
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 537.534.7: 621.319.7

© А. С. Бердников

**ПЕРЕСЧЕТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ
ЧАСТИЦЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ГРАНИЦЫ СО СКАЧКОМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ.
II. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

В данной части (II) работы аккуратно исследуются правила пересчета координат и скоростей заряженной частицы при пересечении бесконечно тонкой границы со скачком электрического и магнитного полей со слабой сингулярностью.

Кл. сл.: численное решение дифференциальных уравнений, трассировка заряженных частиц в электрических и магнитных полях, артефакты численных алгоритмов

**1. ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЧКОМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ**

Эта работа является продолжением публикации [1]. В статье [1] был рассмотрен и математически строго обоснован принцип преломления траектории заряженной частицы на границе со скачком электрического потенциала. А именно показано в самом общем случае, что изменению должна подвергаться только нормальная компонента скорости частицы, причем таким образом, чтобы обеспечить выполнение закона сохранения энергии. При этом остальные компоненты скорости и все координаты частицы сохраняют те же значения, которые были перед пересечением границы. В данной работе эти результаты обобщаются на случай, когда на бесконечно тонкой границе, которую пересекает траектория заряженной частицы, происходит скачок магнитного поля, возможно, совмещенный со скачком электрического поля.

В отличие от электрического поля, вопрос о правильной модели поведения магнитного поля, когда переходная область сжимается до бесконечно тонкой границы, не вполне тривиален. А именно сингулярный скачок напряженности электрического поля на бесконечно тонкой границе легко реализуется, например, с помощью двух сеток, расположенных бесконечно близко и находящихся под разными потенциалами (пример такой конструкции можно найти, например, в [2]). Поскольку магнитный потенциал — скорее абстрактное понятие, чем физическая величина, то создать границу со скачком магнитного потенциала и тем самым с сингулярным скачком магнитной индукции, может оказаться технически не реализуемой задачей.

Однако на рис. 1 показаны специфические конструкции, в которых, по всей видимости, такие скачки достигаются. Действительно, магнитный поток обязан представлять собой непрерывную величину, циклически замкнутую на себя и нигде не обрывающуюся (следствие отсутствия в природе магнитных зарядов, то есть монополей). В силу этого магнитный поток, выходящий наружу из соленоидальной катушки, должен целиком выйти через зазор между двумя одинаковыми и встречно ориентированными катушками (рис. 1, а), а магнитный поток, выходящий из ферромагнитного сердечника, должен полностью замыкаться на противостоящий ему магнитный сердечник, заполняя тем самым магнитным потоком конечной величины стремящийся к нулю зазор между двумя симметрично расположенными магнитными конструкциями (рис. 1, б). Следовательно, конструкции с сингулярными скачками индукции магнитного поля на бесконечно тонкой границе оказываются в принципе реализуемыми — правда, в предельном случае зазора, стремящегося к нулю, что соответственно требует стремящейся к бесконечности силы, препятствующей расталкиванию двух встречных магнитных конструкций, расположенных вплотную друг к другу.

Другим важным моментом является формализованное представление магнитного поля с помощью магнитных потенциалов. В то время как электрический потенциал является вполне физической величиной, напрямую связанной с электрическими напряжениями, приложенными к электродам, и восстанавливаемой по заданной напряженности электрического поля с точностью до аддитивной константы (не играющей особой

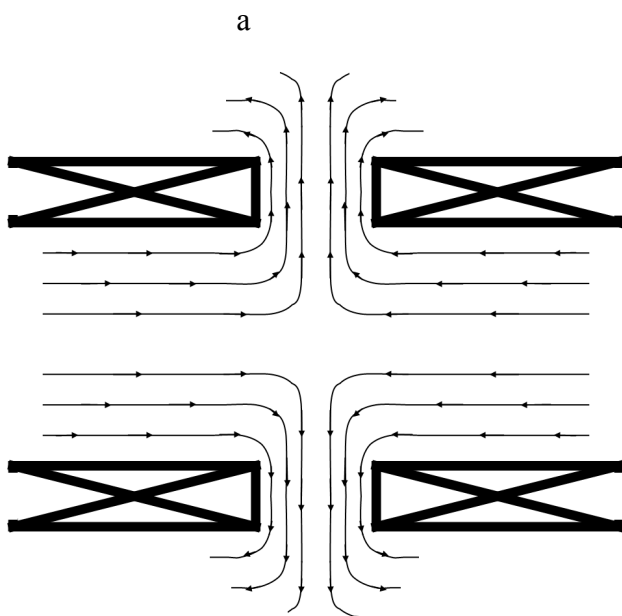
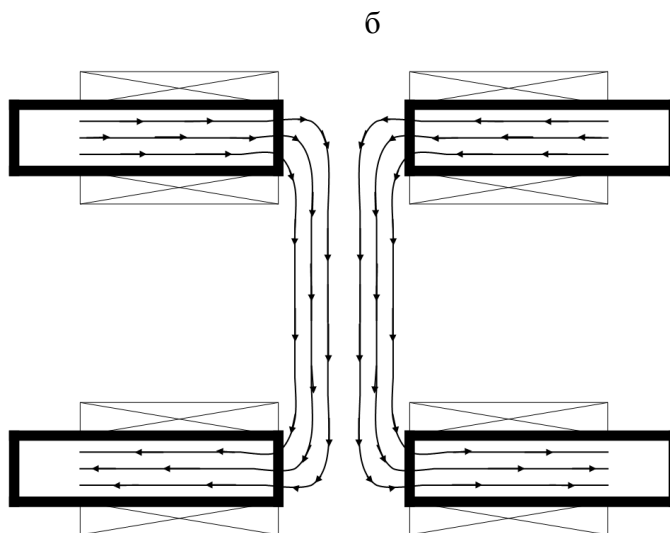


Рис. 1. Примеры конфигураций магнитного поля, для которых магнитное поле для переходной области стремится к дельта-функции.

а — две соленоидальные катушки, направленные навстречу к друг другу; б — катушки с ферромагнитными сердечниками, замыкающие магнитный поток друг на друга



роли и обеспечивающей постоянное смещение для потенциала, приписанного "земле"), для магнитного поля ситуация иная. Здесь магнитные потенциалы в меньшей степени представляют из себя физически содержательные объекты, и в большей степени — умозрительные математические конструкции.

В наиболее общем случае индукция магнитного поля $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ выражается через векторный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ по формуле $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ [3–9]. Для существования такой функции $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ при заданной функции $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ необходимо и достаточно выполнение условия $\text{div } \mathbf{B} = 0$ [10–12], которое для индукции магнитного поля всегда выполнено в силу справедливости уравнений Мак-

свелла. Однако функция $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, в отличие от электрического скалярного потенциала $U(x, y, z, t)$, восстанавливается по заданной индукции магнитного поля не вполне однозначным образом [13]. В частности, при перенормировке векторного магнитного потенциала по правилу $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \varphi$ (где $\varphi(x, y, z)$ — произвольная скалярная функция координат) индукция магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ остается неизменной, хотя сам векторный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ меняется весьма значительно. Аналогично при перенормировке скалярного и векторного потенциалов $U' \rightarrow U - (1/c) \partial \varphi / \partial t$, $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \varphi$ (где $\varphi(x, y, z, t)$ — произвольная скалярная функция

координат и времени) как индукция магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, так и напряженность электрического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } U - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ остаются неизменными [3–9], тогда как скалярный и векторный потенциалы могут меняться значительно.

В частном случае векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ может быть выражен через известную индукцию магнитного поля $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ как [10, 11]

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \times \text{rot} \left(\int \frac{\mathbf{B}(x', y', z', t)}{r^3 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \right), \quad (1)$$

где функция $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ должна достаточно быстро убывать на бесконечности, чтобы интеграл сходил. Также векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ может быть выражен через известные электрические токи $\mathbf{J}(x, y, z, t)$, создающие магнитное поле, по формуле [14]

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \left(\int \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t)}{r^3 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \right), \quad (2)$$

обеспечивающей выполнение (после вычисления ротора) закона Био—Савара—Лапласа. (В равенстве (2) для объемных токов интегрирование выполняется по объему, занятому токами, для поверхностных токов — вдоль соответствующей поверхности, для линейных токов — вдоль линейных проводников с током.)

Однако формулы (1) и (2) задают лишь *одно* из многих возможных значений для векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, соответствующего заданной магнитной индукции $\mathbf{B}(x, y, z, t)$, причем значения, вычисленные по формулам (1) и (2), совсем не обязательно будут равны друг другу. Разнообразные калибровки векторного потенциала [13], призванные упростить уравнения электромагнитного поля для тех или иных конкретных приложений, ясности к этому вопросу не добавляют.

Для специальных случаев, всегда, впрочем, имеющих место быть в оптике заряженных частиц, индукция магнитного поля может быть выражена не через векторный, а через скалярный магнитный потенциал [15]. А именно для одно-

связных областей, свободных от электрических токов и магнитных сред, в приближении квазистатического электрического поля, кроме условия $\text{div } \mathbf{B} = 0$, в соответствии с уравнениями Максвелла [3–9] выполняется также и условие $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. В таком случае в рассматриваемой области существует скалярная функция $\Phi(x, y, z, t)$ (скалярный магнитный потенциал), для которой справедливо утверждение, что $\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi$ [12]. В частности, скалярный магнитный потенциал оказывается удобным инструментом для численного расчета статических магнитных полей [16–18].

К сожалению, электрические токи, создающие магнитное поле и представляющие собой замкнутые контуры по самой своей природе, требуют разбиения трехмерного пространства на совокупность односвязных подобластей, заполненных магнитным полем. При этом скалярные магнитные потенциалы, заданные для различных областей пространства, плохо стыкуются друг с другом в единую конструкцию, а значение скалярного магнитного потенциала в фиксированной области пространства будет существенно зависеть от того, как именно пространство разбито на односвязные области. Ситуация здесь совершенно аналогична неоднозначности процедуры аналитического продолжения для аналитических функций комплексного переменного, а также зависимости результата аналитического продолжения от структуры разрезов комплексной плоскости, превращающих ее в односвязные области, свободные от особенностей функции [19, 20].

2. СКАЧОК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ

2.1. Об описании магнитного поля в переходной области

Рассмотрим частный случай, при котором границей скачка электрического потенциала служит плоскость. Можно считать, что система координат выбрана так, чтобы ось OZ была перпендикулярна разграничивающей плоскости, а точка (x_0, y_0, z_0) , в которой траектория пересекает бесконечно тонкую границу скачка электромагнитного поля (возможно, под углом к оси OZ), лежит в начале координат.

