
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 537.534.7: 621.319.7

© А. С. Бердников

**ПЕРЕСЧЕТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ
ЧАСТИЦЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ГРАНИЦЫ СО СКАЧКОМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ.
I. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ**

При моделировании движения заряженных частиц в электрических полях иногда встречаются ситуации, когда траектория заряженной частицы пересекает линию скачка электрического или магнитного поля. В этом случае необходимо правильно пересчитывать координаты и скорости заряженной частицы, чтобы не порождать дополнительных артефактов численного счета наподобие нарушения закона сохранения энергии. В данной работе рассматривается и математически строго обосновывается принцип преломления траектории заряженной частицы на границе со скачком электрического потенциала. А именно изменению должна подвергаться только нормальная компонента скорости частицы, причем таким образом, чтобы обеспечить выполнение закона сохранения энергии, тогда как остальные компоненты скорости и все координаты частицы сохраняют те же значения, которые были перед пересечением границы.

Кл. сл.: численное решение дифференциальных уравнений, трассировка заряженных частиц в электрических и магнитных полях, артефакты численных алгоритмов

ВВЕДЕНИЕ

Задача моделирования движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях [1–20] существенно осложняется в ситуации, когда траектория заряженной частицы пересекает линию скачка электрического потенциала или же линию скачка магнитного поля. Иногда это связано с тем, что в системе имеются два близко расположенных электрода с диафрагмами или сетками и с разными потенциалами (см., например, [21]), близко расположенные катушки или близко расположенные магнитные полюса. Другими примерами подобного сорта служат узкие краевые поля магнитов, электростатических секторов, квадрупольей, электростатических и магнитных призм и т. д. [16, 17, 22–29] (см. Приложение, рис. П1, П2). Во всех таких случаях общий масштаб траектории заряженной частицы зачастую не позволяет рассматривать данную переходную область подробно, и необходимо использовать то или иное приближение бесконечно тонкой границы.

Другой возможный случай возникает, когда участки электрического поля, посчитанные независимо численным методом (и, следовательно, не обеспечивающие строгую непрерывность электрического потенциала вдоль границ стыковки), имеют общую границу или налагаются друг на друга с разной детализацией области расчета поля [30–34] (см. рис. 1). Аналогичный эффект возникает и тогда, когда на область движения заряженной частицы накладывается посчитанный численно массив магнитного поля с ненулевыми значениями магнитного поля вдоль краев массива [33, 34].

При пересечении траекторией бесконечно тонкой границы со скачком поля возникает необходимость правильно пересчитывать координаты и скорости заряженной частицы, чтобы не порождать дополнительные артефакты численного счета. Так, например, очень часто в результате неаккуратного пересчета начальных условий наблюдается заметное отклонение от закона сохранения энергии [35], что сразу же понижает доверие к данным рассчитанной траектории. К сожалению, возможны и более тонкие, не столь визуально заметные, но от этого ничуть не менее неприятные отклонения истинной траектории от рассчитанной численно траектории, и корректный пересчет координат и скоростей заряженной частицы в момент пересечения границы со скачком электрического или магнитного полей призван помочь избежать этих проблем.

Принятый в [33, 34] эмпирический метод, при котором все компоненты скорости заряженной частицы масштабируются пропорционально, с тем чтобы сохранялась полная энергия частицы (кинетическая энергия частицы плюс потенциал электрического поля, умноженный на заряд частицы), а координаты частицы оставались неизменными,

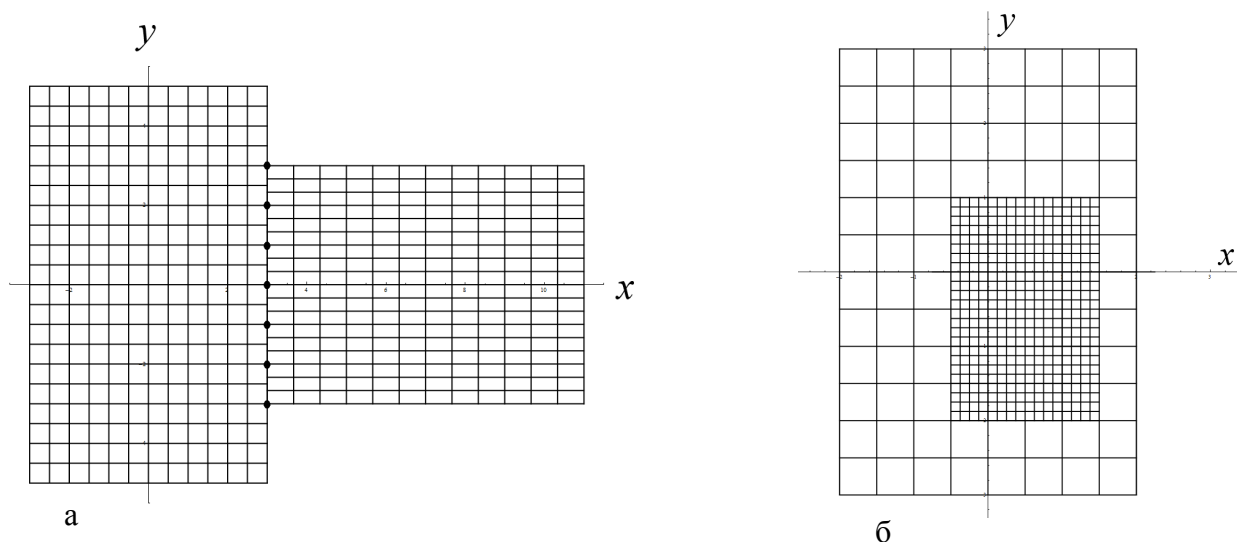


Рис. 1. Стыковка сеточных массивов с электрическим полем, рассчитанных численно.

а — два последовательных массива, имеющие общую границу; б — массив с детальным расчетом электрического поля, наложенный на массив с грубым расчетом электрического поля

призван скорее замаскировать проблему, чем является ее решением. В данной работе рассматривается и обосновывается принцип преломления траектории заряженной частицы на границе со скачком потенциала общего вида (вообще говоря, давно известный для частного случая электростатических призм [27–29]). А именно изменению подвергается только нормальная компонента скорости частицы, причем таким образом, чтобы обеспечить выполнение закона сохранения энергии. Остальные же компоненты скорости и все координаты частицы сохраняют после пересечения границы те же значения, которые они имели до пересечения границы. Следует подчеркнуть, что указанное правило работает как в случае электростатических полей, так и в случае меняющихся во времени электрических полей.

Данная работа рассматривает случай чисто электрического поля. Это позволяет очертить тонкие моменты трассировки траектории сквозь бесконечно тонкую границу со скачком поля, не углубляясь в сложные математические выкладки. Тем самым в последующих публикациях можно сосредоточиться на собственно математических выкладках, порождающих нетривиальные результаты, опуская при этом рассмотренные в данной статье детали обоснования модели бесконечно тонкой границы со скачком электромагнитного поля. В дальнейшем планируется рассмотреть пересчет граничных условий при пересечении бесконечно тонкой границы со скачком магнитного поля (возможно, наложенного на скачок электри-

ческого поля), а также пересчет граничных условий для уравнений тау-вариаций в методе М.А. Монастырского [19].

1. СКАЧОК ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ)

1.1. Формулировка задачи

Движение заряженной частицы в электрическом поле [1, 36–52] без учета релятивистских или квантовых эффектов описывается уравнениями движения Ньютона:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -e \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -e \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -e \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z — декартовы координаты частицы, $x(t), y(t), z(t)$ — траектория частицы, m — масса частицы, e — заряд частицы, $U(x, y, z, t)$ — потенциал электрического поля, t — время. Эти уравнения могут быть приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно координат $x(t), y(t), z(t)$

и скоростей $p(t), q(t), r(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x}; \\ \frac{dy}{dt} &= q; \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y}; \\ \frac{dz}{dt} &= r; \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим частный случай, при котором границей скачка электрического потенциала служит плоскость. Можно считать, что система координат выбрана так, чтобы ось OZ была перпендикулярна разграничивающей плоскости, а точка с локальными координатами $x=0, y=0, z=0$ была той точкой, в которой траектория пересекает границу скачка потенциала (возможно, под углом к оси OZ). Задача разбивается на следующие этапы:

а) создание модели переходной области, в пределе сходящейся к бесконечно тонкой границе;

б) построение аппроксимации электрического поля в переходной области;

в) оценка расхождения между выбранной аппроксимацией электрического поля и точным значением электрического поля для переходной области;

г) определение связи между координатами и скоростями заряженной частицы при пересечении переходной области и, в частности предела, к которому стремятся входные и выходные координаты и скорости, когда переходная область схлопывается в бесконечно тонкую границу;

д) верификация, что расхождение между истинным полем и модельным полем не влияет на полученные предельные значения координат и скоростей заряженной частицы.

