
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрено обобщение преобразования Гильберта, определяемое как взвешенное преобразование Гильберта, и которое возникает при описании физического распространения сигнала и отражении его от границ. Изучены свойства этого преобразования. Адаптировано понятие аналитического сигнала к взвешенному преобразованию Гильберта. Классическое преобразование Гильберта представляется как частный случай этого преобразования. Найдена взаимосвязь коэффициентов обобщенного преобразования Гильберта со свойствами среды.

Кл. сл.: преобразование Гильберта, аналитический сигнал, функция, преобразование Фурье, дельта-функция, спектр

ВВЕДЕНИЕ

При модуляции, анализе и обработке сигналов огромное прикладное значение имеет преобразование Гильберта и связанное с ним понятие аналитического сигнала. Как детерминированные, так и случайные процессы обычно представляются действительными функциями времени $x(t)$. Вместе с тем часто удобнее представлять их векторами на комплексной плоскости или записывать в символической форме. Предварительно напомним смысл широко используемой в теории электрических цепей символической записи синусоидальных колебаний.

Системы, описываемые неограниченными функциями, не существуют в реальности, т. е. эти системы физически нереализуемы. К примеру, амплитуда распространяющихся упругих и электромагнитных колебаний не может быть бесконечной, напряжение или ток всегда имеют ограниченное пиковое значение, которое определяется материалами и конфигурацией радиоэлектронной системы. Пока рассматривается идеализированная система с обратимыми, недиссипативными, процессами синусы и косинусы (в любой линейной комбинации) адекватно отражают процессы, протекающие в этой системе. Но если система необратима, то при решении уравнений необходимо учитывать причинность. Причинность означает, что отклик системы на выходе не может предшествовать воздействию на входе системы.

Положим, мы имеем функцию, определенную для вещественных значений аргумента. Процедура распространения значений этой функции в комплексную область значений аргумента называется *аналитическим продолжением функции*. Косинус и синус от вещественных (ωt)

не могут быть аналитически продолжены ни в верхнюю полуплоскость, ни в нижнюю полуплоскость комплексных значений. Поэтому в качестве базисной функции для продолжения в верхнюю полуплоскость выбираем линейную комплекснозначную комбинацию функций $\exp(i\omega t)$.

Согласно с вышесказанным между состояниями замкнутой системы существуют причинные связи во времени, проявляющиеся в том, что состояние в данный момент времени зависит от состояний в предшествующие моменты и влияет на состояния системы в последующие моменты времени. Таким образом, понятие причинных связей в замкнутой системе включает два фундаментальных положения, которые являются физическим обоснованием преобразования Гильберта:

- причина не может опережать следствие, или состояние системы в данный момент времени зависит от прошлого, но не зависит от будущего (условие физической осуществимости системы);
- с позиций детерминизма причинность однозначна в том смысле, что состояние системы в данный момент времени (причина) априори определяет единственно возможное состояние системы в последующий момент времени (следствие).

С вероятностных позиций причинная связь априори устанавливается условными вероятностями переходов из состояния системы в данный момент времени, в одно из возможных состояний в последующие моменты времени. Другими словами, данная причина приводит к одному из априори возможных следствий с определенной вероятностью. Эту форму причинности иногда

называют вероятной причинностью. Приведенные положения в определенном смысле объединяют детерминированные и стохастические системы. Условие физической реализуемости является общим для этих систем, а однозначные связи состояний в детерминированных системах заменяются детерминированными вероятностными связями в стохастических системах (при условии, что вероятности переходов априори известны).