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле [21] без учета релятивистских или квантовых эффектов описывается уравнениями движения Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (e/c)[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]$, или в скалярных обозначениях

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= p, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{e}{m} E_x(x, y, z, t) + \frac{e}{mc} [qB_z(x, y, z, t) - rB_y(x, y, z, t)], \\
\frac{dy}{dt} &= q, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{e}{m} E_y(x, y, z, t) + \frac{e}{mc} [-pB_z(x, y, z, t) + rB_x(x, y, z, t)], \\
\frac{dz}{dt} &= r, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{e}{m} E_z(x, y, z, t) + \frac{e}{mc} [pB_y(x, y, z, t) - qB_x(x, y, z, t)],
\end{aligned} \quad (3)$$

где x, y, z — декартовы координаты частицы, $x(t), y(t), z(t)$ — траектория частицы, $p(t), q(t), r(t)$ — компоненты скорости частицы, m — масса частицы, e — заряд частицы, t — время, $\mathbf{E}(x, y, z, t) = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля в точке x, y, z в момент времени t , $\mathbf{B}(x, y, z, t) = (B_x, B_y, B_z)$ — индукция магнитного поля в точке x, y, z в момент времени t .

Как уже было указано в предыдущем разделе, описание магнитного поля для переходной области неоднозначно. Можно использовать скалярный магнитный потенциал, обеспечивающий эффективное описание магнитного поля, но лишь в частном случае свободной от электрических токов односвязной области пространства. Можно использовать также векторный магнитный потенциал, обеспечивающий вполне универсальное описание магнитного поля, но обладающий внутренней неоднозначностью: по заданному магнитному (электромагнитному) полю векторный потенциал восстанавливается с точностью до произвольной скалярной функции координат и времени. Наконец при отсутствии при предельном переходе к бесконечно тонкой границе сингулярностей типа дельта-функции для напряженности электрического поля и индукции магнитного поля можно вообще обойтись без потенциального описания и использовать функции $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ как непосредственно заданные. Эти три способа описания переходной области со скачком магнитного поля приходится рассматривать отдельно, поскольку в каждом из этих случаев математические выкладки обладают своей спецификой.

2.2. Векторный потенциал

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля выражаются через скалярный потенциал $U(x, y, z, t)$ и векторный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t) = (A_x, A_y, A_z)$ по формулам $\mathbf{E} = -\text{grad } U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ [3–9]:

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial t}, \\
B_x &= \frac{\partial A_z(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x, y, z, t)}{\partial z}, \\
E_y &= -\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y(x, y, z, t)}{\partial t}, \\
B_y &= -\frac{\partial A_z(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial z}, \\
E_z &= -\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z(x, y, z, t)}{\partial t}, \\
B_z &= \frac{\partial A_y(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial y}.
\end{aligned} \quad (4)$$

В случае, когда электромагнитное поле является квазистатическим, т. е. меняется во времени достаточно медленно, чтобы максвелловские эффекты были незначительны, вкладом члена $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ можно пренебречь. В этом случае формулы (4) упрощаются, а потенциалы могут быть интерпретированы как скалярный электрический потенциал и магнитный векторный потенциал с разделением уравнений Максвелла отдельно на электрическую и магнитную части. Как электрический, так и магнитный потенциалы могут рассматриваться как статические (постоянные во времени), так и как квазистатические (медленно меняющиеся во времени) функции.

Пусть $U^+(x, y, t)$ — предел скалярного потенциала на границе раздела при приближении к плоскости $z = z_0$ справа, а $U^-(x, y, t)$ — предел скалярного потенциала на границе раздела при приближении к плоскости $z = z_0$ слева (при зафиксированном времени t). Соответственно пусть $\mathbf{A}^+(x, y, t)$ — предел векторного потенциала на границе раздела при приближении к плоскости $z = z_0$ справа, а $\mathbf{A}^-(x, y, t)$ — предел векторного потенциала на границе раздела при приближении

к плоскости $z = z_0$ слева при зафиксированном времени t . Скачок скалярного или векторного потенциала на бесконечно тонкой границе является математической абстракцией, поэтому в реальности следует рассматривать две сближающиеся границы $z = -h$ и $z = +h$ с известным скалярным потенциалом $U(x, y, z, t)$ и векторным потенциалом $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ в промежутке между границами $-h \leq z \leq +h$ (оба потенциала, вообще говоря, зависят от параметра $h > 0$) (см. рис. 2).

В соответствии с условием задачи

$$\lim_{h \rightarrow 0+} U(x, y, z_0 + h, t) = U^+(x, y, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} U(x, y, z_0 - h, t) = U^-(x, y, t),$$

где, вообще говоря, $U^+(x, y, t) \neq U^-(x, y, t)$. По той же схеме определяются скачки векторного потенциала на границе $z = z_0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \vec{A}(x, y, z_0 + h, t) = \vec{A}^+(x, y, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \vec{A}(x, y, z_0 - h, t) = \vec{A}^-(x, y, t),$$

где, вообще говоря, $\mathbf{A}^+(x, y, t) \neq \mathbf{A}^-(x, y, t)$; определяются скачки нормальных производных скалярного и векторного потенциалов (т. е. по переменной z) при приближении к границе $z = z_0$ справа и слева, и так далее. Предел при $h \rightarrow 0$, к которому стремятся начальные и конечные координаты и скорости для траектории заряженной частицы, которая пересекает полосу $-h \leq z \leq +h$ в точке (x_0, y_0, z_0) (если такой предел существует), и будет рецептом для пересчета начальных условий траектории при пересечении бесконечно тонкой границы.

При интегрировании уравнений (3) на этапе прохождения заряженной частицей полосы про-

странства $-h \leq z \leq +h$ возьмем координату z в качестве независимой переменной вместо времени t . Это можно сделать, если в начальный момент компонента скорости частицы вдоль оси OZ положительна (т. е. частица движется в нужном направлении), а разность потенциалов $U^+(x, y, t) - U^-(x, y, t)$ между границами не настолько велика, чтобы частица в процессе движения могла развернуться в обратном направлении, не достигнув выходной границы. При таком предположении функция $z(t)$ будет монотонно растущей функцией времени, так что замена переменных $Z = z(t)$, $t = T(Z)$ окажется взаимнооднозначной, а уравнения (3) приобретают вид

$$\frac{dx}{dZ} \bigg/ \frac{dT}{dZ} = p, \quad \frac{dp}{dZ} \bigg/ \frac{dT}{dZ} = \frac{e}{m} E_x(x, y, Z, T) +$$

$$+ \frac{e}{mc} [qB_z(x, y, Z, T) - rB_y(x, y, Z, T)],$$

$$\frac{dy}{dZ} \bigg/ \frac{dT}{dZ} = q, \quad \frac{dq}{dZ} \bigg/ \frac{dT}{dZ} = \frac{e}{m} E_y(x, y, Z, T) +$$

$$+ \frac{e}{mc} [-pB_z(x, y, Z, T) + rB_x(x, y, Z, T)],$$

$$1 \bigg/ \frac{dT}{dZ} = r, \quad \frac{dr}{dZ} \bigg/ \frac{dT}{dZ} = \frac{e}{m} E_z(x, y, Z, T) +$$

$$+ \frac{e}{mc} [pB_y(x, y, Z, T) - qB_x(x, y, Z, T)],$$

где $Z \in [z_0 - h, z_0 + h]$ — новая независимая переменная.

В силу того что $h \rightarrow 0$ — малый параметр, удобно сделать замену $Z = z_0 + \xi h$, где $-1 \leq \xi \leq +1$ — новая безразмерная независимая переменная, $\xi = O(1)$ при $h \rightarrow 0$. В таком случае справедлива запись $Z(\xi) = z_0 + O(h)$, и можно положить, что в равной степени должны быть справедливы утверждения, что $x(\xi) = x_0 + O(h)$, $y(\xi) = y_0 + O(h)$, $T(\xi) = t_0 + O(h)$.

Действительно, в силу инерционности движения заряженной частицы в физически реалистичной системе она не может за бесконечно малое время изменить сколько-нибудь заметно свои координаты, даже при воздействии на нее бесконечно большой силы,¹⁾ так что $x(t) \sim x_0 + O(\delta t)$,

¹⁾ Сила должна быть разумно бесконечно большой, т. е. интеграл от силы по стремящемуся к нулю промежутку $-h \leq z \leq +h$ должен оставаться ограниченной величиной. Это означает, что при $h \rightarrow 0$ сила может вести себя, как дельта-функция, но не, например, как производная дельта-функции.

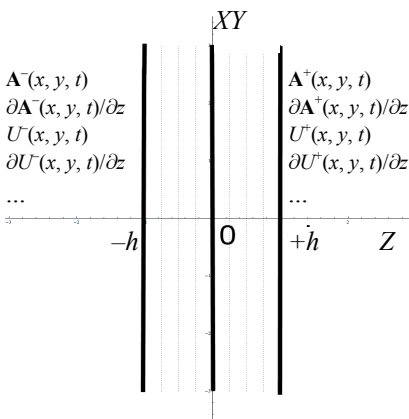


Рис. 2. Бесконечно тонкая плоская граница со скачком электромагнитного поля как предельный случай двух сближающихся плоскостей с разными граничными значениями для скалярного электрического и векторного магнитного потенциалов

$y(t) \sim y_0 + O(\delta t)$, $z(t) \sim z_0 + O(\delta t)$, где δt — время пересечения переходной области. Величины h и δt — одного порядка малости: $2h \approx r\delta t$, а по нашему предположению о достаточности кинетической энергии частицы для преодоления скачка электромагнитного поля скорость $r(t)$ — величина порядка единицы при $h \rightarrow 0$, хотя и меняющаяся в некоторых пределах в процессе пересечения границы. Поэтому $T(\xi) = t_0 + O(h)$, а для скоростей, как отношений приращений координат к приращению времени, справедливы оценки $p(t) \sim O(1)$, $q(t) \sim O(1)$, $r(t) \sim O(1)$ при $\delta t \rightarrow 0$ и соответственно $p(\xi) \sim O(1)$, $q(\xi) \sim O(1)$, $r(\xi) \sim O(1)$ при $h \rightarrow 0$.

Приведенные выше рассуждения, конечно, никаким доказательством на самом деле не являются. В частности, полученные оценки предполагают, что "растянутые" вдоль оси OZ потенциальные функции $U(x, y, \xi, t)$, $A(x, y, \xi, t)$, зависящие, вообще говоря, от параметра h , ограничены на интервале $-1 \leq \xi \leq +1$ и не имеют особенностей при $h \rightarrow 0$. В противном случае приведенные оценки, скорее всего, неверны. Однако высказанные выше соображения могут сыграть роль ценной подсказки.

