной скоростью U . Тогда силу F_{ext} можно принять равной соответствующей силе Стокса, действующей течением на частицу

$$F_{ext} = 6\pi\mu a U,$$

или после подстановки этого выражения в (19) получаем

$$V(t) = U \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right). \quad (20a)$$

В работе [16] показано, что фигурирующее в решении (20) время релаксации $\tau = \frac{2\rho_p a^2}{9\mu}$, характеризующее стабилизацию процесса при ρ_p , примерно совпадающей с плотностью воды ρ_f , и $a \sim 5$ мкм равно $\tau = 5$ мкс. Тогда из (20a) следует, что через время $T \sim 2\tau = 10$ мкс частица практически достигает стационарной скорости течения $V = U$.

Как видно из изложенного, уравнение (19) аппроксимирует общее уравнение (12) в стоксовом режиме при $\delta = \rho_p / \rho_f = O(1)$ и малом радиусе частицы, когда сила вязкого трения (сила Стокса) преобладает над инерционными силами (первый член справа в (12)), а также, когда в (15) можно пренебречь эффектом присоединенной массы и силой Бассе, а в (16) поправкой Факсена. Кроме того, в (19) не учитывается поле силы тяжести, что, впрочем, легко устраняется.

Таким образом, при выполнении соответствующих условий, сложное уравнение для траектории частицы (12) вполне аппроксимируется упрощенным уравнением (19).

МЕХАНИКА МНОГОСКОРОСТНЫХ КONTИНУУМОВ

Согласно [1–9 и др.], описание методами механики сплошной среды различного рода смесей, и гомогенных, и гетерогенных, связано с введением понятия многоскоростного континуума и определением взаимопроникающего движения составляющих смеси.

Согласно, например, [4], многоскоростной континуум представляет собой m континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей (фазе или компоненте) смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Для каждого из этих составляющих континуумов в каждой точке определяется обычным образом плотность (приведенная) ρ_i (масса i -составляющей в единице объема среды), скорость $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, m$), а затем и другие параметры, относящиеся к своему континууму и своей составляющей смеси. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, будет определено m плотностей ρ_i , m скоростей $\mathbf{v}_i$ и т. д.

Вводятся также параметры, характеризующие смесь целиком, а именно плотность смеси ρ и среднемассовая скорость смеси $\mathbf{v}$:

$$\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i, \quad \rho \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \rho_i \mathbf{v}_i. \quad (21)$$

Вводятся диффузионные скорости $\mathbf{W}_i$, представляющие собой скорости движения составляющих относительно центра масс смеси

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}, \quad \left(\sum_{i=1}^m \rho_i \mathbf{W}_i = 0 \right). \quad (22)$$

Механика смесей строится на основе физических законов сохранения массы, импульса и энергии. Дифференциальный закон сохранения массы каждой составляющей имеет вид [4, с. 15]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^m J_{ji}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Здесь J_{ji} характеризует интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую (или наоборот из i -й в j -ю; тогда $J_{ji} < 0$). С учетом (21) и (22) закон сохранения массы (23) записывается так [4, с. 15]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i (\mathbf{v} + \mathbf{W}_i)) = \sum_{j=1}^m J_{ji}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (24)$$

Если просуммировать (23) или (24), учитывая (22), то получается закон сохранения массы смеси в целом, имеющий обычный вид, как в односкоростном случае [4, с. 16]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (25)$$

Закон сохранения импульса в дифференциальной форме для i -й фазы имеет вид [4, с. 16] (здесь и далее в отличие от оригинала в качестве массовой силы рассматривается только сила тяжести)

$$\begin{aligned} \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right) = \\ = -\nabla \cdot \sigma_i^{kl} + \rho_i \mathbf{g} + \sum_{j=1}^m (\mathbf{P}_{ji} - J_{ji} \mathbf{v}_i). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{P}_{ij}$ — интенсивность обмена импульсом между j -й и i -й фазами; σ_i^{kl} — тензор поверхностных сил (напряжения) i -й фазы; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести.