1.2. Модель переходной области

Пусть $U^+(x, y, t)$ — предел потенциала на границе раздела при приближении к плоскости $z=0$ справа, а $U^-(x, y, t)$ — предел потенциала на границе раздела при приближении к плоскости $z=0$ слева (при зафиксированном времени t). Скачок потенциала на бесконечно тонкой границе является математической абстракцией, поэтому в реальности следует рассматривать две сближающиеся границы, где на границе $z=-h$ задан потенциал $U^-(x, y, t)$, а на границе $z=+h$ задан потенциал $U^+(x, y, t)$ (см. рис. 2). Кроме того, чтобы обеспечить непрерывность электрического поля при продолжении за пределы полосы $-h \leq z \leq +h$ (т. е. при $z < -h$ и при $z > +h$), будем считать, что на гра-

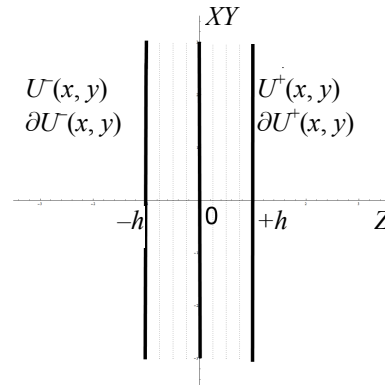


Рис. 2. Бесконечно тонкая плоская граница со скачком электрического поля как предельный случай двух сближающихся плоскостей с разными граничными значениями для электрического потенциала

нице $z=-h$ зафиксировано нормальное электрическое поле $E_z^-(x, y, t) = -(\partial U^- / \partial z)|_{z=-h}$, а на гра-

нице $z=+h$ зафиксировано нормальное электрическое поле $E_z^+(x, y, t) = -(\partial U^+ / \partial z)|_{z=+h}$. Непрерывность же тангенциальных компонент электрического поля E_x и E_y при пересечении границ

$z=+h$ и $z=-h$ переходной области обеспечивается непрерывным поведением электрического потенциала $U(x, y, z, t)$ при пересечении границ $z=+h$ и $z=-h$, подразумеваемым по умолчанию.

Для такой модели разность $U^+(x, y, t) - U^-(x, y, t)$ — это скачок электрического потенциала¹⁾ при пересечении границы $z=0$, разность $E_z^+(x, y, t) - E_z^-(x, y, t)$ — это конечный скачок нормальной компоненты напряженности электрического поля на границе $z=0$, и эти два параметра могут рассматриваться как независимые характеристики модели, друг с другом не связанные. Конечные скачки тангенциальных компонент напряженности электрического поля на границе $z=0$ являются зависимыми величинами от этих данных:

$$\begin{aligned} E_x^+(x, y, t) - E_x^-(x, y, t) &= \\ &= -\left[\left(\partial U^+ / \partial x \right) \Big|_{z=+h} - \left(\partial U^- / \partial x \right) \Big|_{z=-h} \right], \\ E_y^+(x, y, t) - E_y^-(x, y, t) &= \\ &= -\left[\left(\partial U^+ / \partial y \right) \Big|_{z=+h} - \left(\partial U^- / \partial y \right) \Big|_{z=-h} \right]. \end{aligned}$$

Предел при $h \rightarrow 0$, к которому стремится тра-

¹⁾ Примером системы, в которой реализуется в качестве предельного случая конечный скачок потенциала между двумя сетками, расположенными бесконечно близко друг от друга, является [21]. Другим примером служат электростатические призмы [22, 23, 27–29].

ектория заряженной частицы, пересекающая полосу $-h \leq z \leq +h$ (если такой предел существует), и будет рецептом для пересчета начальных условий траектории при пересечении бесконечно тонкой границы.

1.3. Локально-кубическая аппроксимация электрического поля

Простейшая аппроксимация для потенциала электрического поля, удовлетворяющая установ-

ленным условиям на границах $z = -h$ и $z = +h$, которая тем самым обеспечивает непрерывность как потенциала, так и напряженности электрического поля при переходе внутрь полосы $-h \leq z \leq +h$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{U}(x, y, z, t) = & U^-(x, y, t) \left[-\left(\frac{h+z}{2h}\right) + \left(\frac{h+z}{2h}\right)^3 + 2\left(\frac{h-z}{2h}\right) - \left(\frac{h-z}{2h}\right)^3 \right] + \\ & + U^+(x, y, t) \left[2\left(\frac{h+z}{2h}\right) - \left(\frac{h+z}{2h}\right)^3 - \left(\frac{h-z}{2h}\right) + \left(\frac{h-z}{2h}\right)^3 \right] + \\ & + \frac{2h}{3} E_z^-(x, y, t) \left[\left(\frac{h+z}{2h}\right) - \left(\frac{h+z}{2h}\right)^3 - 2\left(\frac{h-z}{2h}\right) + 2\left(\frac{h-z}{2h}\right)^3 \right] + \\ & + \frac{2h}{3} E_z^+(x, y, t) \left[2\left(\frac{h+z}{2h}\right) - 2\left(\frac{h+z}{2h}\right)^3 - \left(\frac{h-z}{2h}\right) + \left(\frac{h-z}{2h}\right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Аппроксимация (3) представляет собой полином третьей степени относительно координаты z и нелинейную функцию вполне общего вида по переменным x, y . Легко проверить, что граничные условия

$$\begin{aligned} \hat{U}|_{z=-h} &= U^-(x, y, t), \quad \hat{U}|_{z=+h} = U^+(x, y, t), \\ \frac{\partial \hat{U}}{\partial z}|_{z=-h} &= -E_z^-(x, y, t), \quad \frac{\partial \hat{U}}{\partial z}|_{z=+h} = -E_z^+(x, y, t), \end{aligned} \quad (4)$$

будут действительно выполнены. Фактически формула (3) является одиночным кубическим сплайном [53] по переменной z , у которого входные данные и соответственно коэффициенты являются параметрически заданными функциями, зависящими от параметров x, y .

Здесь, однако, следует сделать следующие замечания.

1. Аппроксимация (3) обеспечивает на границах полосы $-h \leq z \leq +h$ непрерывность стыковки как потенциала, так и электрического поля, однако она не обеспечивает *гладкость* стыковки электрического поля.

2. Аппроксимация (3) не удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

которому должен удовлетворять потенциал электростатического поля. (Уравнение Лапласа должно выполняться, когда (если) эффекты, связанные с объемным зарядом, малы и когда (если) изменение электрического поля во времени является квазистатическим по сравнению с характерным временем распространения со скоростью света возмущения электрического поля в промежутке между электродами системы).

От первого ограничения легко избавиться, если добавить граничные условия

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial z^2}|_{z=-h} = -E_{zz}^-(x, y, t), \quad \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial z^2}|_{z=+h} = -E_{zz}^+(x, y, t)$$

для вторых нормальных производных потенциала на границах полосы и использовать полином пятой степени (сплайн) по координате z с надлежащим образом выбранными коэффициентами. При желании можно и дальше повышать требования к гладкости стыковки электрического поля, задавая на границах полосы дополнительные краевые условия для производных функции $E_z(x, y, z, t)$

соответствующего порядка по переменной z и соответственно повышая степень аппроксимирующего полинома. Однако в использовании столь педантичного подхода нет необходимости, поскольку поправки такого рода к функции (3) имеют порядок $O(h^2)$ и выше, а даже поправки порядка $O(h)$, как мы вскоре увидим, никак не сказываются на правилах пересчета начальных условий заряженной частицы при пересечении границы со скачком электрического поля.

Второе ограничение также не является при ближайшем рассмотрении существенным. Сами по себе уравнения механического движения (1) и (2) не несут в себе требования, чтобы электростатический потенциал удовлетворял уравнению Лапласа (5). Из следующего раздела следует, что расхождения между истинным электрическим полем и аппроксимацией (3) имеют величину, не хуже чем $O(h^2)$ для потенциала и не хуже чем $O(h)$ для напряженности электрического поля, безотносительно к факту выполнения уравнения Лапласа. Поправки же такого порядка, как будет показано далее, не сказываются на законе пересчета начальных условий для заряженной частицы при пересечении ею бесконечно тонкой границы со скачком электрического поля. Поэтому, если даже к аппроксимации (3) добавить корректор, превращающий ее в строго лапласову функцию, такая коррекция не изменит итогового закона пересчета начальных условий заряженной частицы, полученного на основании аппроксимации (3).

1.4. Точность локально-кубической аппроксимации электрического поля

Пусть $U(x, y, z, t)$ — электрический потенциал, описывающий реальное поведение электрического поля в пределах полосы $-h \leq z \leq +h$. В силу малости параметра h и в предположении, что полеобразующие электроды отстоят от оси OZ по крайней мере на расстояние h , функцию $U(x, y, z, t)$ и напряженность электрического поля $E(x, y, z, t)$ можно разложить в сходящийся ряд Тейлора²⁾ по переменной z в окрестности точки $z = 0$:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &\approx U_0(x, y, t) + U_1(x, y, t) \cdot z + \\ &+ U_2(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} z^2 + U_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{6} z^3 + \dots, \\ E(x, y, z, t) &\approx E_0(x, y, t) + E_1(x, y, t) \cdot z + \\ &+ E_2(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} z^2 + E_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{6} z^3 + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U_k(x, y, t) &= \partial^k U(x, y, z, t) / \partial z^k, \\ E_k(x, y, t) &= \partial^k [-\nabla U(x, y, z, t)] / \partial z^k \end{aligned}$$

в точке $z = 0$.