Будем теперь *принудительно* искать решение для (5) в виде $x(\xi) = x_0 + O(h)$, $y(\xi) = y_0 + O(h)$,

$T(\xi) = t_0 + O(h)$, $p(\xi) \sim O(1)$, $q(\xi) \sim O(1)$, $r(\xi) \sim O(1)$ при $h \rightarrow 0$. Если такое решение будет найдено, то в силу теоремы о единственности решения системы уравнений (5) это решение неизбежным образом и будет истинным решением системы (5). Если же такого решения найдено не будет, то изначальные предположения о характере решения, по-видимому, неверны.

С этой целью преобразуем уравнения (5). Из (4) с учетом замены $Z = z_0 + \xi h$ следует, что

$$\begin{aligned} E_x &\approx O(1), \quad B_x \approx -\frac{1}{h} \frac{\partial A_y(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(1), \\ E_y &\approx O(1), \quad B_y \approx +\frac{1}{h} \frac{\partial A_x(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(1), \quad (6) \\ E_z &\approx -\frac{1}{h} \frac{\partial U(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(1), \quad B_z \approx O(1). \end{aligned}$$

Здесь использовано высказанное ранее предположение, что "растянутые" вдоль оси OZ функции $U(x, y, \xi, t)$, $A_x(x, y, \xi, t)$, $A_y(x, y, \xi, t)$, $A_z(x, y, \xi, t)$ и их производные по переменным x, y, ξ — регулярные функции, не имеющие особенностей при $h \rightarrow 0$. В таком случае система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} &= \frac{h}{r} = O(h), \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{hp}{r} = O(h), \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{hq}{r} = O(h), \\ \frac{dp}{d\xi} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial A_x(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(h), \\ \frac{dq}{d\xi} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial A_y(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(h), \\ r \frac{dr}{d\xi} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + \frac{e}{mc} \left[p \frac{\partial A_x(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + q \frac{\partial A_y(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} \right] + O(h). \end{aligned} \quad (7)$$

Из первых трех уравнений системы (7) следует, что $T(\xi) = t_0 + O(h)$, $y(\xi) = y_0 + O(h)$, $T(\xi) = t_0 + O(h)$, т. е. при $h \rightarrow 0$ $T^- = T^+ = t_0$, $x^- = x^+ = x_0$, $y^- = y^+ = y_0$ (здесь введены обозначения $T^- = T(-1)$, $T^+ = T(+1)$, $x^- = x(-1)$, $x^+ = x(+1)$, $y^- = y(-1)$, $y^+ = y(+1)$ для значений $T(\xi)$, $x(\xi)$, $y(\xi)$ слева и справа от бесконечно тонкой границы). Это означает, что при переходе через границу со скачком электромагнитного поля

скачкообразного изменения времени пролета и координат частицы не происходит, что находится в согласии с нашими исходными предположениями.

При интегрировании по ξ в интервале от -1 до $+1$ следующие два уравнения системы (7) дают соотношения

$$\begin{aligned} p(+1) - p(-1) &= -\frac{e}{mc} \times \\ &\times [A_x(x_0, y_0, +1, t_0) - A_x(x_0, y_0, -1, t_0)] + O(h), \end{aligned}$$

$$q(+1) - q(-1) = -\frac{e}{mc} \times \\ \times [A_Y(x_0, y_0, +1, t_0) - A_Y(x_0, y_0, -1, t_0)] + O(h),$$

т. е.

$$p^+ - p^- = -\frac{e}{mc} [A_X^+(x_0, y_0, t_0) - A_X^-(x_0, y_0, t_0)], \\ q^+ - q^- = -\frac{e}{mc} [A_Y^+(x_0, y_0, t_0) - A_Y^-(x_0, y_0, t_0)] \quad (8)$$

и

$$p^+ + \frac{e}{mc} A_X^+(x_0, y_0, t_0) = p^- + \frac{e}{mc} A_X^-(x_0, y_0, t_0), \\ q^+ + \frac{e}{mc} A_Y^+(x_0, y_0, t_0) = q^- + \frac{e}{mc} A_Y^-(x_0, y_0, t_0), \quad (9)$$

где первая группа формул интерпретируется как правило пересчета касательных компонент скорости при пересечении бесконечно тонкой границы, вторая группа формул — как инварианты, сохраняющиеся при пересечении бесконечно тонкой границы. Эти соотношения дают нам возможность правильно рассчитывать изменения касательных компонент скорости при переходе через границу скачка электромагнитного поля.

Для того чтобы справиться с последним уравнением, используем интегрирование по частям:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e}{mc} \left[p(\xi) \frac{\partial A_X(\xi)}{\partial \xi} + q(\xi) \frac{\partial A_Y(\xi)}{\partial \xi} \right] d\xi = \\ = \frac{e}{mc} \left[p(\xi) A_X(\xi) + q(\xi) A_Y(\xi) \right] \Big|_{-1}^{+1} - \\ - \int_{-1}^{+1} \frac{e}{mc} \left[A_X(\xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi} + A_Y(\xi) \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} \right] d\xi = \\ = \frac{e}{mc} \left[p(\xi) A_X(\xi) + q(\xi) A_Y(\xi) \right] \Big|_{-1}^{+1} + \\ + \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \int_{-1}^{+1} \left[A_X(\xi) \frac{\partial A_X(\xi)}{\partial \xi} + A_Y(\xi) \frac{\partial A_Y(\xi)}{\partial \xi} \right] d\xi = \\ = \left[\frac{e}{mc} (p(\xi) A_X(\xi) + q(\xi) A_Y(\xi)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 (A_X(\xi))^2 + (A_Y(\xi))^2 \right] \Big|_{-1}^{+1}.$$

После этого в результате интегрирования по ξ в интервале от -1 до $+1$ из последнего уравнения

системы (7) получается инвариант для нормальной компоненты скорости:

$$\frac{1}{2} (r^+)^2 + \frac{e}{m} U^+(x_0, y_0, t_0) - \\ - \frac{e}{mc} (p^+ A_X^+(x_0, y_0, t_0) + q^+ A_Y^+(x_0, y_0, t_0)) - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \left((A_X^+(x_0, y_0, t_0))^2 + (A_Y^+(x_0, y_0, t_0))^2 \right) = \\ = \frac{1}{2} (r^-)^2 + \frac{e}{m} U^-(x_0, y_0, t_0) - \\ - \frac{e}{mc} (p^- A_X^-(x_0, y_0, t_0) + q^- A_Y^-(x_0, y_0, t_0)) - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \left((A_X^-(x_0, y_0, t_0))^2 + (A_Y^-(x_0, y_0, t_0))^2 \right). \quad (10)$$

В этом соотношении касательные компоненты скорости берутся из соотношений (9). В результате правило пересчета нормальных компонент скорости приобретает вид:

$$\frac{1}{2} (r^+)^2 - \frac{1}{2} (r^-)^2 = -\frac{e}{m} (U^+ - U^-) + \\ + \frac{e}{mc} (p^- (A_X^+ - A_X^-) + q^- (A_Y^+ - A_Y^-)) - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \left((A_X^+ - A_X^-)^2 + (A_Y^+ - A_Y^-)^2 \right). \quad (11)$$

Естественно, в (11) необходимо брать положительное значение корня для выходной скорости r^+ , а для того, чтобы такое значение существовало, т. е. частица проходила сквозь бесконечно тонкую границу, не заворачивая назад, входная (положительная) скорость r^- должна быть достаточно велика:

$$\frac{1}{2} (r^-)^2 > \frac{e}{m} (U^+ - U^-) - \\ - \frac{e}{mc} (p^- (A_X^+ - A_X^-) + q^- (A_Y^+ - A_Y^-)) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \left((A_X^+ - A_X^-)^2 + (A_Y^+ - A_Y^-)^2 \right),$$

или же

$$K > e(U^+ - U^-) + \frac{m}{2} \left(p^- - \frac{e}{mc} (A_X^+ - A_X^-) \right)^2 + \\ + \frac{m}{2} \left(q^- - \frac{e}{mc} (A_Y^+ - A_Y^-) \right)^2,$$

где $K = \frac{m}{2}((p^-)^2 + (q^-)^2 + (r^-)^2)$ — полная входная кинетическая энергия заряженной частицы. При этом отметим, что условия (9), (10) и (8), (11) пересчета компонент скорости заряженной частицы при пересечении ею бесконечно тонкой границы справедливы как для стационарных полей, так и полей, меняющихся во времени.

Обращение индукции магнитного поля в дельта-функцию для переходной области и соответственно скачки векторного потенциала при пересечении границы — редкий (паталогический) случай для оптики заряженных частиц. При отсутствии скачка векторного потенциала условия (9) и (10) превращаются в закон сохранения энергии, уже известный из [1] (впрочем, приведенная в данной статье новая форма вывода позволяет получить этот результат более наглядным и универсальным способом):

$$\begin{aligned} p^+ &= p^-; \quad q^+ = q^-; \\ \frac{1}{2}(r^+)^2 + \frac{e}{m}U^+(x_0, y_0, t_0) &= \\ &= \frac{1}{2}(r^-)^2 + \frac{e}{m}U^-(x_0, y_0, t_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, в случае, когда скачок индукции магнитного поля при пересечении бесконечно тонкой границы меняется в ограниченном диапазоне, он никак не участвует в пересчете начальных условий траектории справа и слева от границы со скачком электромагнитного поля. (Ситуация полностью аналогична электрическому полю [1], где в формулах пересчета скоростей участвует скачок потенциала, но не скачок напряженности электрического поля.)

Чувствительность формул к калибровке векторного потенциала

Скалярный и векторный потенциалы определены с точностью до произвольной скалярной функции координат и времени: при преобразовании $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\varphi(x, y, z, t)$, $U \rightarrow U - \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t}$ напряженность электрического поля и индукция магнитного поля не меняются [3–9]. Необходимо проверить, что полученные выше формулы (9), (10) и (8), (11) остаются инвариантными при таком преобразовании.