Применительно к сигналам физический смысл преобразования Гильберта заключается в повороте начальных фаз всех спектральных составляющих исходного сигнала $s(t)$ на один и тот же угол, равный -0.5π . Поворот на этот угол эквивалентен появлению множителя $\exp(-i\pi/2)$. Такая операция может быть выполнена с помощью широкополосного фазовращателя на 90° . Аналитический сигнал является обобщением комплексного представления узкополосного сигнала, для которого вещественная и мнимая части связаны между собой. Для сигнала произвольной формы такая связь не является однозначной, поскольку не определена мнимая часть соответствующего комплексного сигнала. Заметим, однако, что значения спектра $S(\omega)$ вещественного сигнала в области $\omega < 0$ однозначно определяются значениями $S(\omega)$ при $\omega > 0$. Поэтому вещественный сигнал $s(t)$ может быть однозначно выражен с помощью комплексного сигнала $s_a(t)$ (аналитический сигнал). Спектр аналитического сигнала отличен от нуля лишь при $\omega > 0$ и совпадает в этой области со спектром сигнала $s(t)$ [1–3].

Прямое и обратное преобразования Гильберта определяются соотношениями

$$\begin{cases} \hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \\ s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \end{cases}$$

Функция $1/(t - \tau)$ называется *ядром преобразования Гильберта*, а функции $s(t)$ и $\hat{s}(t)$ называются *сопряженными по Гильберту*. При этом интегралы в формулах понимаются в смысле главного значения Коши.

Преобразование Гильберта устанавливает аналитическую универсальную связь между действительной и мнимой частями комплексной диэлектрической проницаемости (формулы Крамерса—Кронига). Из этих выражений следует, что *диспер-*

гирующая среда принципиально является средой *поглощающей*, а искомая связь между действительной и мнимой частями является следствием именно принципа причинности.

Рассмотрим понятие аналитического сигнала. Аналитический сигнал (аналитическое представление сигнала) — используемое в теории обработки сигналов математическое представление аналогового сигнала в виде комплекснозначной аналитической функции времени (обратное не всегда имеет место). Аналитический сигнал является обобщением понятия комплексной амплитуды на случай сигналов, отличных от гармонического, и представляет собой пару реальных сигналов, которую записывают в виде действительной части (сигнал) и мнимой (гильберт-образ сигнала). Таким образом, обычный действительный сигнал является при этом действительной частью аналитического представления.

Известно, что реальный сигнал имеет спектральное разложение Фурье, представленное в виде комплекснозначной функции, причем ее действительная часть является четной, а мнимая — нечетной. Поскольку положительные частоты в случае четных (нечетных) однозначно определяют спектральные компоненты отрицательных частот, изучение спектрального представления в области отрицательных частот не имеет смысла, т. к. оно не содержит информации. Для комплекснозначных функций (пар реальных сигналов) правило четности или нечетности спектра Фурье несправедливо. В этом случае можно говорить, что отрицательные частоты спектра Фурье несут такую же информацию, как и положительные. Аналитический сигнал — это сигнал, у которого не равны нулю только положительные частоты. Формально аналитический сигнал является функцией, граничной к аналитической, т. е. не обращающейся в ноль в окрестности любой точки оси времени. Этот класс функций физически нереализуем, но используется как аппроксимация причинных сигналов, т. к. обладает всеми полезными свойствами аналитических функций [1–3].

Применение преобразования Гильберта и аналитического сигнала позволяют выполнять квадратурную модуляцию сигналов; в каждой текущей координате модулированных сигналов производить определение огибающей, мгновенной фазы и частоты сигналов, выполнять анализ каузальных (причинных) систем обработки сигналов

ВЗВЕШЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Следствием принципа причинности являются так называемые дисперсионные соотношения между

действительной $F_1(\omega)$ и мнимой $F_2(\omega)$ частями комплексной функции $G(\omega)$, определяющей амплитудно-фазовую характеристику линейной системы [1–2]. Функции $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ образуют так называемую пару гильберт-образов. Поэтому если известна действительная часть характеристики линейного фильтра, то его мнимая часть однозначно выражается через действительную часть. Это свойство возникает потому, что сигнал начинается в момент $t = 0$, а при $t < 0$ отсутствует. Это условие называется условием причинности.