Из (6) следует, что при $-h \leq z \leq +h$

$$\begin{aligned} U^-(x, y, t) &\approx U_0(x, y, t) - U_1(x, y, t) \cdot h + \\ &+ U_2(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} h^2 - U_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{6} h^3 + O(h^4), \\ U^+(x, y, t) &\approx U_0(x, y, t) + U_1(x, y, t) \cdot h + \\ &+ U_2(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} h^2 + U_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{6} h^3 + O(h^4), \\ E_z^-(x, y, t) &\approx \\ &\approx -\left(U_1(x, y, t) - U_2(x, y, t) \cdot h + U_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} h^2 \right) + \\ &+ O(h^3), \\ E_z^+(x, y, t) &\approx \\ &\approx -\left(U_1(x, y, t) + U_2(x, y, t) \cdot h + U_3(x, y, t) \cdot \frac{1}{2} h^2 \right) + \\ &+ O(h^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (7) в (3) после группировки членов с одинаковыми степенями h и с учетом того, что переменная z меняется в границах $-h \leq z \leq +h$ (т. е. является величиной порядка малости $O(h)$), получим, что разность между аппроксимацией $\hat{U}(x, y, z, t)$ из формулы (3) и рядом Тейлора (6) для функции $U(x, y, z, t)$ будет величиной порядка $O(h^4)$. Точно также разность между $\hat{E}_x(x, y, z, t) = -\partial \hat{U}(x, y, z, t) / \partial x$ и $E_x(x, y, z, t) = -\partial U(x, y, z, t) / \partial x$ будет иметь порядок $O(h^4)$, разность между $\hat{E}_y(x, y, z, t) = -\partial \hat{U}(x, y, z, t) / \partial y$ и $E_y(x, y, z, t) = -\partial U(x, y, z, t) / \partial y$ также будет

²⁾ Аналитичность решений уравнений Лапласа и Пуассона, т. е. разложимость как электрического потенциала, так и напряженности электрического поля в сходящийся ряд в пространстве вне электродов, строго доказывается, например, в [54].

иметь порядок $O(h^4)$, а разность между $\hat{E}_z(x, y, z, t) = -\partial \hat{U}(x, y, z, t)/\partial z$ и $E_z(x, y, z, t) = -\partial U(x, y, z, t)/\partial z$ будет иметь порядок $O(h^3)$. Указанная оценка справедлива безотносительно к тому, удовлетворяет ли истинный электрический потенциал $U(x, y, z, t)$ уравнению Лапласа.

1.5. Анализ поведения траектории, пересекающей переходную область, и предельный переход к бесконечно тонкой границе

Осталось определить, как же именно должны пересчитываться начальные условия для заряженной частицы при пересечении границы со скачком потенциала. Для этого при интегрировании уравнений (2) в процессе прохождения заряженной частицей полосы пространства $-h \leq z \leq +h$ возьмем координату z в качестве независимой переменной вместо времени t . Это можно сделать, если в начальный момент компонента скорости $v_z^0 = r_0$ положительна (т. е. частица движется в нужном направлении), а разность потенциалов $U^+(x, y, t) - U^-(x, y, t)$ между границами недостаточно велика (по сравнению со скоростью v_z^0), чтобы частица в процессе движения могла развернуться в обратном направлении, не достигнув выходной границы. В случае монотонного роста зависимости $z(t)$ после взаимно-однозначной замены $Z = z(t)/h$, $t = T(Z)$ уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dZ} &= \frac{h}{r}; \quad \frac{dx}{dZ} = p \frac{dT}{dZ}; \\ \frac{dp}{dZ} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, Z, T)}{\partial x} \frac{dT}{dZ}; \quad \frac{dy}{dZ} = q \frac{dT}{dZ}; \\ \frac{dq}{dZ} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, Z, T)}{\partial y} \frac{dT}{dZ}; \\ \frac{dr}{dZ} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial U(x, y, Z, T)}{\partial z} \frac{dT}{dZ}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $-1 \leq Z \leq +1$ — новая безразмерная независимая переменная.

Допустим, что при пересечении переходной области при $h \rightarrow 0$ выполнены оценки $x(Z) \sim O(h)$, $y(Z) \sim O(h)$, $T(Z) \sim t_0 + O(h)$, $p(Z) \sim O(1)$, $q(Z) \sim O(1)$, $r(Z) \sim O(1)$. Действительно, в силу инерционности движения заряженной частицы в физически реалистичной системе она не может за бесконечно малое время изменить

сколько-нибудь заметно свои координаты, так что $x(t) \sim x_0 + O(\delta t)$, $y(t) \sim y_0 + O(\delta t)$, $z(t) \sim z_0 + O(\delta t)$, где δt — время пересечения переходной области, а в соответствии с выбранной системой координат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Соответственно скорости как производные от координат по времени (или, скорее, как отношение приращений координат к приращению времени) удовлетворяют оценкам $p(t) \sim O(1)$, $q(t) \sim O(1)$, $r(t) \sim O(1)$ при $\delta t \rightarrow 0$. Поскольку условие $h \rightarrow 0$ влечет за собой условие $\delta t \rightarrow 0$, то справедливы также утверждения, что $p(Z) \sim O(1)$, $q(Z) \sim O(1)$, $r(Z) \sim O(1)$ при $h \rightarrow 0$. В силу того, что $r(Z) \sim O(1)$ является монотонной положительной функцией нормированной координаты Z , из условия $\frac{dT}{dZ} = \frac{h}{r}$ следует, что $\frac{dT}{dZ} \sim O(h)$ и тем самым также $\frac{dx}{dZ} \sim O(h)$ и $\frac{dy}{dZ} \sim O(h)$. Интегрируя эти соотношения по переменной $Z \sim O(1)$ с учетом требований, что $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $T(0) = t_0$, получаем требуемые оценки.

Используя эти оценки, аппроксимацию (3) и подстановку $z = h \cdot Z$, из уравнений (8) получаем уточненный результат:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dZ} &= O(h); \quad \frac{dp}{dZ} = O(h); \quad \frac{dy}{dZ} = O(h); \\ \frac{dq}{dZ} &= O(h); \quad \frac{dT}{dZ} = O(h); \quad \frac{dr}{dZ} = -\frac{3}{4r} \frac{e}{m} \times \\ &\times (U^+(x, y, T) - U^-(x, y, T)) \cdot (1 - Z^2) + O(h), \end{aligned} \quad (9)$$

причем при добавлении к формуле (3) членов вида $O(h^k)$ (где $k \geq 1$) выражения (9) сохраняют свою форму в смысле оценки порядков малости правых частей уравнений.

Первые четыре уравнения системы (9) с учетом условий $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $T(0) = t_0$, $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$, $r(0) = r_0$ очевидным образом дают результат $x(Z) \approx O(h)$, $y(Z) \approx O(h)$, $T(Z) \approx t_0 + O(h)$, $p(Z) \approx p_0 + O(h)$, $q(Z) \approx q_0 + O(h)$, что находится в согласии со сделанными ранее оценками. Последнее же уравнение системы (9) потребует отдельного рассмотрения. Его можно преобразовать к виду

$$r \frac{dr}{dZ} =$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{e}{m} (U^+(0,0,t_0) - U^-(0,0,t_0)) \cdot (1 - Z^2) + O(h), \quad (10)$$

откуда следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [r(\xi)]^2 \Big|_{\xi=-1}^{\xi=Z} &= \\ &= -\frac{3}{4} \frac{e}{m} (U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0)) \times \\ &\times \int_{-1}^Z (1 - \xi^2) d\xi + O(h), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [r(Z)]^2 &= \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 - \frac{e}{m} (U^+(0,0,t_0) - U^-(0,0,t_0)) \times \\ &\times \frac{3}{4} \left(Z - \frac{1}{3} Z^3 \right) + O(h), \end{aligned} \quad (11)$$

где дополнительно использовано условие $r(0) = r_0$. С учетом того, что $r(Z)|_{Z=-1} = r_{0-}$ — значение нормальной компоненты скорости на левой стороне бесконечно тонкой границы, а $r(Z)|_{Z=+1} = r_{0+}$ — значение нормальной компоненты скорости на правой стороне бесконечно тонкой границы, соотношение (11) можно записать в форме закона сохранения полной энергии:

$$\frac{m(r_{0+})^2}{2} + eU^+(x_0, y_0, t_0) = \frac{m r_0^2}{2} + eU^-(x_0, y_0, t_0). \quad (12)$$

Связь же между собой остальных начальных параметров заряженной частицы до прохождения границы и после прохождения границы записывается как

$$\begin{aligned} x_{0+} &= x_{0-} = x_0, \quad y_{0+} = y_{0-} = y_0, \quad z_{0+} = z_{0-} = z_0, \\ p_{0+} &= p_{0-} = p_0, \quad q_{0+} = q_{0-} = q_0, \quad t_{0+} = t_{0-} = t_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нормированная зависимость (11) как функция безразмерного параметра Z показана на рис. 3. Она монотонно растет или монотонно падает для значений параметра $-1 \leq Z \leq +1$ в зависимости от знака величины $e(U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0))$ (т. к. масса всегда положительна). При $eU^+(x_0, y_0, t_0) > eU^-(x_0, y_0, t_0)$ нормальная скорость заряженной частицы на выходе будет меньше, чем на входе (торможение); при $eU^+(x_0, y_0, t_0) < eU^-(x_0, y_0, t_0)$ нормальная скорость заряженной частицы на выходе будет боль-

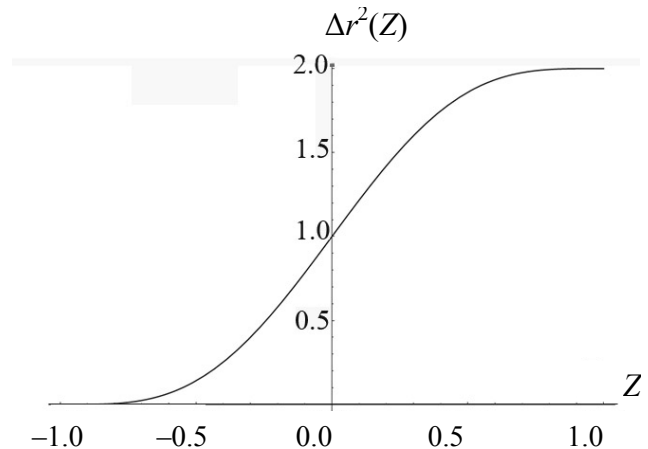


Рис. 3. Изменение нормальной компоненты скорости заряженной частицы при прохождении переходной области между двумя сближающимися плоскостями с разными граничными значениями для электрического поля.