Пусть имеется калибровочная функция $\varphi(x, y, z, t)$, которая в "растянутом" виде имеет вид регулярной функции $\varphi(x, y, \xi, t)$ и принимает при $\xi = -1$ и $\xi = +1$ разные значения $\varphi^+(x, y, t)$ и $\varphi^-(x, y, t)$ соответственно. Тогда

$$U^+ \rightarrow U^+ - \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi^+}{\partial t}, \quad U^- \rightarrow U^- - \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi^-}{\partial t},$$

$$A_x^+ \rightarrow A_x^+ + \frac{\partial\varphi^+}{\partial x}, \quad A_x^- \rightarrow A_x^- + \frac{\partial\varphi^-}{\partial x},$$

$$A_y^+ \rightarrow A_y^+ + \frac{\partial\varphi^+}{\partial y}, \quad A_y^- \rightarrow A_y^- + \frac{\partial\varphi^-}{\partial y},$$

и скорости, вычисленные по правилам (8), (11), будут иметь совсем другие значения, чем прежде, если $\varphi^+(x, y, t) \neq \varphi^-(x, y, t)$ в окрестности точки x_0, y_0, t_0 .

Этот неприятный парадокс связан с тем, что в общем случае²⁾ после такого калибровочного преобразования функция

$$A_z(x, y, \xi, t) \rightarrow A_z(x, y, \xi, t) + \frac{1}{h} \frac{\partial\varphi(x, y, \xi, t)}{\partial \xi}$$

не будет регулярной функцией при $h \rightarrow 0$. Поэтому формулы (8), (11) и (9), (10), выведенные в предположении, что $U(x, y, \xi, t)$, $A_x(x, y, \xi, t)$, $A_y(x, y, \xi, t)$, $A_z(x, y, \xi, t)$ и их производные по переменным x, y, ξ — регулярные функции, не имеющие особенностей при $h \rightarrow 0$, перестают быть верны при калибровочном преобразовании общего вида. Правда, регулярность функций $U(x, y, \xi, t)$, $A_x(x, y, \xi, t)$, $A_y(x, y, \xi, t)$, $A_z(x, y, \xi, t)$ сохраняется, если преобразующая функция имеет вид $\varphi(x, y, z, t) \sim h\psi(x, y, z, t)$, но, как легко видеть, такое преобразование никак не влияет на предельные значения при $h \rightarrow 0$ величин U^+ , U^- , A_x^+ , A_x^- , A_y^+ , A_y^- .

Примечание. Особенности пересчета координат и скоростей при пересечении бесконечно тонкой границы, когда функции $U(x, y, \xi, t)$, $A_x(x, y, \xi, t)$, $A_y(x, y, \xi, t)$, $A_z(x, y, \xi, t)$ ведут себя как $O(1/h)$ при $h \rightarrow 0$, тогда как напряженность электрического поля и индукция магнитного поля также ведут себя как $O(1/h)$ при $h \rightarrow 0$, будут рассмотрены в разделах 2.3 и 2.4. При этом надлежит отметить, что особенности пересчета коор-

²⁾ Исключением является случай $\partial\varphi(x, y, \xi, t)/\partial\xi \equiv 0$. Но тогда $\varphi(x, y, \xi, t)$ не зависит от ξ и, следовательно, $\varphi^+ \equiv \varphi^-$, равно как и $\partial\varphi^+/\partial t \equiv \partial\varphi^-/\partial t$, $\partial\varphi^+/\partial x \equiv \partial\varphi^-/\partial x$, $\partial\varphi^+/\partial y \equiv \partial\varphi^-/\partial y$. Такая перекалибровка скалярного и векторного потенциалов, не влияя на пересчет скоростей по формулам (9), (10) и (8), (11).

динат и скоростей при пересечении бесконечно тонкой границы с *сильной* сингулярностью электромагнитного поля, когда напряженность электрического поля и магнитная индукция могут вести себя как $O(1/h^2)$ при $h \rightarrow 0$, не вписываются в эту теорию. Возможно, этот вопрос будет рассмотрен в отдельной публикации.

2.2. Скалярный магнитный потенциал

Пусть рассматривается выделенная односвязная область пространства, свободная от электрических токов и магнитных сред, в которой максвелловскими эффектами, связанными с влиянием изменяющегося во времени магнитного поля на электрическое поле, а меняющегося во времени электрического поля на магнитное поле, можно пренебречь [22]. В такой области выполнено условие $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, и тогда индукция магнитного поля может быть выражена через скалярный магнитный потенциал: $\mathbf{B} = -\nabla\Phi(x, y, z, t)$. Скалярный магнитный потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ является исключительно теоретической конструкцией и может применяться только для односвязных областей пространства, свободных от токов и магнитных сред и заполненных квазистатическим электромагнитным полем, когда уравнения Максвелла для электрического и магнитного поля распадаются на отдельные блоки и не влияют друг на друга. Однако имеются многочисленные примеры, когда описание магнитного поля с помощью скалярного магнитного потенциала оказывается исключительно полезным [15], и, в частности, при численных расчетах магнитного поля может быть очень полезным его представление с помощью скалярного магнитного потенциала [16–18].

Пусть для описания магнитного поля в переходной области используется скалярный магнитный потенциал $\Phi(x, y, z, t)$. В таком случае вместо (6) надо использовать подстановку

$$\begin{aligned} E_x &\approx O(1), \quad E_y \approx O(1), \\ E_z &\approx -\frac{1}{h} \frac{\partial U(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(1), \\ B_x &\approx O(1), \quad B_y \approx O(1), \\ B_z &\approx -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(1). \end{aligned} \quad (13)$$

Как и раньше, мы предполагаем, что "растянутая" функция $\Phi(x, y, \xi, t)$, вообще говоря, зависящая от параметра h , меняется на интервале $-1 \leq \xi \leq +1$ в ограниченных пределах и не имеет особенностей

при $h \rightarrow 0$. Тогда система уравнений (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} &= \frac{h}{r} = O(h), \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{hp}{r} = O(h), \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{hq}{r} = O(h), \\ \frac{dp}{d\xi} &= -\frac{q}{r} \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(h), \\ \frac{dq}{d\xi} &= +\frac{p}{r} \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(h), \\ r \frac{dr}{d\xi} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + O(h). \end{aligned} \quad (14)$$

Из первых трех уравнений системы (14) получаются уже знакомые условия $T^- = T^+ = t_0$, $x^- = x^+ = x_0$, $y^- = y^+ = y_0$. Из последнего уравнения системы (14) получается закон сохранения энергии для движения по оси ξ в одномерном потенциальном поле $U(x_0, y_0, \xi, t_0)$ и как следствие, с учетом начальных условий и положительности $r(\xi)$, решение

$$\begin{aligned} r(\xi) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{m}{2} (r^-)^2 + eU^-(x_0, y_0, t_0) - eU(x_0, y_0, \xi, t_0) \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оставшиеся два уравнения системы (14) дают еще один закон сохранения $p^2 + q^2 = \text{const}$ и уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d}{d\xi} \arctg\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{e}{mc} \frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Уравнение (16) легко интегрируется, если предположить, что $U^+ = U^-$ и, следовательно, с точностью до $O(h^2)$ справедливо условие $r(\xi) = \text{const}$. В противном случае нахождение в аналитическом виде решения для (16) после подстановки (15) весьма проблематично. С трудностью можно справиться, если вспомнить, что уравнения (5) нам требуется решать и соответственно задавать с точностью до $O(h)$. С этой целью электрический скалярный потенциал $U(x, y, z, t)$ и магнитный скалярный потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ можно заменить на приближенные выражения

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &\approx U^-(x, y, t) \left(\frac{h-z}{2h} \right) + \\
 &\quad + U^+(x, y, t) \left(\frac{h+z}{2h} \right), \\
 \Phi(x, y, z, t) &\approx \Phi^-(x, y, t) \left(\frac{h-z}{2h} \right) + \\
 &\quad + \Phi^+(x, y, t) \left(\frac{h+z}{2h} \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Легко показать [1, 23], что для регулярных, т. е. разложимых в сходящийся ряд, функций $U(x, y, z, t)$ и $\Phi(x, y, z, t)$ выражения (17) будут на интервале $-h \leq z \leq +h$ аппроксимировать потенциалы $U(x, y, z, t)$ и $\Phi(x, y, z, t)$ с точностью до $O(h^2)$; производные выражений (17) по переменным x, y будут аппроксимировать соответствующие производные потенциалов $U(x, y, z, t)$ и $\Phi(x, y, z, t)$ с точностью до $O(h^2)$; производные выражений (17) по переменной z будут аппроксимировать производные потенциалов $U(x, y, z, t)$ и $\Phi(x, y, z, t)$ по переменной z с точностью до $O(h)$. В результате уравнения (15), (16) приобретают вид

$$\begin{aligned}
 r(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{m}{2} (r^-)^2 - e(U^+ - U^-) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \right)} = \\
 &= r^- \sqrt{1 - C_U \left(\frac{1+\xi}{2} \right)}, \\
 \frac{d}{d\xi} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) &= \frac{e(\Phi^+ - \Phi^-)}{2mcr^-} \frac{1}{\sqrt{1 - C_U \left(\frac{1+\xi}{2} \right)}},
 \end{aligned}$$

где $C_U = \frac{e(U^+ - U^-)}{m(r^-)^2/2}$. Отсюда с учетом полученного ранее закона сохранения $(p^+)^2 + (q^+)^2 = (p^-)^2 + (q^-)^2$ следует, что

$$\begin{aligned}
 r^+ &= r^- \sqrt{1 - C_U}, \\
 p^+ &= p^- \cos \lambda + q^- \sin \lambda, \\
 q^+ &= -p^- \sin \lambda + q^- \cos \lambda,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где введена вспомогательная величина λ :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{arctg} \left(\frac{q^+}{p^+} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{q^-}{p^-} \right) &= \lambda = \\
 &= \begin{cases} \frac{2e(\Phi^+ - \Phi^-)}{mcr^-} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - C_U}}{C_U} \right), & \text{если } C_U \neq 0 \text{ и } C_U < 1; \\ \frac{e(\Phi^+ - \Phi^-)}{mcr^-}, & \text{если } C_U = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Соотношения (18) и определяют изменение начальных условий (скоростей) заряженной частицы при переходе через бесконечно тонкую границу со скачком электромагнитного поля. Координаты заряженной частицы, естественно, при переходе через границу сохраняют свои прежние значения.

2.3. Особенности описания скачка магнитного поля с помощью векторного потенциала и скалярного потенциала

Легко заметить, что результаты из раздела 2.1 и раздела 2.2 плохо согласуются друг с другом. А именно раздел 2.1 предсказывает скачок типа дельта-функции для компонент магнитного поля B_x и B_y , тогда как компонента B_z ведет себя регулярным образом. Раздел же 2.2, наоборот, предсказывает скачок типа дельта-функции для компоненты B_z , тогда как компоненты B_x и B_y при прохождении переходной области в окрестности бесконечно тонкой границы ведут себя регулярным образом.