Таким образом, различие между произвольной и причинной (каузальной) системами состоит в том, что произвольная система в точке t характеризуется поведением входного сигнала $s(t)$ при всех значениях t в интервале $(-\infty, t)$.

Системная характеристика является осуществимой, если ей соответствует физически реализуемая система. Критерий реализуемости позволяет по виду заданной характеристики установить, осуществима ли она.

1. Осуществимость переходной и импульсной характеристик

Поскольку переходная характеристика является откликом на ступенчатую функцию, то она должна быть отлична от нуля лишь в положительные моменты времени. Кроме того, с течением времени отклик должен стать постоянным. Импульсная характеристика системы также отлична от нуля только в положительные моменты времени. Однако, поскольку она представляет собой производную от переходной, то с течением времени, она должна стремиться к нулю. Таким образом, критерием реализуемости временных характеристик синтезируемой системы являются

$$\begin{aligned} h(t) &= 0, \quad g(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \text{const}, \end{aligned}$$

где $h(t)$, $g(t)$ — соответственно импульсная и переходная характеристики.

2. Осуществимость лаплас-образов входных функций

Лаплас-образы должны обладать следующими свойствами:

- входная функция должна быть отношением двух степенных полиномов, коэффициенты которых — вещественные положительные числа;
- степени полиномов должны отличаться не более чем на единицу;
- нули и полюсы должны располагаться только в левой полуплоскости;
- если имеются нули, то они должны быть простыми, не кратными;

- вещественная часть самой входной функции на мнимой оси должна быть неотрицательна.

Эти пять требований также могут быть использованы в качестве критерия физической реализуемости, только вместо p следует независимой переменной считать $i\omega$. Однако не всякая функция физически реализуема.

Необходимое и достаточное условие физической реализуемости передаточных функций выражается соотношением Пэли—Винера [1–3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty, \quad (1)$$

где $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика фильтра.

Математической моделью принципа причинности является преобразование Гильберта. Преобразование Гильберта возникает также при рассмотрении аналитического сигнала, являющегося обобщением узкополосного сигнала [1–3].

Как было показано в ряде работ [5–7], при отражении акустических волн сигнал представляется как некоторая взвешенная сумма прямого и отраженного сигналов, описываемая преобразованием Гильберта. Причем величина весовых коэффициентов определяется характеристиками среды и углом скольжения. Т. е. здесь имеет смысл говорить о преобразовании, которое осуществляется "частично". В зависимости от коэффициентов это преобразование может непрерывно меняться от тождественного до полного преобразования Гильберта. Формально введем взвешенное преобразование Гильберта следующим образом:

$$s_e(t) = H_e\{s(t)\} = \nu s(t) + \mu \hat{s}(t), \quad (2)$$

где ν , μ — коэффициенты преобразования; $\hat{s}(t)$ — гильберт-образ; $H_e\{\cdot\}$ — оператор взвешенного преобразования Гильберта.

Впервые взвешенное преобразование Гильберта (ВПГ) было введено в работе [4]. Раскроем оператор $H_e\{\cdot\}$, в результате получим выражения для $s_e(t)$ и ядра преобразования $K_e(t)$:

$$\begin{cases} s_e(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} [\pi \nu(t - \tau) \delta(t - \tau) + \mu] d\tau, \\ K_e(t) = \frac{1}{\pi t} [\pi \nu t \delta(t) + \mu]. \end{cases} \quad (3)$$

Путем несложных преобразований нетрудно показать, что обратное ВПГ имеет ядро

$$K_e^{-1}(t) = \frac{1}{\pi t} [\pi v_1 t \delta(t) - \mu_1], \quad (4)$$

где $v_1 = \frac{v}{v^2 + \mu^2}$, $\mu_1 = \frac{\mu}{v^2 + \mu^2}$.