График показан в безразмерных нормированных единицах согласно уравнению (11)

ше, чем на входе (ускорение). Если же $\frac{m r_0^2}{2} \leq e(U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0))$, то начальной скорости частицы не хватает, чтобы преодолеть потенциальный барьер $e(U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0))$, так что нормальная скорость должна поменять свое направление на противоположное $r_{0+} = -r_{0-}$ в этом случае, а собственно перехода заряженной частицы через границу просто не происходит. (При этом, заметим, полная кинетическая энергия частицы $\frac{m(p_0^2 + q_0^2 + r_0^2)}{2}$ может быть и больше потенциального барьера, но одного этого факта недостаточно для того, чтобы заряженная частица преодолела потенциальный барьер в виде бесконечно тонкой границы со скачком электрического потенциала).

Соотношения (12), (13) описывают преобразование начальных условий для траектории заряженной частицы при прохождении границы со скачком электрического потенциала. Даже с учетом того, что в меняющихся во времени электрических полях закон сохранения энергии, вообще говоря, не выполняется, энергетическое соотношение (12) остается справедливым, поскольку за бесконечно малое время, за которое заряженная частица преодолевает рассматриваемую здесь бесконечно узкую полосу пространства, потенциалы

и энергии просто не успевают измениться. Следует также отметить, что правило пересчета скоростей (12), (13) зависит именно от скачка потенциала на границе между двумя областями, излом потенциала электрического поля, т. е. величина $E_z^+(x_0, y_0, t_0) - E_z^-(x_0, y_0, t_0)$ никак не влияет на изменение координат и скоростей частицы по разные стороны от границы перехода.

1.6. Заключительные замечания

Соотношение (12), если пренебречь строгостью рассуждений, может быть выведено гораздо проще с помощью совершенно элементарных рассуждений. Из уравнения $m\ddot{z} = -e \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z}$ следует соотношение $m\dot{z}\ddot{z} = -e \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z} \dot{z}$. Проинтегрировав его по времени от $t = t_a$ до $t = t_b$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{m[\dot{z}(t_b)]^2}{2} - \frac{m[\dot{z}(t_a)]^2}{2} &= \\ &= -e \int_{t=t_a}^{t=t_b} \frac{\partial U(x(t), y(t), z(t), t)}{\partial z} \dot{z}(t) dt. \end{aligned}$$

Предположим, что функции $x(t) \approx \text{const} = x_0$, $y(t) \approx \text{const} = y_0$ на интервале времени $t \in [t_a, t_b]$ меняются мало,³⁾ а потенциал U (точнее, нормальная компонента электрического поля $E_z = -\partial U / \partial z$) либо вообще не зависит от времени t , либо меняется с течением времени пренебрежимо мало (при "замороженных" координатах, естественно). Поэтому интеграл можно записать как

$$\int_{t=t_a}^{t=t_b} \frac{\partial U(x(t), y(t), z(t), t)}{\partial z} \dot{z}(t) dt \approx$$

³⁾ Величина $z(t)$ тоже меняется мало на интервале времени $t \in [t_a, t_b]$, и можно бы было ее заменить на константу. Но величина $\dot{z}(t)$ на этом интервале меняется быстро из-за сингулярного поведения E_z , и, кроме того, несмотря на малое изменение $z \in [z_a, z_b] \approx \text{const} = z_0$, величина $E_z = -\partial U / \partial z$ на этом малом интервале изменения z успевает измениться очень значительно, с тем чтобы обеспечить скачок электрического потенциала. Поэтому для последующих выкладок удобнее сохранить $z(t)$, как есть.

$$\begin{aligned} &\approx \int_{t=t_a}^{t=t_b} \frac{\partial U(x_0, y_0, z(t), t_0)}{\partial z} \dot{z}(t) dt = \\ &= U(x_0, y_0, z(t), t_0) \Big|_{t=t_a}^{t=t_b} = \\ &= U(x_0, y_0, z_b, t_0) - U(x_0, y_0, z_a, t_0). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует соотношение (12), если допустить, что при $t_a \rightarrow t_0^-$, $t_b \rightarrow t_0^+$ справедливо $z_a \approx z_b \approx z_0$.

Однако этот "вывод" целиком и полностью основан на допущении, что компоненты электрического поля E_x и E_y остаются ограниченными по величине в пределах бесконечно узкой полосы между двумя границами, так что за бесконечно малый временной промежуток $t \in [t_a, t_b]$ частица не успевает сместиться ни по координате x , ни по координате y . Также неявно предполагается, что на малом интервале изменения координат x, y компоненты электрического поля E_x, E_y, E_z практически постоянны при "замороженной" координате z и "замороженном" времени t . (Для координаты z это очевидным образом не так: на малом интервале изменения z величина $E_z(z)$ меняется очень сильно, несмотря на малость интервала изменения z). В то время как сингулярность поведения компоненты E_z при наличии на бесконечно тонкой границе $z = z_0$ конечного скачка электрического потенциала

$$e(U^+(x_0, y_0, t_0) - U^-(x_0, y_0, t_0))$$

вполне очевидна, регулярность компонент E_x и E_y при прохождении бесконечно тонкой границы требует обоснования. Поскольку профили электрического потенциала $U^-(x, y, t_0)$ и $U^+(x, y, t_0)$ не обязаны меняться синхронно по обе стороны разделяющей границы при изменении координат x и y , регулярность поведения E_x и E_y может оказаться под вопросом. Кроме того, обоснование тех фактов, что прохождение бесконечно тонкой области с бесконечно большим электрическим полем не приводит к вполне конечным "скачкам" траектории по координатам и/или времени (только по скоростям и энергии), а излом потенциала на границе никак не влияет на пересчет начальных условий заряженной частицы, тоже должно быть убедительным.

В конечном счете, естественно, все эти тонкие моменты можно аккуратно обосновать и сделать приведенный в этом подразделе способ вывода

соотношения (12) в равной степени корректным. Однако краткость и "очевидность" вывода тем самым будут безвозвратно потеряны. Способ же вывода соотношения (12) и соотношений (13), использованный ранее, ни в каких подобных искусственных предположениях (с их последующим обоснованием) не нуждается, они возникают и обосновываются в процессе выкладок сами собой. В конечном счете, математический подход оказывается и проще, и короче, и корректнее, чем "интуитивно понятный" подход физический, тем более, что в случае скачка магнитного поля и скачка начальных условий для уравнений тау-вариаций [19], которые будут рассмотрены в следующих публикациях, интуитивные соображения окончательно перестают работать.

2. СКАЧОК ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Собственно говоря, все существенные эффекты уже рассмотрены в предыдущем разделе. Однако, если граница между двумя областями представляет собой криволинейную поверхность, то *возможно* появление дополнительных тонких моментов, отсутствующих для простой, чисто плоской границы. Рассмотрим достаточно кратко схему, по которой этот случай может быть проанализирован с разумной математической строгостью и общностью.

Пусть в трехмерном пространстве имеется двумерная односвязная поверхность S_0 , на которой имеется скачок электрического поля. Пусть траектория пересекает эту поверхность в точке $(x_0, y_0, z_0) \in S_0$. Без ограничения общности можно выбрать систему координат таким образом, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) совпадала с началом координат: $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, а ось OZ была нормалью к поверхности S_0 в точке пересечения поверхности и траектории.