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, а также в еще большей степени скалярный магнитный потенциал, являются, вообще говоря, искусственными математическими конструкциями; а реальными физическими объектами являются напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукция магнитного поля $\mathbf{B}$. Противоречие между результатами разделов 2.1 и 2.2 заключается в следующей логической ошибке, вполне неочевидной с первого взгляда. Да, если "растянутый" векторный магнитный потенциал или "растянутый" скалярный магнитный потенциал являются регулярными функциями параметра h , то индукция магнитного поля в переходной области заведомо ведет себя не хуже, чем $O(1/h)$. Однако обратное заключение является категорически неверным: из того, что индукция магнитного поля в переходной области ведет себя как $O(1/h)$, отнюдь не следует, что "растянутый" векторный магнитный потенциал или же "растянутый" скалярный магнитный потенциал обязательно являются регулярными функциями параметра h .

Чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим

более детально поведение индукции магнитного поля в переходной области. Пусть $\mathbf{B}(x, y, z, t; h)$ ведет себя в диапазоне $-h \leq z \leq +h$ как функция малого параметра h не хуже, чем $O(1/h)$ при $h \rightarrow 0$. (Такое поведение гарантирует, что интеграл от $\mathbf{B}$ по интервалу $-h \leq z \leq +h$ при $h \rightarrow 0$ стремится к константе, т. е. что функция $\mathbf{B}$ при $h \rightarrow 0$ стремится к дельта-функции). В таком случае "растянутую" функцию $\mathbf{B}(x, y, \xi, t; h) = (B_x, B_y, B_z)$, где сделана подстановка $\xi = (z - z_0)/h$, можно представить в виде ряда по малому параметру h :

$$\begin{aligned} B_x(x, y, \xi, t; h) &= \frac{1}{h} B_x^m(x, y, \xi, t) + \\ &+ B_{x,0}(x, y, \xi, t) + \sum_{k \geq 1} h^k B_{x,k}(x, y, \xi, t), \\ B_y(x, y, \xi, t; h) &= \frac{1}{h} B_y^m(x, y, \xi, t) + \\ &+ B_{y,0}(x, y, \xi, t) + \sum_{k \geq 1} h^k B_{y,k}(x, y, \xi, t), \\ B_z(x, y, \xi, t; h) &= \frac{1}{h} B_z^m(x, y, \xi, t) + \\ &+ B_{z,0}(x, y, \xi, t) + \sum_{k \geq 1} h^k B_{z,k}(x, y, \xi, t). \end{aligned} \quad (19)$$

Из условий $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и представления (19) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z^m}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial B_{z,0}}{\partial \xi} = -\frac{\partial B_x^m}{\partial x} - \frac{\partial B_y^m}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_{z,k+1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial B_{x,k}}{\partial x} - \frac{\partial B_{y,k}}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_y^m}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial B_{y,0}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_z^m}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_{y,k+1}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_{z,k}}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_x^m}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial B_{x,0}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_z^m}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_{x,k+1}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_{z,k}}{\partial x}, \\ \frac{\partial B_y^m}{\partial x} - \frac{\partial B_x^m}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial B_{y,0}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x,0}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial B_{y,k}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x,k}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $k \geq 0$. Из условий $\frac{\partial B_z^m}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial B_y^m}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial B_x^m}{\partial \xi} = 0$ следует, что функции B_x^m, B_y^m, B_z^m от переменной ξ (переменной z) не зависят. Из условия

$\frac{\partial B_y^m}{\partial x} = \frac{\partial B_x^m}{\partial y}$ следует, что функции B_x^m, B_y^m можно выразить через вспомогательную потенциальную функцию $\Phi_m(x, y, t)$ по формулам $B_x^m = -\partial \Phi_m / \partial x$,

$B_y^m = -\partial \Phi_m / \partial y$. Из условий $\frac{\partial B_{z,0}}{\partial \xi} = -\frac{\partial B_x^m}{\partial x} - \frac{\partial B_y^m}{\partial y}$,

$\frac{\partial B_{y,0}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_z^m}{\partial y}$, $\frac{\partial B_{x,0}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_z^m}{\partial x}$ следует, что

$$B_{z,0} = \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \right) + \Phi_{z,0}(x, y, t),$$

$$B_{y,0} = \xi \frac{\partial B_z^m}{\partial y} + \Phi_{y,0}(x, y, t),$$

$$B_{x,0} = \xi \frac{\partial B_z^m}{\partial x} + \Phi_{x,0}(x, y, t),$$

а из условия $\frac{\partial B_{y,0}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x,0}}{\partial y} = 0$ следует, что функции $\Phi_{x,0}$ и $\Phi_{y,0}$ можно выразить через вспомога-

тельную потенциальную функцию $\Phi_0(x, y, t)$ по формулам $\Phi_{x,0} = -\partial \Phi_0 / \partial x$, $\Phi_{y,0} = -\partial \Phi_0 / \partial y$. Оставшиеся неиспользованными соотношения (20) позволяют восстановить в виде полинома по переменной ξ (причем со значительной свободой выбора) весь ряд (19) так, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла для магнитного поля $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$.

Восстановим вид векторного потенциала $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ и скалярного потенциала $\Phi(x, y, z, t)$, которые требуются для описания такого магнитного поля. Соотношения для векторного потенциала имеют следующий вид (здесь уже выполнен переход к "растянутой" координате $\xi = (z - z_0)/h$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial A_y}{\partial \xi} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial x} + \\ &+ \xi \frac{\partial B_z^m(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0(x, y, t)}{\partial x} + O(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial A_x}{\partial \xi} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial y} + \\ &+ \xi \frac{\partial B_z^m(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_0(x, y, t)}{\partial y} + O(h), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{h} B_z^m(x, y, t) +$$

$$+ \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \right) + \Phi_{z,0}(x, y, t) + O(h).$$

Отсюда следует, что для векторного потенциала $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, регулярного по малому параметру h , необходимым образом должно быть выполнено условие $B_z^m(x, y, t) = 0$, а решением может служить

$$\begin{aligned} A_x(x, y, \xi, t) &= -\xi \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \Phi_{z,0}(x, y, t) dy + \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + O(h), \\ A_y(x, y, \xi, t) &= \xi \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \Phi_{z,0}(x, y, t) dx + \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} + O(h), \\ A_z(x, y, \xi, t) &= \frac{\partial \psi(x, y, \xi, t)}{\partial \xi} + O(h), \end{aligned}$$

где $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, \xi, t)$ — произвольные функции соответствующих переменных.

(Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярной функции от переменных x, y, z, t , для частного решения можно без ограничения общности положить $A_z = 0$. Точно так же частное решение для функций A_x, A_y можно определять с точностью до градиента скалярной функции от переменных x, y, t . После этого остается только добавить к частному решению градиент по переменным x, y и $z = z_0 + \xi h$ от скалярной функции общего вида $\varphi(x, y, \xi, t) + h\psi(x, y, \xi, t) + \dots$ и заметить, что для того, чтобы у A_z не было сингулярных компонент, требуется, чтобы φ не зависела от ξ).

Если же допустить, что $A_x = \frac{1}{h} A_x^m + \dots$, $A_y = \frac{1}{h} A_y^m + \dots$, $A_z = \frac{1}{h} A_z^m + \dots$ (очевидно, что компоненты векторного потенциала не могут иметь сингулярность больше, чем $O(1/h)$), то ограничений на функцию $B_z^m(x, y, t)$ нет, а решением может служить

$$A_x(x, y, \xi, t) = -\frac{1}{2h} \int B_z^m(x, y, t) dy - \xi \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial y} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \Phi_{z,0}(x, y, t) dy + \frac{\partial \varphi(x, y, \xi, t)}{\partial x} + O(h),$$

$$\begin{aligned} A_y(x, y, \xi, t) &= +\frac{1}{2h} \int B_z^m(x, y, t) dx + \\ &\quad + \xi \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int \Phi_{z,0}(x, y, t) dx + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi(x, y, \xi, t)}{\partial y} + O(h), \end{aligned}$$

$$A_z(x, y, \xi, t) = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi(x, y, \xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(x, y, \xi, t)}{\partial \xi} + O(h).$$

По той же схеме анализируются соотношения для скалярного магнитного потенциала, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial x} + \xi \frac{\partial B_z^m(x, y, t)}{\partial x} - \\ &\quad - \frac{\partial \Phi_0(x, y, t)}{\partial x} + O(h), \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial y} + \xi \frac{\partial B_z^m(x, y, t)}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial \Phi_0(x, y, t)}{\partial y} + O(h), \\ -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= \frac{1}{h} B_z^m(x, y, t) + \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad + \Phi_{z,0}(x, y, t) + O(h). \end{aligned}$$

Для скалярного магнитного потенциала Φ , регулярного по малому параметру h , должны быть выполнены условия $\frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_m(x, y, t)}{\partial y} = 0$, а решением является

$$\Phi(x, y, \xi, t) = -\xi B_z^m(x, y, t) + \Phi_0(x, y, t) + O(h).$$

Если же предположить, что скалярный магнитный потенциал может иметь сингулярность вида $O(1/h)$, то ограничений на функцию $\Phi_m(x, y, t)$ нет, а решением является

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, \xi, t) &= \frac{1}{h} \Phi_m(x, y, t) - \xi B_z^m(x, y, t) + \\ &\quad + \Phi_0(x, y, t) + O(h). \end{aligned}$$

Мы получили важный результат: регулярный векторный магнитный потенциал и регулярный скалярный магнитный потенциал описывают

принципиально разные классы магнитных полей (как легко видеть, эти классы даже не пересекаются друг с другом, за исключением полей, не обладающих сингулярностью типа $O(1/h)$). Если же снять ограничение регулярности потенциалов, то и векторный магнитный потенциал, и скалярный магнитный потенциал служат одинаково универсальным средством описания магнитного поля с сингулярностью типа дельта-функции при пересечении бесконечно тонкой границы.