Частным, но важным случаем, является преобразование в случае когда $v^2 + \mu^2 = 1$, тогда

$$K_e^{-1}(t) = \frac{1}{\pi t} [\pi v t \delta(t) + \sqrt{1-v^2}], \quad \mu = \sqrt{1-v^2}. \quad (5)$$

С учетом (3) и (4) пара ВПГ может быть записана в виде

$$\begin{cases} \hat{s}_e(t) = v s(t) + \mu \left[s(t) * \frac{1}{\pi t} \right], \\ s(t) = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \mu^2}} s(t) - \frac{\mu}{v^2 + \mu^2} \left[\hat{s}_e(t) * \frac{1}{\pi t} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь и далее символ * обозначает свертку.

Найдем преобразование Фурье от сигнала $\hat{s}_e(t)$ и ядра ВПГ:

$$\begin{cases} F\{\hat{s}_e(t)\} = F\{s(t) * K_e(t)\} = S(\omega) F\{\tilde{K}_e(\omega)\}, \\ F\{K_e(t)\} = v F\{\delta(t)\} + \frac{\mu}{\pi} F\left\{\frac{1}{t}\right\} = v - i\mu \operatorname{Sgn}(\omega); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F\{K_e(t)\} &= v - i\mu \operatorname{Sgn}(\omega) = \\ &= \tilde{K}_e(\omega) = \begin{cases} v - i\mu, & \omega > 0; \\ v, & \omega = 0; \\ v + i\mu, & \omega < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Откуда следует:

$$S_e(\omega) = S(\omega) [v - i\mu \operatorname{Sgn}(\omega)]. \quad (9)$$

Ядро преобразования ВПГ можно представить также в показательной форме, а именно:

$$\begin{cases} \tilde{K}_e(\omega) = \sqrt{v^2 + \mu^2} \exp \left\{ -i \arctg \left[\frac{\mu}{v} \operatorname{Sgn}(\omega) \right] \right\}, \\ S_e(\omega) = S(\omega) \tilde{K}_e(\omega). \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, ВПГ приводит к сдвигу фазы

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{\mu}{v} \operatorname{Sgn}(\omega) \right].$$

В частном случае, когда $v = 0$, сдвиг фазы равен $\pi/2$, что соответствует обычному преобразованию Гильберта. Преобразование Фурье от $\tilde{K}_e^{-1}(\omega)$ дает следующее выражение:

$$\tilde{K}_e^{-1}(\omega) = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \mu^2}} + i \frac{\mu}{\sqrt{v^2 + \mu^2}} \operatorname{Sgn}(\omega). \quad (11)$$

Для ВПГ можно ввести понятие взвешенного аналитического сигнала (ВАС) $s_{ae}(t)$:

$$\begin{cases} s_{ae}(t) = s(t) + i \hat{s}_e(t), \\ S_{ae}(\omega) = S(\omega) [1 + \mu \operatorname{Sgn}(\omega) + i v]. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом свойства функции знака можно также записать

$$S_{ae}(\omega) = \begin{cases} S(\omega) [1 + \mu + i v], & \omega > 0; \\ S(\omega) [1 - \mu + i v], & \omega < 0. \end{cases} \quad (13)$$

При $v = 0$ как частный случай имеем спектр аналитического сигнала

$$S_a(\omega) = S_{ae}(\omega) \Big|_{v=0}^{\mu=1} = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Модуль взвешенного аналитического сигнала $A_e(t)$ и его фаза $\varphi_e(t)$ определяются соответственно следующими соотношениями:

$$\begin{cases} A_e(t) = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}_e^2(t)}, \\ \varphi_e(t) = \arctg \left[v + \mu \frac{\hat{s}_e(t)}{s(t)} \right]. \end{cases} \quad (15)$$

Текущая частота равна производной полной фазы по времени $\omega_e(t) = \frac{d[\varphi_e(t)]}{dt}$. Нетрудно показать, что она определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \omega_e(t) &= \omega(t) \frac{v + \mu \frac{\hat{s}_e(t)}{s(t)}}{1 + \left[v + \mu \frac{\hat{s}_e(t)}{s(t)} \right]^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \left[\frac{\hat{s}_e(t)}{s(t)} \right]^2 \right\} \left[\frac{s(t)}{\hat{s}_e(t)} \right] = \\ &= \left[\frac{S_{ae}(t)}{S_a(t)} \right]^2 \cdot \left[\frac{s_e(t)}{\hat{s}_e(t)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\omega(t)$ — текущая частота аналитического сигнала, $s_a(t)$ — аналитический сигнал.