Для описания поверхности S_0 используем параметрическое представление $x = X_0(u, v)$, $y = Y_0(u, v)$, $z = Z_0(u, v)$, где функции $X_0(u, v)$, $Y_0(u, v)$, $Z_0(u, v)$ отображают некоторое множество точек $(u, v) \in W \subset \mathbb{R}^2$ на точки поверхности S_0 в трехмерном пространстве. (Далее будет предполагаться, без акцентирования внимания на этом факте, что рассматриваемые множества точек — это односвязные замкнутые множества, всюду плотные, за исключением границы, которая представляет собой простую непрерывно дифференцируемую замкнутую кривую (поверхность) без самопересечений и экзотических топологических

свойств типа фракталов, странных аттракторов и т. п.). Усилим наше требование: поверхность S_0 должна являться лишь одним из представителей однопараметрического семейства поверхностей S_τ , зависящих от вещественного параметра τ . Искомое семейство поверхностей S_τ задается с помощью функций $x = X(u, v, \tau)$, $y = Y(u, v, \tau)$, $z = Z(u, v, \tau)$, где пары параметров $(u, v) \in W$ отображаются на точки поверхностей S_τ , а конкретные значения $\tau = \text{const}$ выделяют и фиксируют соответствующую поверхность S_τ из этого однопараметрического семейства. Предполагается, что параметризация выбрана так, чтобы поверхность S_0 соответствовала значению $\tau = 0$. Кроме того, предполагается, что разные поверхности S_τ не пересекаются друг с другом.⁴⁾

Потребуем, чтобы функции $x = X(u, v, \tau)$, $y = Y(u, v, \tau)$, $z = Z(u, v, \tau)$ не просто определяли однопараметрическое семейство поверхностей S_τ , но осуществляли взаимно-однозначное отображение трехмерного множества точек $(u, v, \tau) \in G \subset \mathbb{R}^3$ на трехмерное множество точек $S^3 \subset \mathbb{R}^3$, представляющее собой объединение однопараметрического семейства поверхностей S_τ и тем самым окружающее и заключающее в себе поверхность S_0 . Тогда при условии, что τ пробегает интервал $\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, поверхности S_τ будут плотно заполнять своими точками трехмерную окрестность поверхности S_0 , причем соответствие между точками (x, y, z) и тройками параметров (u, v, τ) будет взаимно-однозначным. При этом удобно организовать соответствие между точками так, чтобы точка $u = 0, v = 0, \tau = 0$ отображалась в точку $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ (и наоборот).

Для целей нашего анализа будем считать, что при фиксированном $\tau = -\varepsilon$ отображение $x = X(u, v, \tau)$, $y = Y(u, v, \tau)$, $z = Z(u, v, \tau)$ порождает поверхность S_a , которую будем называть

⁴⁾ Вероятно, простейший способ построить такую систему поверхностей S_τ — использовать параллельный перенос поверхности S_0 вдоль оси OZ на расстояние τ : $X(u, v, \tau) \equiv X_0(u, v)$, $Y(u, v, \tau) \equiv Y_0(u, v)$, $Z(u, v, \tau) \equiv Z_0(u, v) + \tau$. Характерно, что при этом автоматически не возникает проблемы с пересечением разных поверхностей S_τ в общей точке.

"левой границей", при $\tau = +\varepsilon$ — поверхность S_b , которую будем называть "правой границей" (где $\varepsilon > 0$ — малый параметр). При $\tau = 0$ отображение $x = X(u, v, \tau)$, $y = Y(u, v, \tau)$, $z = Z(u, v, \tau)$ порождает уже описанную выше поверхность S_0 , которую будем называть "границей скачка" или "предельной границей". Предполагается, что при росте τ от $\tau = -\varepsilon$ до $\tau = 0^-$ поверхности S_τ монотонно эволюционируют от S_a до S_0 , приближаясь к S_0 слева, а уменьшении τ от $\tau = +\varepsilon$ до $\tau = 0^+$ поверхности S_τ эволюционируют от S_b до S_0 , приближаясь к S_0 справа (см. рис. 4). При этом ортогональность оси OZ и поверхности S_0 в точке $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ эквивалентна тому, что в точке $u = v = \tau = 0$, которая соответствует геометрической точке $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, выполнены условия $\partial Z / \partial u = \partial Z_0 / \partial u = 0$, $\partial Z / \partial v = \partial Z_0 / \partial v = 0$.

Поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между точками x, y, z и точками u, v, τ , то потенциал электрического поля и траектории заряженной частицы можно с равной степенью легкости описывать как в координатах x, y, z , так и в координатах u, v, τ . Запишем уравнения (2) в переменных u, v, τ вместо переменных x, y, z , причем при этом полезно перейти от независимой переменной t и функции $\tau(t)$ к независимой пе-

ременной τ и функции $T(\tau)$ (предполагается, что скорость частицы достаточно велика, чтобы преодолеть барьер в виде скачка потенциала, так что $\tau(t)$ — монотонно растущая функция времени в окрестности поверхности S_0). При такой замене мы получаем шесть уравнений для неизвестных функций $u(\tau)$, $v(\tau)$, $T(\tau)$, $p(\tau)$, $q(\tau)$, $r(\tau)$ вместо исходных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$. (Здесь существенно, что $p(\tau)$, $q(\tau)$, $r(\tau)$ — это те же самые скорости $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, но отсчитываемые от координаты τ вместо времени t , а не производные функций $u(\tau)$, $v(\tau)$, $T(\tau)$ по переменной τ). Уравнения замены переменных в общем виде выглядят как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{d\tau} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial X}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{dT}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{du}{d\tau} + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial Y}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{dT}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \frac{du}{d\tau} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial Z}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{dT}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dT}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dT}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dT}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $X(u, v, \tau)$, $Y(u, v, \tau)$, $Z(u, v, \tau)$ — введенные ранее функции отображения пространства (u, v, τ) на пространство (x, y, z) . Соответственно производные потенциала по переменным x, y, z в общем виде выражаются через производные потенциала по переменным u, v, τ , исходя из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial U}{\partial v} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда можно выразить производные $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$, $\partial U / \partial z$ как функции от u, v, τ .

Однако соотношения (14) и (15) можно существенно упростить, если использовать специфическую параметризацию поверхности. А именно с учетом того, что ось OZ является нормалью к поверхности S_0 в точке $x = 0 = z = 0$, можно так выбрать параметры u, v, τ , чтобы для значений

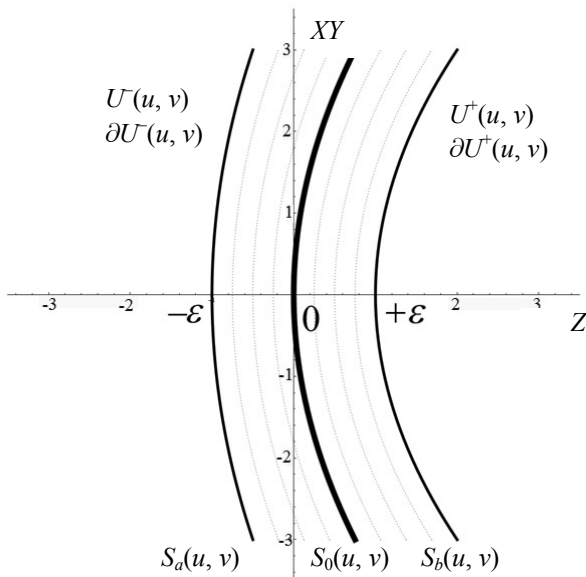


Рис. 4. Параметризованное представление окрестности криволинейной бесконечно тонкой границы со скачком электрического поля

$\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $u \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $v \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} X(u, v, \tau) &\approx u + O(\varepsilon^2), \quad Y(u, v, \tau) \approx v + O(\varepsilon^2), \\ Z(u, v, \tau) &\approx \tau + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где в поправках $O(\varepsilon^2)$ "прячутся" дополнительные члены, описывающие криволинейное поведение семейства поверхностей S_τ . При таком выборе параметризации для системы уравнений (2) с учетом соотношений (14) и (15) выполняются приближенные соотношения

$$\begin{aligned} p &= \frac{dx}{dt} \approx \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} + O(\varepsilon), \\ q &= \frac{dy}{dt} \approx \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} + O(\varepsilon), \\ r &= \frac{dz}{dt} \approx \frac{1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} + O(\varepsilon), \\ -\frac{e}{m} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, \\ -\frac{e}{m} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dq}{dt} &= \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, \\ -\frac{e}{m} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, \\ \frac{\partial U}{\partial u} &\approx \frac{\partial U}{\partial x} + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial U}{\partial v} \approx \frac{\partial U}{\partial y} + O(\varepsilon), \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &\approx \frac{\partial U}{\partial z} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим аппроксимацию электрического потенциала и напряженности электрического поля для переходной области. Пусть имеются функции $U^-(u, v, t)$ и $\partial U^-(u, v, t)$ (зависящие, вообще говоря, также от параметра ε), которые характеризуют краевое условие для потенциала $U(u, v, \tau, t)$ и его производной $\partial U(u, v, \tau, t)/\partial \tau$ на поверхности $S_a = S_\tau|_{\tau=-\varepsilon}$, и функции $U^+(u, v, t)$ и $\partial U^+(u, v, t)$, которые характеризуют краевое условие для потенциала $U(u, v, \tau, t)$ и его производной $\partial U(u, v, \tau, t)/\partial \tau$ на поверхности $S_b = S_\tau|_{\tau=+\varepsilon}$. Предельными значениями этих функций при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ служат функции $U_0^-(u, v, t)$, $\partial U_0^-(u, v, t)$ и $U_0^+(u, v, t)$, $\partial U_0^+(u, v, t)$, не совпадающие друг с другом и характеризующие скачок и излом электрического потенциала вдоль предельной беско-