2.4. Скачок электромагнитного поля общего вида

Рассмотрим для полноты картины общий случай магнитного поля, обладающего сингулярностью типа дельта-функции на бесконечно тонкой плоской границе. С учетом результатов раздела 2.3 уравнения (5) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{hp}{r} = O(h), \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{hq}{r} = O(h), \quad \frac{dT}{d\xi} = \frac{h}{r} = O(h), \\ r \frac{dp}{d\xi} &= q \frac{e}{mc} B_z^m(x_0, y_0, t_0) + r \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial y} + O(h), \\ r \frac{dq}{d\xi} &= -p \frac{e}{mc} B_z^m(x_0, y_0, t_0) - r \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} + O(h), \\ r \frac{dr}{d\xi} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x_0, y_0, \xi, t_0)}{\partial \xi} + \frac{e}{mc} \left[-p \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} \right] + O(h). \end{aligned} \quad (21)$$

Эта система уравнений не слишком поддается решению, для ее упрощения надлежит снова вернуться к независимой переменной τ типа времени. После подстановки $d\tau = d\xi/r(\xi)$ система уравнений (21) с точностью до членов порядка $O(h)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 0, \quad \frac{dy}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = r, \\ \frac{dp}{d\tau} &= \frac{e}{mc} \left(q B_z^m(x_0, y_0, t_0) + r \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial y} \right), \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{e}{mc} \left(p B_z^m(x_0, y_0, t_0) + r \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} \right), \\ \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{e}{2m} (U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0)) + \frac{e}{mc} \left(-p \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Система уравнений (22) является линейной и допускает достаточно простое аналитическое решение в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами, составленной из функций 1 , τ , τ^2 (только для функции $\xi(\tau)$), $\cos \omega \tau$ и $\sin \omega \tau$, где $\omega^2 = (e/mc)^2 \left[(B_z^m)^2 + (\partial \Phi_m / \partial x)^2 + (\partial \Phi_m / \partial y)^2 \right]$. Поскольку τ определено с точностью до аддитивной константы, ничего не мешает выбрать значение $\tau = 0$ как соответствующее моменту входа частицы в переходную область через входную границу. Начальными условиями для решения служат величины, соответствующие входной границе переходной области, так что $p(0) = p_0 = p^-$, $q(0) = q_0 = q^-$, $r(0) = r_0 = r^-$, $\xi(0) = -1$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, а само решение имеет вид

$$\begin{aligned}
p(\tau) &= f_U \frac{f_X f_Z (\omega\tau - \sin \omega\tau) - \omega f_Y (1 - \cos \omega\tau)}{\omega^3} + p_0 \frac{f_X^2 + (\omega^2 - f_X^2) \cos \omega\tau}{\omega^2} + \\
&+ q_0 \frac{f_X f_Y (1 - \cos \omega\tau) + \omega f_Z \sin \omega\tau}{\omega^2} - r_0 \frac{f_X f_Z (1 - \cos \omega\tau) - \omega f_Y \sin \omega\tau}{\omega^2}, \\
q(\tau) &= f_U \frac{f_Y f_Z (\omega\tau - \sin \omega\tau) + \omega f_X (1 - \cos \omega\tau)}{\omega^3} + p_0 \frac{f_X f_Y (1 - \cos \omega\tau) - \omega f_Z \sin \omega\tau}{\omega^2} + \\
&+ q_0 \frac{f_Y^2 + (\omega^2 - f_Y^2) \cos \omega\tau}{\omega^2} - r_0 \frac{f_Y f_Z (1 - \cos \omega\tau) + \omega f_X \sin \omega\tau}{\omega^2}, \\
r(\tau) &= -f_U \frac{f_Z^2 (\omega\tau - \sin \omega\tau) + \omega^2 \sin \omega\tau}{\omega^3} - p_0 \frac{f_X f_Z (1 - \cos \omega\tau) + \omega f_Y \sin \omega\tau}{\omega^2} - \\
&- q_0 \frac{f_Y f_Z (1 - \cos \omega\tau) - \omega f_X \sin \omega\tau}{\omega^2} + r_0 \frac{f_Z^2 + (\omega^2 - f_Z^2) \cos \omega\tau}{\omega^2}, \\
\xi(\tau) &= -1 - f_U \frac{2(\omega^2 - f_Z^2)(1 - \cos \omega\tau) + f_Z^2 \omega^2 \tau^2}{2\omega^4} - p_0 \frac{f_X f_Z (\omega\tau - \sin \omega\tau) + \omega f_Y (1 - \cos \omega\tau)}{\omega^3} - \\
&- q_0 \frac{f_Y f_Z (\omega\tau - \sin \omega\tau) - \omega f_X (1 - \cos \omega\tau)}{\omega^3} + r_0 \frac{f_Z^2 (\omega\tau - \sin \omega\tau) + \omega^2 \sin \omega\tau}{\omega^3}, \\
f_Z &= \frac{e}{mc} B_Z^m(x_0, y_0, t_0), \quad f_X = \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial x}, \quad f_Y = \frac{e}{mc} \frac{\partial \Phi_m(x_0, y_0, t_0)}{\partial y}, \\
f_U &= \frac{e}{2m} (U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0)), \quad \omega = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}.
\end{aligned} \tag{23}$$

К сожалению, заключительная операция, состоящая в нахождении такого значения τ_* , которое соответствует выходу частицы из переходной области через выходную границу, приводит к трансцендентному уравнению $\xi(\tau_*) = +1$, для которого найти решение в общем виде в аналитической форме не представляется возможным. Более того, сам разбор ситуации, когда у уравнения $\xi(\tau_*) = +1$ вообще существует корень, т. е. когда заряженная частица проходит сквозь переходную область, а не заворачивает назад, представляет собой весьма сложную задачу.

Трансцендентное уравнение $\xi(\tau_*) = +1$, при необходимости, можно решить с требуемой практической точностью численно (если оно разрешимо). После этого, зная значение τ_* , можно по формулам (23) узнать, чему будут равны компоненты скорости заряженной частицы после пересечения бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля. К сожалению, получающиеся выражения лишены какой бы то ни было наглядности и изящества.

Проблема частично снимается, если обратиться к физическому смыслу магнитных потенциалов.

Из формулы (2) следует, что сингулярное поведение векторного потенциала (обращение векторного потенциала в бесконечность) возможно только в двух случаях: а) ток, возбуждающий магнитное поле, принимает в каких-то точках бесконечно большое значение; б) точка, в которой вычисляется значение векторного потенциала, находится в точке, через которую протекает ток, возбуждающий магнитное поле (здесь не делается различия между токами намагниченности ферромагнетиков и электрическими токами проводников). Как легко видеть, ни один из этих вариантов не может реализовываться в разумной ионно-оптической или электронно-оптической системах. Поэтому все технически реализуемые случаи требуют выполнения условия $B_Z^m(x, y, t) = 0$ на бесконечно тонкой границе со скачком электромагнитного поля (иллюстрацией чего является, в частности, рис. 1).

При условии же $B_Z^m = 0$ уравнение $\xi(\tau_*) = +1$ для функции $\xi(\tau)$ из решения (23), как можно проверить, вполне разрешимо в тригонометрических функциях. Другое дело, что частный случай $B_Z^m = 0$ не слишком интересен, т. к. полностью соответствует результату, полученному в разде-

ле 2.1. Пересчет от сингулярных компонент магнитного поля к главным компонентам векторного потенциала, когда это нужно для использования формул из раздела 2.1, осуществляется по формулам из раздела 2.3.

Другой важный случай (реализующийся на практике в 99,99 % случаев) состоит в том, что скачок магнитного поля не представляет собой дельта-функции ни по одной компоненте магнитной индукции. Тогда $B_z^m(x, y, t) = 0$ и $\Phi_m(x, y, t) = 0$, а уравнения (22) совпадают с уравнениями для скачка электрического поля, рассмотренными ранее в [1]. Это означает, что скачок магнитного поля с конечной вариацией магнитной индукции в переходной области никак не сказывается на скачках скорости заряженной частицы в момент прохождения частицей бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля.

3. СКАЧОК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВДОЛЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЫ

Исследование случая криволинейной границы проводится по той же схеме, что и в [1] (см. рис. 3) и приводит к такому же результату. А именно, кривизна границы не влияет на формулы пересчета начальных условий траектории заряженной частицы при пересечении ею бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля, полученные в разделе 2. Детали выкладок в отличие от самого вывода не представляют особого интереса.

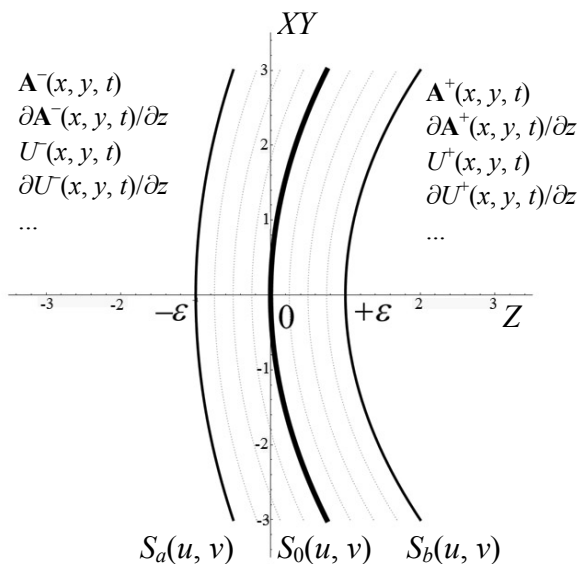


Рис. 3. Параметризованное представление окрестности криволинейной бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля

Примечание. Это будет не совсем так, когда поверхность S_0 в точке пересечения бесконечно тонкой границы имеет излом. Такой случай требует отдельного изучения, хотя, как легко понять, он представляет из себя чисто теоретический интерес и маловероятно, чтобы он имел какое-то практическое значение. Кроме того, кривизна начнет участвовать в уравнениях обобщенной траектории, если они включают в себя производные потенциалов второго порядка и выше. Этот случай соответствует уравнениям движения в тау-вариациях [24] и будет рассмотрен в отдельной публикации.

КОММЕНТАРИИ

1. При практическом использовании формул из раздела 2 необходимо учитывать, что в случае скачка векторного потенциала предельное поведение индукции магнитного поля *действительно* должно сводиться к дельта-функции, а значение векторного потенциала справа и слева от границы *действительно* соответствовать предельным значениям векторного потенциала, описывающего магнитное поле в переходной области. Рассмотрим, например, кусочно-однородное магнитное поле

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{при } z < 0, \\ (B_0, 0, 0) & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

для которого плоскость $z = 0$ является поверхностью скачка магнитного поля. Тогда, как один из вариантов, магнитное поле может быть описано с помощью кусочно-разрывного векторного потенциала как

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{при } z < 0, \\ (0, B_0(1 - z), 0) & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

что означает, что формулы из раздела 2 предсказывают скачок скорости при пересечении заряженной частицей границы $z = 0$.