СВОЙСТВА ВЗВЕШЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

$$1. H_e^{-1} H_e \{s(t)\} = s(t). \quad (17)$$

$$2. H_e H_e \{s(t)\} = \nu H_e \{s(t)\} + \mu H_e \{\hat{s}(t)\} = (\nu^2 - \mu^2)s(t) + 2\nu\mu\hat{s}(t). \quad (18)$$

Из последнего соотношения следует, что если $\nu = 0, \mu = 1$, то как частный случай вытекает свойство преобразования Гильберта

$$HH\{s(t)\} = -s(t). \quad (19)$$

Если $\nu = 1, \mu = 0$, то оператор H_e , как следует из (2), действует, как тождественный.

$$3. H_{e1} H_{e2} \{s(t)\} = (\nu_1 \nu_2 - \mu_1 \mu_2)s(t) + (\nu_1 \mu_2 + \nu_2 \mu_1)\hat{s}(t). \quad (20)$$

Нетрудно показать, используя спектральное представление сигнала, что последовательное применение взвешенного преобразования Гильберта n раз приводит к сдвигу фазы спектра, которое описывается выражением следующего вида:

$$\varphi_{en} = \sum_{i=0}^n \arctg \left(\frac{\mu_i \text{Sgn}(\omega)}{\nu_i} \right). \quad (21)$$

Таким образом, n -кратное взвешенное преобразование представляется как сдвиг по фазе спектра сигнала на величину, являющуюся суммой фазовых сдвигов, осуществляемых каждым из преобразований. В силу того, что распространение сигнала в многолучевом канале связано с явлением отражения от различных границ, которое приводит к частичному преобразованию Гильберта [5–7], последнее свойство ВПГ может быть использовано при построении моделей сигналов поступающих на вход систем их обработки.

4. Корреляционная функция $R_e(\tau)$ между сигналом $s(t)$ и его ВПГ определяется соотношением:

$$R_e(\tau) = \int_R \hat{s}_e(\tau) s(t+\tau) dt = \nu R_{ss}(\tau) + \mu R_{s\hat{s}}(\tau). \quad (22)$$

В частности, при $\nu = 1, \mu = 0$ имеем $R_e(\tau) = R_{ss}(\tau)$ а при $\nu = 0, \mu = 1$ получаем $R_e(\tau) = R_{s\hat{s}}(\tau)$. Необходимо отметить, что взаимно-корреляционная функция (ВКФ) сигнала $s(t)$ и его ВПГ равна взвешенной сумме АКФ сигнала и ВКФ сигнала и его гильберт-образа:

$$\begin{cases} (s(t), s_e(t+\tau)) = \nu R_{ss}(\tau) + \mu R_{s\hat{s}}(\tau), \\ (s(t), \hat{s}_e(t+\tau)) = (\nu^2 + \mu^2) R_{s\hat{s}}(\tau). \end{cases} \quad (23)$$

5. Взаимосвязь АКФ $H_e s(t)$ и АКФ сигнала $s(t)$:

$$(s_e(t), s_e(t+\tau)) = (\nu^2 + \mu^2) R_{ss}(\tau). \quad (24)$$

6. Обобщенный аналитический сигнал, представляется в виде

$$s_{ae}(t) = s(t) * \left[\delta(t) + i \left(\nu \delta(t) + \frac{\mu}{\pi t} \right) \right], \quad (25)$$