Если принять $\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i$, то после суммирования (26) по m получаем уравнение импульсов среды в целом [4, с. 17]

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \\ = -\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} - \sum_{i=1}^m \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{W}_i \mathbf{W}_i). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $\mathbf{W}_i \mathbf{W}_i$ — аффино́р и операция вычисления дивергенции, определяется так:

$$\nabla \cdot (\rho_i \mathbf{W}_i \mathbf{W}_i) = \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{W}_i) \mathbf{W}_i.$$

Уравнение импульсов среды в целом уже в отличие от уравнения неразрывности среды в целом зависит от относительного движения составляющих.

Закон сохранения энергии i -й фазы сводится к выражению [4, с. 18]

$$\rho_i \frac{d}{dt} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{q}_i) + \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^m \left[E_{ji} - J_{ji} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right]. \quad (28)$$

Здесь E_{ji} — интенсивность обмена энергией между i -й и j -й фазами; u_i — внутренняя энергия единицы массы i -й фазы; $v_i = |\mathbf{v}_i|$; $\mathbf{c}_i$ — вектор плотности поверхностных сил (напряжений); $\mathbf{q}_i$ — вектор плотности потока тепла в i -й фазе. После суммирования в (28) по всем фазам получается уравнение энергии смеси в целом [4, с. 18]:

$$\rho \frac{dE}{dt} + \sum_{i=1}^m \nabla \cdot (\mathbf{W}_i \rho_i E_i) = \nabla \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{q}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g} \cdot \sum_{i=1}^m (\mathbf{W}_i \rho_i), \quad (29)$$

где

$$E = u + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i W_i^2}{2}, \quad \mathbf{c} = \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i,$$

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i, \quad W_i = |\mathbf{W}_i|.$$

Как видно, решение задачи определения взаимопроницающего движения составляющих смеси методами механики сплошной среды с введением понятия многоскоростного континуума представляет собой очень трудоемкую задачу решения системы связанных (в том числе нелинейных) уравнений в частных производных (23)–(25), (27) и (29). Ситуация существенно упрощается для так называемых бесконечно разбавленных растворов [17]. В этом случае система указанных уравнений сводится к уравнениям неразрывности (25) и Навье—Стокса (27) для растворителя, уравнение сохранения энергии (29) трансформируется в уравнение теплопереноса, а закон сохранения массы примеси (23) трансформируется в уравнение массопереноса. Обо всем этом подробно написано в работе [18].

Отметим, что теория разбавленных растворов обладает многими аспектами, которые лишь слегка видоизменяются в более общей теории концентрированных растворов [17, с. 276].

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе рассмотрены поочередно математические модели транспорта одиночных частиц и модели транспорта дисперсных смесей в потоке жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
2. Truesdell C. The Rational Mechanics of Materials (ed. by C. Truesdell). New York, London: Gordon&Breach Science Publisher, 1965.
3. Truesdell C., Toupin R.A. Handbuch der Physik. Bd III/1 (ed. S. Flügge). Berlin, Heidelberg: Springer, 1960. S. 226.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. 1987. 464 с.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. II. М.: Наука, 1987. 360 с.
7. Пилюгин Н.Н., Турский Г.А. Динамика ионизированного излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 311 с.
8. Manninen M., Taivassalo V. and Kallio S. On the mixture model for multiphase flow. Technical Research Center of Finland (VTT), 1996. 67 p.
9. Crowe C., Sommerfeld M. and Tsuji Y. Multiphase flows with droplets and particles. CRC Press, 1998. 471 p.
10. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газовзвеси. М.: Наука. 1987. 239 с.
11. Soo S.L. Fluid dynamics of multiphase systems. Waltham, MA, Blaisdell Pub. Co. 1967. 524 p.
12. Дружинин О.А. Исследование динамики вихревых потоков и волн в дисперсных и стратифицированных средах. Дис. докт. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2004. 300 с.
13. Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion for small rigid sphere in a non-uniform flow // Phys. Fluids. 1983. № 26. P. 883–889.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
15. Maxey M.R. On the advection of spherical particles in a non-uniform flow // Phil. Trans. R. Soc. of London A 333. 1990, no. 1631. P. 289–307. doi: 10.1063/1.864230.
16. Bruus H. Theoretical Microfluidics. Oxford University Press., 2008. 346 p.
17. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
18. Шарфарец Б.П. Обзор теории явлений переноса и поверхностных явлений применительно к решению некоторых задач научного приборостроения // Научное приборостроение. 2015. Т. 25. № 3. С. 45–64.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург)**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 7.07.2015