Однако этот вывод категорически неверен. Для предельного поля типа "ступеньки" предельный векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{при } z < 0, \\ (0, -B_0 z, 0) & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

и как результат скачок скорости у заряженной частицы при пересечении границы отсутствует, как это и следует из выкладок раздела 2.4.

2. В разделе 2 показано, что при конечной вариации магнитного поля в переходной области отсутствует скачок скорости заряженной частицы

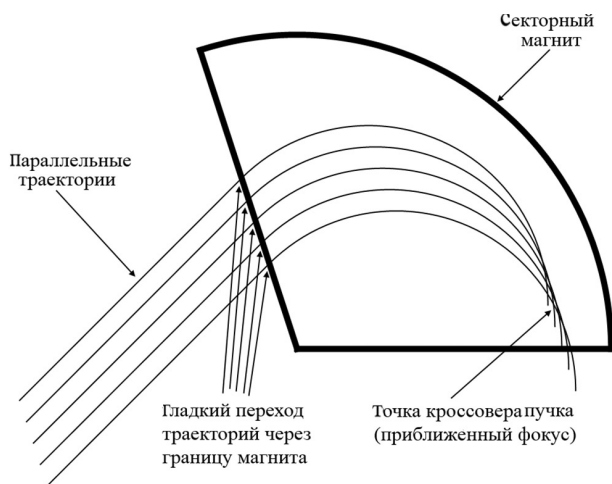


Рис. 4. Фокусировка параллельного пучка при пересечении наклонной границы однородного магнитного поля

в момент пересечения бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля. На первый взгляд, этот факт противоречит хорошо известному факту, что наклонная граница секторного магнитного поля статического масс-анализатора в приближении бесконечно узкого краевого поля дополнительно осуществляет фокусирующее и/или дефокусирующее действие на пучок заряженных частиц [25–31]. Однако при ближайшем рассмотрении противоречие снимается. А именно, как следует из рис. 4, несмотря на то что каждая траектория по отдельности не испытывает преломления при прохождении границы со скачком магнитного поля, пучок частиц как единое целое вполне может испытывать фокусирующее действие. Это связано с тем, что преломление каждой отдельной траектории при пересечении границы поля в конкретной точке и фокусировка пучка множества траекторий при пересечении траекториями границы поля в разных точках отнюдь не тождественны.

3. В данной работе предполагалось, что скачок электромагнитного поля испытывает слабую сингулярность — а именно напряженность электрического поля и индукция магнитного поля в предельном случае бесконечно тонкой границы ведут себя не хуже чем $O(1/h)$ (где $h \rightarrow 0$ — толщина переходной области). По-видимому, вполне осмысленно рассматривать сингулярности более высокого порядка ($O(1/h^2)$ или даже выше). Рассмотрению этого вопроса, возможно, будет посвящено отдельное исследование.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Переход от векторного магнитного потенциала к скалярному и обратно

В разделе 2 затронут вопрос о возможности описания магнитного поля с помощью двух принципиально различных механизмов: векторного потенциала и скалярного потенциала. В этом приложении приводятся формулы, как от одного представления можно переходить к другому.

Переход от векторного потенциала к скалярному

Пусть индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ представлена с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}(x, y, z)$ как $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z},$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Требуется найти скалярный потенциал Φ , удовлетворяющий условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -B_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -B_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -B_z. \quad (\text{A1})$$

Решение задачи (A1), когда оно существует, определено единственным образом с точностью до аддитивной константы. Для разрешимости уравнений (A1) необходимо и достаточно [32, 33] выполнение условий $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{B} = -\text{rot}(\text{grad } \Phi) = 0$, которые можно записать как $\partial B_y / \partial z = \partial B_z / \partial y$, $\partial B_x / \partial z = \partial B_z / \partial x$, $\partial B_x / \partial y = \partial B_y / \partial x$.

При выполнении этих соотношений легко проверить, что решением задачи (A1) будет функция

$$\Phi(x, y, z) = -\int_{x_0}^x B_x(x, y, z) dx - \int_{y_0}^y B_y(x_0, y, z) dy - \int_{z_0}^z B_z(x_0, y_0, z) dz + \text{const}. \quad (\text{A2})$$

Действительно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x B_x(x, y, z) dx \right) = -B_x(x, y, z),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x B_X(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z) dy \right) = \\ &= -\left(\int_{x_0}^x \frac{\partial B_X(x, y, z)}{\partial y} dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z) dy \right) = \\ &= -\left(\int_{x_0}^x \frac{\partial B_Y(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z) dy \right) = \\ &= -(B_Y(x, y, z) - B_Y(x_0, y, z) + B_Y(x_0, y, z)) = \\ &= -B_Y(x, y, z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\left(\int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial z} B_X(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial z} B_Y(x_0, y, z) dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_0}^z B_Z(x_0, y_0, z) dz \right) = \\ &= -\left(\int_{x_0}^x \frac{\partial B_Z(x, y, z)}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial B_Z(x_0, y, z)}{\partial y} dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_0}^z B_Z(x_0, y_0, z) dz \right) = \\ &= -(B_Z(x, y, z) - B_Z(x_0, y, z) + B_Z(x_0, y, z) - \\ &\quad - B_Z(x_0, y_0, z) + B_Z(x_0, y_0, z)) = \\ &= B_Z(x, y, z).\end{aligned}$$

Решение (A2) для системы уравнений (A1) можно получить следующим образом [32, 33]. Из первого уравнения (A1) следует, что

$$\Phi(x, y, z) = -\int_{x_0}^x B_X(x, y, z) dx + F(y, z). \quad \text{Подставив}$$

это выражение во второе уравнение (A1) с учетом того, что $\partial B_X / \partial y = \partial B_Y / \partial x$, получим условие $\partial F(y, z) / \partial y = -B_Y(x_0, y, z)$, т. е. что $F(y, z) =$

$$= -\int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z) dy + G(z). \quad \text{Подставив получив-}$$

шееся выражение для $\Phi(x, y, z)$ в третье уравнение (A1) с учетом того, что $\partial B_X / \partial z = \partial B_Z / \partial x$ и $\partial B_Y / \partial z = \partial B_Z / \partial y$, получим условие $\partial G(z) / \partial z = -B_Z(x_0, y_0, z)$, т. е. $G(z) =$

$$= -\int_{z_0}^z B_Z(x_0, y_0, z) dz + \text{const.} \quad \text{Отсюда, в частности,}$$

следует, что других решений, кроме (A2), быть не

может.

Отметим, что, используя соотношения $\partial B_X / \partial y = \partial B_Y / \partial x$, $\partial B_X / \partial z = \partial B_Z / \partial x$, $\partial B_Y / \partial z = \partial B_Z / \partial y$, решение (A2) можно записать в тождественно эквивалентном симметризованном виде:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= -\frac{1}{3} \int_{x_0}^x B_X(x, y, z) dx - \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_{y_0}^y B_Y(x, y, z) dy - \frac{1}{3} \int_{z_0}^z B_Z(x, y, z) dz - \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{x_0}^x B_X(x, y_0, z) dx - \frac{1}{6} \int_{y_0}^y B_Y(x, y, z_0) dy - \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{z_0}^z B_Z(x_0, y, z) dz - \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{x_0}^x B_X(x, y, z_0) dx - \frac{1}{6} \int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z) dy - \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{z_0}^z B_Z(x, y_0, z) dz - \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_{x_0}^x B_X(x, y_0, z_0) dx - \frac{1}{3} \int_{y_0}^y B_Y(x_0, y, z_0) dy - \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_{z_0}^z B_Z(x_0, y_0, z) dz + \text{const.}\end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Прямая подстановка (A3) в (A1) показывает, что при выполнении условий $\partial B_X / \partial y = \partial B_Y / \partial x$, $\partial B_X / \partial z = \partial B_Z / \partial x$, $\partial B_Y / \partial z = \partial B_Z / \partial y$ уравнения (A1) действительно обращаются в тождество.

Переход от скалярного потенциала к векторному

Пусть индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ представлена с помощью скалярного потенциала $\Phi(x, y, z)$ как $\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi$:

$$B_X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B_Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad B_Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Требуется найти векторный потенциал $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_Z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z} &= B_X, \quad -\frac{\partial A_Z}{\partial x} + \frac{\partial A_X}{\partial z} = B_Y, \\ \frac{\partial A_Y}{\partial x} - \frac{\partial A_X}{\partial y} &= B_Z.\end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Решение задачи (A4), когда оно существует,

определено единственным образом с точностью до аддитивной добавки в виде градиента произвольной скалярной функции. Для разрешимости уравнений (A4) необходимо и достаточно [10–12]

выполнение условия $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = -\operatorname{div} \mathbf{B} = -\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$, которое можно записать также как $\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$.

С учетом этого соотношения решение для задачи (A4) можно получить по той же схеме, которая была использована в разделе A1, однако проще сразу проверить готовый ответ. Сделаем подстановку:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{3} \int_{z_0}^z B_y(x, y, z) dz - \frac{1}{3} \int_{y_0}^y B_z(x, y, z) dy + \\ &+ \frac{1}{6} \int_{z_0}^z B_y(x, y_0, z) dz - \frac{1}{6} \int_{y_0}^y B_z(x, y, z_0) dy + \\ &+ C_x(x, y, z), \\ A_y &= -\frac{1}{3} \int_{z_0}^z B_x(x, y, z) dz + \frac{1}{3} \int_{x_0}^x B_z(x, y, z) dx - \\ &- \frac{1}{6} \int_{z_0}^z B_x(x_0, y, z) dz + \frac{1}{6} \int_{x_0}^x B_z(x, y, z_0) dx + \\ &+ C_y(x, y, z), \\ A_z &= \frac{1}{3} \int_{y_0}^y B_x(x, y, z) dy - \frac{1}{3} \int_{x_0}^x B_y(x, y, z) dx + \\ &+ \frac{1}{6} \int_{y_0}^y B_x(x_0, y, z) dy - \frac{1}{6} \int_{x_0}^x B_y(x, y_0, z) dx + \\ &+ C_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