а в спектральном представлении:

$$S_{ae}(\omega) = S(\omega) [1 + \mu \text{Sgn}(\omega) + i\nu] = S(\omega) \tilde{K}(\omega).$$

Последовательно умножая на $\tilde{K}(\omega)$ при различных ν и μ , получаем

$$S_{aen}(\omega) = S(\omega) \prod_{i=0}^n \tilde{K}_i(\omega). \quad (26)$$

Последнее равенство можно представить через модуль и фазу:

$$S_{aen}(\omega) = S(\omega) \exp \left\{ i \sum_j \arctg \left[\frac{\nu_j}{1 + \mu_j \text{Sgn}(\omega)} \right] \right\} \times \prod_{i=0}^n \sqrt{[1 + \mu_j \text{Sgn}(\omega)]^2 + \nu_j^2}. \quad (27)$$

Из последнего соотношения следует, что фаза аналитического сигнала при многократном применении ВПГ меняется в соответствии с выражением

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^n \arctg \left[\frac{\nu_i}{1 + \mu_i \text{Sgn}(\omega)} \right].$$

В случае, если положить $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu$ и $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$, имеем следующее выражение для аналитического сигнала в k -й итерации:

$$S_{aen}(\omega) = S(\omega) \exp \left\{ i k \arctg \left[\frac{\nu}{1 + \mu \text{Sgn}(\omega)} \right] \right\} \times \sqrt{[1 + \mu \text{Sgn}(\omega)]^2 + \nu^2}^k. \quad (28)$$

Модуль и фаза взвешенного аналитического сигнала с учетом (15) определяются выражениями

$$|S_{aek}(\omega)| = |S(\omega)| \sqrt{[1 + 2\mu \text{Sgn}(\omega) + \mu^2 + \nu^2]^k},$$

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^n \arctg \left[\frac{\nu_i}{1 + \mu_i \text{Sgn}(\omega)} \right].$$

Далее несложно получить соотношение

$$S_{aek}(\omega) = S(\omega) \exp \left\{ i k \arctg \left[\frac{\nu}{1 + \mu \text{Sgn}(\omega)} \right] \right\} \times$$

$$\times \sqrt{[1 + 2\mu \text{Sgn}(\omega) + \mu^2 + \nu^2]^k}.$$

При $\mu = 0$, $\nu = 1$ и $k = 1$ имеем $S_{ae}(\omega) = S(\omega) + iS(\omega)$. Если $\mu = 1$, $\nu = 0$ и $k = 1$, то получаем

$$S_{aek}(\omega) = \sqrt{2} S(\omega) \sqrt{1 + \text{Sgn}(\omega)},$$

что соответствует спектральному представлению аналитического сигнала в его классическом понимании: $S_{ae}(\omega) = 2S(\omega)$, $\omega > 0$.

Взвешенный аналитический сигнал зависит от действительного аргумента, является однозначным и дифференцируемым. На комплексной плоскости он отображается вектором, модуль и фазовый угол которого изменяются в зависимости от аргумента, а проекция сигнала на вещественную ось для любого значения аргумента равна значению исходного сигнала $s(t)$. Какой-либо новой информации аналитический сигнал не несет, т. к. получен линейным преобразованием из исходного сигнала и представляет собой его новую математическую модель

Для гильберт-образа после k -го ВПГ получим:

$$S_{ek}(\omega) = S(\omega) \exp \left\{ k \arctg \left[\frac{\mu \text{Sgn}(\omega)}{\nu} \right] \right\} \times$$

$$\times \sqrt{[\mu \text{Sgn}(\omega)]^2 + \nu^2}^k =$$

$$= S(\omega) \exp \left\{ k \arctg \left[\frac{\mu \text{Sgn}(\omega)}{\nu} \right] \right\} \sqrt{(\mu^2 + \nu^2)^k}. \quad (29)$$