нечно тонкой границы S_0 . При этих данных для потенциала $U(u, v, \tau, t)$ можно построить на интервале $\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ аппроксимацию $\bar{U}(u, v, \tau, t)$, аналогичную (3):

$$\begin{aligned} \bar{U}(u, v, \tau, t) &\approx U_0^-(u, v, t) \times \\ &\times \left[-(1+\tau/\varepsilon)/2 + (1+\tau/\varepsilon)^3/8 + (1-\tau/\varepsilon) - \right. \\ &\left. - (1-\tau/\varepsilon)^3/8 \right] + \\ &+ U_0^+(u, v, t) \left[(1+\tau/\varepsilon) - (1+\tau/\varepsilon)^3/8 - \right. \\ &\left. - (1-\tau/\varepsilon)/2 + (1-\tau/\varepsilon)^3/8 \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{3} \partial U_0^-(u, v, t) \left[-(1+\tau/\varepsilon) + (1+\tau/\varepsilon)^3/4 + \right. \\ &\left. + 2(1-\tau/\varepsilon) - (1-\tau/\varepsilon)^3/2 \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{3} \partial U_0^+(u, v, t) \left[-2(1+\tau/\varepsilon) + \right. \\ &\left. + (1+\tau/\varepsilon)^3/2 + (1-\tau/\varepsilon) - (1-\tau/\varepsilon)^3/4 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Если расстояние до ближайшего электрода значительно больше малого параметра ε , тогда в окрестности точки $\tau_0 = 0$ истинный электрический потенциал $U(u, v, \tau, t)$, записанный в новых переменных и описывающий электрическое поле в промежутке между двумя границами, разлагается по переменной τ в ряд Тейлора, сходящийся на интервале $\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$. По той же схеме, которая была использована в разделе 1.4, легко получить, что в пределах радиуса сходимости этого ряда (т. е. по крайней мере при $\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $u \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $v \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$) разница между $U(u, v, \tau, t)$ и $\bar{U}(u, v, \tau, t)$ для интервала $\tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ имеет порядок малости $O(\varepsilon^4)$, разница между $\partial U(u, v, \tau, t)/\partial u$ и $\partial \bar{U}(u, v, \tau, t)/\partial u$, а также между $\partial U(u, v, \tau, t)/\partial v$ и $\partial \bar{U}(u, v, \tau, t)/\partial v$ имеет порядок малости $O(\varepsilon^4)$, разница между $\partial U(u, v, \tau, t)/\partial \tau$ и $\partial \bar{U}(u, v, \tau, t)/\partial \tau$ имеет порядок малости $O(\varepsilon^3)$. Тем самым в переходной области функция (18) является достаточно точной аппроксимацией для электрического потенциала, а ее производные — достаточно точными аппроксимациями для соответствующих компонент вектора напряженности электрического поля.

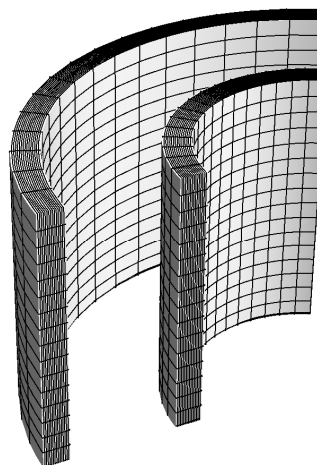
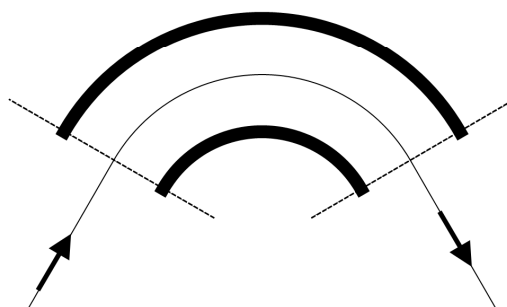
При использовании нормировки независимого переменного τ по формуле $\tau = \xi \cdot \varepsilon$ (где $-1 \leq \xi \leq +1$) уравнения (17) с учетом аппроксимации (18) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &\approx O(\varepsilon), \quad \frac{dv}{d\xi} \approx O(\varepsilon), \quad \frac{dT}{d\xi} \approx O(\varepsilon), \\ \frac{dp}{d\xi} &\approx O(\varepsilon), \quad \frac{dq}{d\xi} \approx O(\varepsilon), \\ \frac{dr}{d\xi} &\approx -\frac{3}{4r} \frac{e}{m} (U_0^+(0,0,T_0) - U_0^-(0,0,T_0)) \times \\ &\quad \times (1 - \xi^2) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

т. е. становятся аналогичны уравнениям (9). Отсюда очевидно, что кривизна поверхности S_0 в точке пересечения бесконечно тонкой границы со скачком электрического поля никак не сказывается на пересчете начальных значений для траектории, а результаты, полученные в разделе 1 для плоской границы, сохраняют свою силу в случае гладкой криволинейной границы. Исследование же случая, когда поверхность S_0 в точке пересечения бесконечно тонкой границы имеет излом, в эту теорию не вписывается и требует отдельного изучения. Однако, как легко понять, такой случай представляет собой чисто теоретический интерес, и маловероятно, чтобы он имел какое-то практическое значение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а
электростатический
цилиндрический
конденсатор
(секторный энергоанализатор)



б
статический секторный магнит
(масс-анализатор)

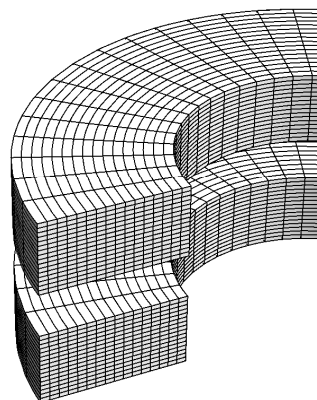
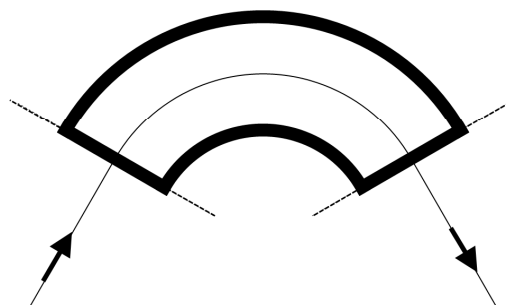


Рис. П1. Примеры ионно-оптических систем, использующих приближение бесконечно тонкой границы при численном расчете: электростатический сектор (а), магнитный сектор (б).

На рис. П1, П2 жирными линиями показаны границы электродов (магнитных полюсов), сплошными линиями — базовая траектория заряженной частицы, штриховыми линиями — границы скачка поля в приближении бесконечно тонкой границы

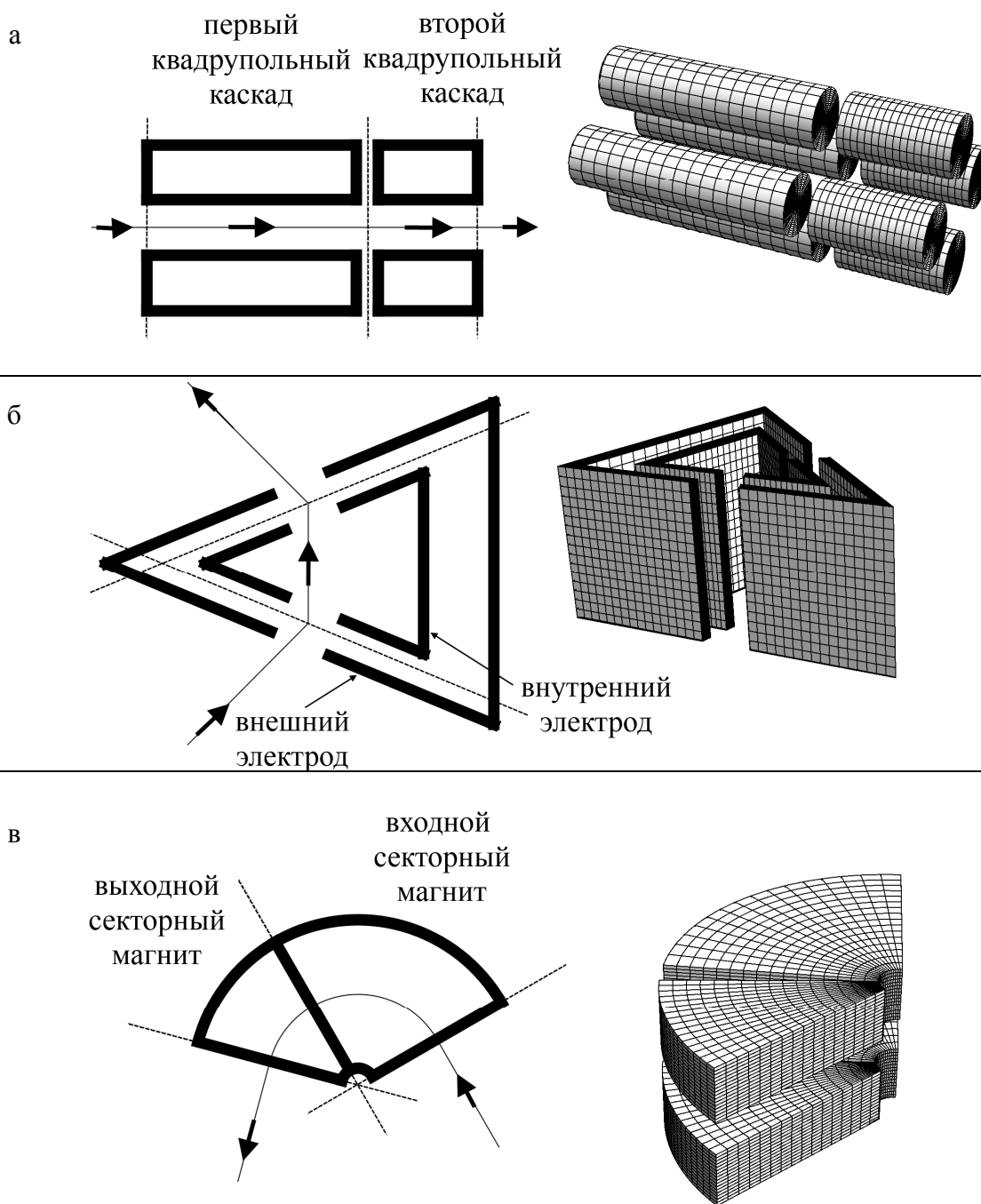


Рис. П2. Примеры ионно-оптических систем, использующих приближение бесконечно тонкой границы при численном расчете.