После подстановки (A5) в (A4) с учетом соотношения $\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$ легко получить, что для выполнения условий (A4) необходимо и достаточно выполнение условий $\partial C_z / \partial y - \partial C_y / \partial z = 0$, $-\partial C_z / \partial x + \partial C_x / \partial z = 0$, $\partial C_y / \partial x - \partial C_x / \partial y = 0$. Из выполнения этих условий следует, что существует такая функция $H(x, y, z)$, что $\partial H / \partial x = C_x$, $\partial H / \partial y = C_y$, $\partial H / \partial z = C_z$ (см. [32, 33] и раздел A1). Поэтому формула (A5) с учетом того, что $\mathbf{C}(x, y, z) = (C_x, C_y, C_z)$ — это градиент произвольной скалярной функции $H(x, y, z)$, дает решение общего вида для задачи (A4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердников А.С. Пересчет начальных условий траектории заряженной частицы при пересечении границы со скачком электрического и магнитного поля. I. Электрическое поле // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 1. С. 48–64.
2. Голиков Ю.К., Краснов Н.В., Бубляев Р.А. Модифицированный масс-рефлектор // Научное приборостроение. 2005. Т. 15, № 4. С. 42–50.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. (Сер. "Теоретическая физика". Т. 2). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 504 с.
4. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука, 1969. 911 с.
5. Иос Г. Курс теоретической физики. Т. 1 / Под ред. проф. Б.М. Яворского. М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1963. 580 с.
6. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Изд-во ИЛ, 1958. 502 с.
8. Википедия, статья "Уравнения Максвелла". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла).
9. Википедия, статья "Векторный потенциал электромагнитного поля". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторный_потенциал_электромагнитного_поля).
10. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 4-е, перераб. и доп. Л.: ОНТИ, 1934. 456 с.
11. Википедия, статья "Векторный потенциал". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторный_потенциал).
12. Википедия, статья "Теорема разложения Гельмгольца". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_разложения_Гельмгольца).
13. Википедия, статья "Калибровка векторного потенциала". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Калибровка_векторного_потенциала).
14. Википедия, статья "Закон Био—Савара—Лапласа". URL: (https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Био_—_Савара_—_Лапласа).
15. Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Л.: Изд-во ЛПИ им. М.И. Калинина, 1984. 80 с.
16. Dahl D.A. SIMION for the personal computer in reflection // International Journal of Mass Spectrometry. 2000. V. 200. P. 3–25.
17. SIMION: программа для моделирования оптики заряженных частиц. URL: (<http://www.simion.com>).
18. Калимов А.Г. Развитие численных методов расчета электромагнитных полей, основанных на применении пространственных интегральных уравнений. Дис. ... д-ра техн. наук. СПб.: СПбПУ, 2013.
19. Евграфов М.А. Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 447 с.
20. Босс В. Лекции по математике. Т. 9: ТФКП. Изд. 2-е испр. М.: УРСС, 2010. 213 с.

21. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 224 с.
22. Бердников А.С. Высокочастотные электромагнитные поля с архимедовыми свойствами // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 104–127.
23. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
24. Greenfield D., Monastyrskiy M. Selected problems of computational charged particle optics. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics. Vol. 155. 2009. Amsterdam, Elsevier. 346 p.
25. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics. Elsevier, Amsterdam, 2009. Vol. 157. 381 p.
26. Кельман В.М., Родникова И.В., Секунова Л.М. Статические масс-спектрометры. Алма-Ата: Наука, 1985. 263 с.
27. Вольник Г. Оптика заряженных частиц. СПб.: Энергоатомиздат, 1992. 280 с.
28. Wollnik H., Ewald H. The influence of magnetic and electric fringing fields on the trajectories of charged particles // Nuclear Instruments and Methods A. 1965. Vol. 36, no. 1. P. 93–104.
29. Малов А.Ф. О некоторых ионно-оптических свойствах статических аксиально-симметричных магнитных и электрических полей. Дис. ... кандидата физ.-мат. наук. М.: МИФИ, 1961. 11 с.
30. Сысоев А.А., Самсонов Г.А. Теория и расчет статических масс-анализаторов. Ч. 1–2. М.: МИФИ, 1972. 172 с., 109 с.
31. Самсонов Г.А., Сысоев А.А. Учет влияния краевых полей в общей теории секторных анализаторов заряженных частиц. Депонированные рукописи, 1979, № 12, б/о 647.
32. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во ИЛ, 1957. 444 с.
33. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М–Л.: ОНТИ, 1934. 359 с.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург, Россия*

Контакты: Бердников Александр Сергеевич,
asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 26.12.2014

RECALCULATION OF INITIAL CONDITIONS WHEN THE TRAJECTORY OF A CHARGED PARTICLE CROSSES THE BOUNDARY WITH A JUMP OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELD. II. MAGNETIC FIELD

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

When the trajectories of charged particles in electric fields and/or magnetic fields are simulated, sometimes the case occurs when the trajectory crosses the line with a jump of the electric or magnetic field. It is necessary to recalculate carefully the coordinates and the velocities of the charged particle not to produce strange numerical artifacts like the violation of the conservation of energy. This paper introduces and proves mathematically strictly the expressions how to recalculate the coordinates and the velocities of the charged particle when the trajectory intersects with the boundary of the jump of electric and magnetic fields with a weak singularity.

Keywords: numerical solutions of differential equations, trajectory tracing in pulsed electric fields, artifacts of numerical algorithms

REFERENCES

1. Berdnikov A.S. [Recalculation of initial conditions when the trajectory of a charged particle crosses the boundary with a jump of electric and magnetic field. I. Electric field]. *Nauchnoe Priborostroyeniye* [Science Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 1, pp. 48–64. (In Russ.).
2. Golikov Yu.K., Krasnov N.V., Bublyayev R.A. [A modified mass reflectron]. *Nauchnoe Priborostroyeniye* [Science Instrumentation], 2005, vol. 15, no. 4, pp. 42–50. (In Russ.).
3. Landau L.D., Lifshiz E.M. *The classical theory of fields*. (Course of theoretical physics, vol. 2). Pergamon Press, 1971. (Russ. ed.: Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoriya polya* (Ser. «Teoreticheskaya fizika», tom 2). Moscow, Nauka Publ., 1973. 504 p.).
4. Levich V.G. [Course of theoretical physics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 911 p. (In Russ.).
5. Ios G. [Course of theoretical physics. Vol. 1]. Moscow, Minpros RSFSR Publ., 1963. 579 p. (In Russ.).
6. Stratton J.A. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1941. (Russ. ed.: Stretton Dzh.A. *Teoriya elektromagnetizma*. Moscow, GITTL Publ., 1948. 539 p.).
7. Sommerfeld A. *Electrodynamics* (ser «Lectures on Theoretical Physics», vol. 3). Academic Press, New York, 1952. 372 p. (Russ. ed.: Zommerfel'd A. *Elektrodinamika*. Moscow, IL Publ., 1958. 502 p.).
8. En.Wikipedia. *Maxwell's equations*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations).
9. En.Wikipedia. *Mathematical descriptions of the electromagnetic field*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_descriptions_of_the_electromagnetic_field).
10. Kochin N.E. [Vector calculation and beginnings of tensor calculation]. L., ONTI Publ., 1934. 456 p. (In Russ.).
11. En.Wikipedia. *Vector potential*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_potential).
12. En.Wikipedia. *Helmholtz decomposition*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_decomposition).
13. En.Wikipedia. *Gauge fixing*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing).
14. En.Wikipedia. *Biot-Savart law*. URL: (https://en.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart_law).
15. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuchin V.V. [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems]. L., Izd-vo LPI im. M.I. Kalinina Publ., 1984. 80 p. (In Russ.).
16. Dahl D.A. SIMION for the personal computer in reflection. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2000, vol. 200, pp. 3–25.
17. SIMION Industry standard charged particle optics simulation software. URL: (<http://www.simion.com>).
18. Kalimov A.G. [Development of numerical methods of calculation of the electromagnetic fields based on application of the spatial integrated equations. Dr. eng. sci. diss.]. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2013. (In Russ.).
19. Evgrafov M.A. *Analytic Functions* (Ser. «Saunders Mathematical Books»). W.B.Saunders Co., Philadelphia, 1966. 336 p. (Russ. ed.: Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkzii: Ucheb. posobie dlya vuzov*. M., Nauka Publ., 1991. 447 p.).
20. Boss V. [Lectures on mathematics. vol. 9: Theory of functions of a complex variable]. M., URSS Publ., 2010. 213 p. (In Russ.).
21. Arzimovich L.A., Luk'yanov S.Yu. [Motion of charged particles in electric and magnetic fields]. M., Nauka Publ., 1978. 224 p. (In Russ.).
22. Berdnikov A.S. [High frequency electromagnetic fields with 'archimedean' properties which are calculated taken maxwell's terms into account]. *Nauchnoe Priborostroyeniye* [Science Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 104–127. (In Russ.).
23. de Boor C. *A practical guide to splines*. Ser. «Applied Mathematical Sciences», vol. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. 392 p. (Russ. ed.: De Bor K. *Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 304 p.).
24. Greenfield D., Monastyrskiy M. *Selected problems of computational charged particle optics*. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, vol. 155, 2009, Amsterdam, Elsevier. 346 p.
25. Yavor M.I. *Optics of charged particle analyzers*. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, Elsevier, Amsterdam, 2009, Vol. 157. 381 p.
26. Kel'man V.M., Rodnikova I.V., Sekunova L.M. [Static mass spectrometers]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1985. 263 p. (In Russ.).
27. Wollnik H. *Optics of charged particles*. Academic Press, Orlando, 1987. (Russ. ed.: Vol'nik G. *Optika zaryazhennykh chastiz*. St. Petersburg, Energoatomizdat Publ., 1992. 280 p.).
28. Wollnik H., Ewald H. The influence of magnetic and electric fringing fields on the trajectories of charged particles. *Nuclear Instruments and Methods A*, 1965, vol. 36, no. 1, pp. 93–104.
29. Malov A.F. [About some ion-optical properties of static axial and symmetric magnetic and electric fields. Dr. phys. and math. sci. diss.]. M., MIFI Publ., 1961. 11 p. (In Russ.).
30. Sysoev A.A., Samsonov G.A. [Theory and calculation of static mass analyzers. Part 1-2]. M., MIFI Publ., 1972. 172 p., 109 p. (In Russ.).
31. Camsonov G.A., Sysoev A.A. [Fringing field effects in the general theory of sector charged particle analyzers]. The deposited manuscripts, 1979, no. 12, b/o 647. (In Russ.).
32. Trikom F.G. *Lezioni sulle equazioni a derivative parziali*. Edutrice Gheroni, Torino, 1954. (Russ. ed.: Trikom F. *Lekzii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh*. M., Izd-vo IL Publ., 1957. 444 p.).
33. Gyunter N.M. [Integration of the equations of the first order in private derivatives]. M.–L., ONTI Publ., 1934. 359 p.

Contacts: *Berdnikov Aleksandr Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 26.12.2014