A REVIEW OF MATHEMATICAL MODELS DESCRIBING THE TRANSPORT OF SOLUTES AND SINGLE PARTICLES IN FLUID FLOW

V. E. Kurochkin, B. P. Sharfarets, E. B. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

Discusses some mathematical models describing the transport of dispersed mixture and single particles in fluid flow. In relation to the movement of single particles under certain conditions, when the shift of the trajectory relative to the main fluid flow can be neglected. Noted the relative simplicity and usefulness of the of mass transfer theory of solutes in dilute solutions.

Keywords: fluid flow, solvent, solute, dispersed mixture, transport of solute, particle transport

REFERENCES

1. Rachmatulin Ch.A. [Fundamentals of gas dynamics of the interpenetrating movements of the squeezed environments]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1956, vol. 20, no. 2, pp. 184–195. (In Russ.).
2. Truesdell C. *The Rational Mechanics of Materials* (ed. by C. Truesdell), 1965, New York, London, Gordon&Breach Science Publisher.
3. Truesdell C., Toupin R.A. *Handbuch der Physik*. Bd III/1, S. 226 (ed. S. Flügge), 1960, Berlin, Heidelberg, Springer.
4. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Bases of mechanics of heterogeneous environments], Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p. (In Russ.).
5. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase environments], Part I. Moscow, Nauka Publ., 1987. 464 p. (In Russ.).
6. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase environments], Part II. Moscow, Nauka Publ., 1987. 360 p. (In Russ.).
7. Pilyugin N.N., Tirskey G.A. *Dinamika ionizirovannogo izluchayushchego gaza* [Dynamics of the ionized radiating gas], Moscow, MGU Publ., 1989. 311 p. (In Russ.).
8. Manninen M., Taivassalo V. and Kallio S. *On the mixture model for multiphase flow*. Technical Research Center of Finland (VTT), 1996. 67 p.
9. Crowe C., Sommerfeld M. and Tsuji Y. *Multiphase flows with droplets and particles*. CRC Press, 1998. 471 p.
10. Shrayber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yazenko V.P. *Turbulentnye techeniya gazovzvesi* [Turbulent flows of a gas-suspension]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 239 p. (In Russ.).
11. Soo S.L. *Fluid dynamics of multiphase systems*. Waltham, MA, Blaisdell Pub. Co., 1967. 524 p.
12. Druzhinin O.A. *Issledovanie dinamiki vichrevykh potokov i voln v dispersnykh i stratifitsirovannykh sredakh*. Dokt. Diss. [Research of dynamics of vortex streams and waves in the disperse and stratified environments. Dokt. Diss.]. Nizhny Novgorod, IPF RAN, 2004. 300 p. (In Russ.).
13. Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion for small rigid sphere in a non-uniform flow. *Phys. Fluids.*, 1983, no. 26, pp. 883–889.
14. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics], Moscow, NaukaPubl., 1988. 736 p. (In Russ.).
15. Maxey M.R. On the advection of spherical particles in a non-uniform flow. *Phil. Trans. R. Soc. of London, A* 333, 1990, no. 1631, pp. 289–307. doi: 10.1063/1.864230.
16. Bruus H. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press., 2008. 346 p.
17. N'yumen Dzh. *Elektrochimicheskie sistemy* [Electrochemical systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p. (In Russ.).
18. Sharfarets B.P. [An overview of the theory of transport phenomena and surface phenomena in relation to the solution of some problems of analytical instrumentation]. *Nauchnoe priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3, pp. 45–64. doi: 10.18358/np-25-3-14564 .

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 7.07.2015