а — два близко расположенных квадрупольных каскада, б — электростатическая призма, в — магнитная призма

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, 2-е изд. М.: Наука, 1978. 224 с.
2. Шерстнев Л.Г. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы. М.: Энергия, 1971. 368 с.
3. Глазер В. Основы электронной оптики (пер. с нем.). М.: ГИТТЛ, 1957. 763 с.
4. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
5. Брюхе Е., Шерцер О. Геометрическая электронная оптика (пер. с нем.). Л.: Лениздат, 1943. 496 с.
6. Кельман В.М., Явор С.Я. Электронная оптика, 3-е изд. Л.: Наука, 1968. 487 с.
7. Страшкевич А.М. Электронная оптика электростатических систем. М.—Л.: Энергия, 1966. 327 с.
8. Зинченко Н.С. Курс лекций по электронной оптике (2-е изд.). Харьков: Изд-во ХГУ, 1961. 362 с.
9. Рустерхольц А. Электронная оптика. Основы теоретической электронной оптики (пер. с нем.). М.: Изд-во ИЛ, 1952. 263 с.
10. Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Л.: Изд-во ЛПИ им. М.И. Калинина, 1984. 80 с.
11. Сига-Михайловский Д.Ю. Электронная оптика. Киев, 1977.
12. Бонштедт Б.Э., Маркович М.Г. Фокусировка и отклонение пучков в электронно-лучевых приборах. М.: Советское радио, 1967. 272 с.
13. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969. 223 с.
14. Grivet P. Electron optics, 2nd english edition. Oxford: Pergamon Press, 1972. 598 p.
15. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики (пер. с англ.). Т. 1–2. М.: Мир, 1993. 551 с., 477 с.
16. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics. Elsevier, Amsterdam, 2009. Vol. 157. 381 p.
17. Вольник Г. Оптика заряженных частиц. СПб.: Энергоатомиздат, 1992. 280 с.
18. Rose H.H. Geometrical charged particle optics. Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 412 p.
19. Greenfield D., Monastyrskiy M. Selected problems of computational charged particle optics. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics. Vol. 155. 2009. Amsterdam, Elsevier. 346 p.
20. Зворыкин В.К., Мортон Д.А. Телевидение. Вопросы электроники в передаче цветного и монохромного изображений. М.: Изд-во ИЛ, 1956. 780 с.
21. Голиков Ю.К., Краснов Н.В., Бубляев Р.А. Модифицированный масс-рефлектор // Научное приборостроение. 2005. Т. 1, № 4. С. 42–50.
22. Кельман В.М., Родникова И.В., Секунова Л.М. Статические масс-спектрометры. Алма-Ата: Наука, 1985. 263 с.
23. Сысоев А.А., Самсонов Г.А. Теория и расчет статических масс-анализаторов. Ч. 1–2. М.: МИФИ, 1972. 172 с., 109 с.
24. Самсонов Г.А., Сысоев А.А. Учет влияния краевых полей в общей теории секторных анализаторов заряженных частиц. Депонированные рукописи, 1979, № 12, б/о 647.
25. Wollnik H., Ewald H. The influence of magnetic and electric fringing fields on the trajectories of charged particles // Nuclear Instruments and Methods A. 1965. Vol. 36, No. 1. P. 93–104.
26. Wollnik H. Image aberrations of second order for magnetic and electrostatic sector fields including all fringing fields effects // Nuclear Instruments and Methods A. 1965. Vol. 38. P. 56–58.
27. Кельман В.М., Карецкая С.П., Федюлина Л.В., и др. Электронно-оптические элементы призмных спектрометров заряженных частиц. Алма-Ата: Наука, 1979. 232 с.
28. Shpak, E.V., Yavor, S.Ya., Lyubchik Ya.G. Optical diagrams of prism spectrometers with quadrupole lenses // Nuclear Instruments and Methods A. 1968. Vol. 64, No. 1. P. 97–103.
29. Petrov A., Shpak, E.V., Yavor, S.Ya. Electrostatic prism spectrometer with quadrupole lenses // Nuclear Instruments and Methods A. 1972. Vol. 101, No. 3. P. 505–508.
30. Ding Li, Sudakov M., Kumashiro S. A simulation study of the digital ion trap mass spectrometer // International Journal of Mass Spectrometry. 2002. Vol. 13, No. 2. P. 1–22.
31. Sudakov M. AXSIM — New software for simulation of modern mass spectrometry devices // Abstracts the 7th International Conference of Charged Particle Optics. UK, Cambridge, 2006. 717 p.
32. Судаков М.Ю., Апацкая М.В., Витухин В.В. и др. Новая линейная ловушка с простыми электродами // Масс-спектрометрия. 2012. Т. 9, № 1. С. 43–52.
33. Dahl D.A. SIMION for the personal computer in reflection // International Journal of Mass Spectrometry. 2000. Vol. 200. P. 3–25.
34. SIMION: программа для моделирования оптики заряженных частиц. URL: (<http://www.simion.com>).
35. Berdnikov A.S., Chmelik J. New algorithms for testing accuracy of numerically calculated trajectories of charged particles // Optik — International Journal for Light and Electron Optics. 1996. Vol. 102, No. C. 13–17.
36. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. (Сер. "Теоретическая физика". Т. 2). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 504 с.
37. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука, 1969. 911 с.
38. Иос Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во Минпрос. РСФСР, 1963. 579 с.
39. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электричество и магнетизм. (Сер. "Фейнмановские лекции по физике". Т. 5). М.: Мир, 1965. 412 с.
40. Сивухин Д.В. Электричество. (Сер. "Общий курс физики". Т. 3). М.: Физматлит/МФТИ, 2004. 654 с.
41. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. 616 с.
42. Калашиников С.Г. Электричество: Учебное пособие для вузов. 6-е изд., стереотипное. М.: Физматлит, 2003. 624 с.
43. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / (сер. "Курс общей физики". Т. 2). М.: Высшая школа, 1991. 288 с.

44. *Фриш С.Э., Тимофеева А.В.* Электрические и электромагнитные явления. (Сер. "Курс общей физики". Т. 2). М.: Физматгиз, 1962. 515 с.
45. *Савельев И.В.* Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. (Сер. "Курс общей физики в 3 томах". Т. 2). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 496 с.
46. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. (Сер. "Берклевский курс физики". Т. 2). СПб.: «Лань», 2005. 416 с.
47. *Зильберман Г.Е.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1970. 384 с.
48. *Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б.* Электричество и магнетизм. (Сер. "Курс физики". Т. 2). М.: Высшая школа, 1977. 376 с.
49. *Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н.* Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 418 с.
50. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во ИЛ, 1954. 606 с.
51. *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.
52. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: Изд-во ИЛ, 1958. 502 с.
53. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
54. *Бернштейн С.Н.* Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Харьков, Изд-во ХГУ, 1956. 95 с.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург, Россия**

Контакты: Бердников Александр Сергеевич,
asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 2.12.2014

RECALCULATION OF INITIAL CONDITIONS WHEN THE TRAJECTORY OF A CHARGED PARTICLE CROSSES THE BOUNDARY WITH A JUMP OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELD. I. ELECTRIC FIELD

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

When the trajectories of charged particles in electric fields and/or magnetic fields are simulated, sometimes the case occurs when the trajectory crosses the line with a jump of the electric or magnetic field. It is necessary to recalculate carefully the coordinates and the velocities of the charged particle not to produce strange numerical artifacts like the violation of the conservation of energy. This paper introduces and proves mathematically strictly the principle of refraction — namely, only the normal velocity component should be corrected in such a way that the total energy remains constant while all other velocity components as well as the coordinates of the charged particle just keep their original values.

Keywords: numerical solutions of differential equations, trajectory tracing in pulsed electric fields, artifacts of numerical algorithms

REFERENCES

1. Arzimovich L.A., Luk'yanov S.Yu. [Motion of charged particles in electric and magnetic fields]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 224 p. (In Russ.).
2. Sherstnev L.G. [Electron optics and electron-beam tubes]. Moscow, Energiya Publ., 1971. 368 p. (In Russ.).
3. Glazer W. *Grundlagen der Elektronenoptik*. Springer-Verlag, Wien, 1952. (Russ. ed.: Glazer V. *Osnovy elektronnoy optiki (per. s nem.)*. M., GITTL Publ., 1957. 763 p.).
4. Grinberg G.A. [Selected problems of the mathematical theory of electrical and magnetic phenomena]. Moscow—Leningrad, 1948. 727 p. (In Russ.).
5. Brüche E., Scherzer O. *Geometrische Elektronenoptik: Grundlagen und Anwendungen*. Springer, Berlin, 1934. 332 p. (Russ. ed.: Bryuche E., Sherzer O. *Geometricheskaya elektronnoy optika (per. s nemezhkogo)*. Leningrad, Lenizdat Publ., 1943. 496 p.).
6. Kel'man V.M., Yavor S.Ya. [Electron optics]. Leningrad, Nauka Publ., 1968. 487 p. (In Russ.).
7. Strashkevich A.M. [Electron optics of electrostatic systems]. Moscow—Leningrad, Energiya Publ., 1966.

- 327 p. (In Russ.).
8. Zinchenko N.S. [Lectures on electron optics]. Char'kov, 1961. 362 p. (In Russ.).
9. Rusterchol'z A. *Elektronnaya optika (per. s nemezkogo)* [Electron optics]. Moscow, IL Publ., 1952. 263 p. (In Russ.).
10. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuchin V.V. [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems]. Leningrad, LPI im. M.I. Kalinina Publ., 1984. 80 p. (In Russ.).
11. Siga-Michaylovskiy D.Yu. [Electron optics]. Kiev, 1977. (In Russ.).
12. Bonshtedt B.E., Markovich M.G. [Focusing and deflection of beams in electron beam devices]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1967. 272 p. (In Russ.).
13. Steffen K.G. *High Energy Beam Optics*. Interscience publishers, New-York, 1965. (Russ. ed.: Shteffen K. *Optika puchkov vysokoy energii*. Moscow, Mir Publ., 1969. 223 p.).
14. Grivet P. *Electron Optics*. 2nd English Edition. Pergamon Press, Oxford, 1972. 598 p.
15. Hawkes P.W., Kasper E. *Principles of electron optics*. 3rd Edition. Vol. 1–3. Academic Press, 2012. (Russ. ed.: Choks P., Kasper E. *Osnovy elektronnoy optiki. T. 1-2 (per. s angliyskogo)*. Moscow, Mir Publ., 1993. 551, 477 p.).
16. Yavor M.I. *Optics of charged particle analyzers*. Elsevier, Amsterdam, Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, 2009, vol. 157. 381 p.
17. Wollnik H. *Optics of charged particles*. Academic Press, Orlando, 1987. (Russ. ed.: Vol'nik G. *Optika zaryazhennykh chastits*. Saint-Petersburg, Energoatomizdat Publ., 1992. 280 p.).
18. Rose H.H. *Geometrical charged particle optics*. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 2009. 412 p.
19. Greenfield D., Monastyrskiy M. *Selected problems of computational charged particle optics*. Elsevier, Amsterdam, Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, 2009, vol. 155. 346 p.
20. Zworykin V.K., Morton G.A. *Television; the electronics of image transmission in color and monochrome*. J. Wiley & Sons, New York, 1954. (Zvorykin V.K., Morton D.A. *Televidenie. Voprosy elektroniki v peredache zvetnogo i monokhromnogo izobrazheniy*. IIL Publ., 1956. 780 p.).
21. Golikov Yu.K., Krasnov N.V., Bublyayev R. A. [A modified mass reflectron]. *Nauchnoe priborostroenie* [Science Instrumentation], 2005, vol. 15, no. 4, pp. 42–50. (In Russ.).
22. Kel'man V.M., Rodnikova I.V., Sekunova L.M. [Static mass spectrometers]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1985. 263 p. (In Russ.).
23. Sysoev A.A., Samsonov G.A. [Theory and calculation of static mass analyzers. Part 1–2]. Moscow, MIFI Publ., 1972. 172, 109 p. (In Russ.).
24. Samsonov G.A., Sysoev A.A. [Fringing field effects in the general theory of sector charged particle analyzers]. *Deponirovannye rukopisi*, 1979, no. 12, b/o 647. (In Russ.).
25. Wollnik H., Ewald H. The influence of magnetic and electric fringing fields on the trajectories of charged particles. *Nuclear Instruments and Methods A*. 1965, vol. 36, no. 1, pp. 93–104.
26. Wollnik H. Image aberrations of second order for magnetic and electrostatic sector fields including all fringing fields effects. *Nuclear Instruments and Methods A*. 1965, vol. 38, pp. 56–58.
27. Kel'man V.M., Karezkaya S.P., Fedulina L.V., Yakushev E.M. [The electro-optical elements for prism spectrometers of charged particles]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1979. 232 p. (In Russ.).
28. Shpak E.V., Yavor S.Ya., Lyubchik Ya.G. Optical diagrams of prism spectrometers with quadrupole lenses. *Nuclear Instruments and Methods A*. 1968, vol. 64, no. 1, pp. 97–103.
29. Petrov A., Shpak E.V., Yavor S.Ya. Electrostatic prism spectrometer with quadrupole lenses. *Nuclear Instruments and Methods A*, 1972, vol. 101, no. 3, pp. 505–508.
30. Ding Li, Sudakov M., Kumashiro S. A simulation study of the digital ion trap mass spectrometer. *International Journal of Mass Spectrometry*. 2002, vol. 13, no. 2, pp. 1–22.
31. Sudakov M. AXSIM — new software for simulation of modern mass spectrometry devices. *Abstracts the 7th International Conference of Charged Particle Optics*. Cambridge, UK, 2006, 717 p.
32. Sudakov M.Yu., Apazkaya M.V., Vituchin V.V., Trubizin A.A. [New linear trap with simple electrodes]. *Mass spektrometriya* [Mass Spectrometry], 2012, vol. 9, no. 1, pp. 43–52. (In Russ.).
33. Dahl D.A. SIMION for the personal computer in reflection. *International Journal of Mass Spectrometry*. 2000, vol. 200, pp. 3–25.
34. SIMION: Charged particle optics software. URL: (<http://www.simion.com>).
35. Berdnikov A.S., Chmelik J. New algorithms for testing accuracy of numerically calculated trajectories of charged particles. *Optik — International Journal for Light and Electron Optics*. 1996, vol. 102, no. 1, pp. 13–17.
36. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical theory of fields*. (Course of theoretical physics, vol. 2). Pergamon Press, 1971. (Russ. ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoriya polya (Ser. «Teoreticheskaya fizika», tom 2)*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 504 p.).
37. Levich V.G. [Course of theoretical physics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 911 p. (In Russ.).
38. Ios G. [Course of theoretical physics. Vol. 1]. Moscow, Minpros RSFSR Publ., 1963. 579 p. (In Russ.).
39. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 2. Addison-Wesley, 1989. (Russ. ed.: Feynman R., Leyton R., Sands M. *Elektrichestvo i magnetizm (ser. «Feynmanovskie lekcii po fizike», tom 5)*. Moscow, Mir Publ., 1965. 412 p.).
40. Sivuchin D.V. [Electricity. Vol. 3]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 654 p. (In Russ.).
41. Tamm I.E. [Fundamentals of the theory of electricity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 616 p. (In Russ.).
42. Kalashnikov S.G. [Electricity: A manual for universities]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 624 p. (In Russ.).
43. Irodov I.E. [The basic laws of electromagnetism. General physics course]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 288 p. (In Russ.).
44. Frish S.E., Timofeeva A.V. [Electrical and electromagnetic phenomena. General physics course]. Moscow,

- Fizmatlit Publ., 1962. 515 p. (In Russ.).
45. Savel'ev I.V. [Electricity and Magnetism. Waves. Optics. General physics course in three volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 496 p. (In Russ.).
 46. Purcell E.M., Morin D.J. *Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, 2013. (Russ. ed.: Parsell E. *Elektrichestvo i magnetizm (ser. «Berkleevskiy kurs fiziki», tom 2)*. Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2005. 416 p.).
 47. Zil'berman G.E. [Electricity and magnetism]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 384 p. (In Russ.).
 48. Detlaf A.A., Yavorskiy B.M., Milkovskaya L.B. [Electricity and Magnetism. Physics course]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 376 p. (In Russ.).
 49. Mirolyubov N.N., Kostenko M.V., Levinshteyn M.L., Tichodeev N.N. [Methods of calculation of electrostatic fields]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1963. 418 p. (In Russ.).
 50. Smythe W.R. *Static and dynamic electricity*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1950. (Russ. ed.: Smayt V. *Elektrostatika i elektrodinamika*. Moscow, IIL Publ., 1954. 606 p.).
 51. Stratton J.A. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1941. (Russ. ed.: Stretton Dzh.A. *Teoriya elektromagnetizma*. Moscow, GITTL Publ., 1948. 539 p.).
 52. Sommerfeld A. *Electrodynamics* (ser. «Lectures on Theoretical Physics», vol. 3). Academic Press, New York, 1952. 372 p. (Russ. ed.: Zommerfel'd A. *Elektrodinamika*. Moscow, IL Publ., 1958. 502 p.).
 53. de Boor C. *A practical guide to splines*. (Ser. «Applied Mathematical Sciences», vol. 27). Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. 392 p. (Russ. ed.: De Bor K. *Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 304 p.).
 54. Bernshteyn S.N. [Analytical nature of solutions of the differential equations of elliptic type]. Char'kov, Izd-vo ChGU Publ., 1956. 95 p. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Aleksandr Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 2.12.2014