В случае, если $\mu^2 + \nu^2 = 1$, имеем

$$S_{ek}(\omega) = S(\omega) \exp \left\{ k \arctg \left[\frac{\sqrt{1 - \nu^2} \text{Sgn}(\omega)}{\nu} \right] \right\} =$$

$$= S(\omega) \exp \left\{ k \arctg \left[\frac{\mu \text{Sgn}(\omega)}{\sqrt{1 - \mu^2}} \right] \right\}.$$

$$7. H_e \{s(t + \tau)\} = \nu s(t + \tau) + \mu \hat{s}(t + \tau). \quad (30)$$

$$8. H_e \{s(\pm \alpha t)\} = \nu s(\pm \alpha t) + \mu \hat{s}(\pm \alpha t). \quad (31)$$

$$9. H_e \{(t + \tau)s(t)\} = \nu [(t + \tau)s(t)] +$$

$$+ \mu \left[(t + \tau)\hat{s}(t) + \frac{1}{\pi} \int s(t) dt \right]. \quad (32)$$

$$10. H_e \{s'(t)\} = \nu s'(t) + \mu \hat{s}'(t). \quad (33)$$

Свойства 7–10 доказываются прямой подстановкой значения оператора H_e и заменой переменной под интегралом.

11. Взвешенный аналитический сигнал в показательной форме представляется через аналитический сигнал, следующим образом:

$$s_{ae}(t) = s_a(t) \exp \{ i [\varphi_a(t) - \varphi_e] \},$$

$$s_e(t) = |s_a(t)| \cos [\varphi_a(t) - \varphi_e], \quad (34)$$

$$\nu^2 + \mu^2 = 1;$$

$$\varphi_a = \arctg \left[\frac{\hat{s}(t)}{s(t)} \right],$$

$$\varphi_e = \arctg \left[\frac{\mu \text{Sgn}(\omega)}{\nu} \right] = \arctg \left[\frac{\sqrt{1 - \nu^2} \text{Sgn}(\omega)}{\nu} \right]. \quad (35)$$

12. Исходя из физических соображений, можно считать, что величина μ_i значительно меньше единицы (соответственно значение ν_i близко к единице), значение арктангенса в формуле (21) заменим на его аргумент μ_i . Если положить $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$, то из выражения (21) получаем соотношение

$$\varphi_e = n\mu.$$

Если положить, что изменение параметра μ_i происходит непрерывно по трассе распространения r , общий сдвиг фазы можно представить следующим выражением:

$$\varphi_e = \int_0^r \mu(r) dr. \quad (37)$$

Исходя из вышесказанного, имеем (при условии $\nu^2 + \mu^2 = 1$)

$$F \{H_{e1} H_{e2} \dots H_{er}\} = S_{er}(\omega) = S(\omega) \exp \left[i \int_0^r \mu(r) dr \right]. \quad (38)$$

Если сделать допущение, что набег фазы на малых интервалах дистанции одинаков, то получаем

$$F\{H_{e1}H_{e2}\dots H_{er}\} = S_{er}(\omega) = S(\omega)\exp[in\mu\Delta r]. \quad (39)$$

13. Найдем, как связаны между собой статистические характеристики стохастических сигналов $s(t)$ и $H_e\{s(t)\}$. По определению:

$$\begin{cases} \hat{s}_e(t) = \nu s(t) + \mu \left[s(t) * \frac{1}{\pi t} \right], \\ s(t) = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} s(t) + \frac{\mu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} \left[s(t) * \frac{1}{\pi t} \right]. \end{cases} \quad (40)$$

Умножим первое выражение на $\hat{s}_e(t)$, а второе — на $s(t_1)$ и усредним результаты, получаем соотношения

$$\begin{cases} R_{ee}(t, t_1) = \nu R_{se}(t, t_1) + \mu \left[R_{se}(t, t_1) * \frac{1}{\pi t} \right], \\ R_{ss}(t, t_1) = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} R_{se}(t, t_1) + \\ + \frac{\mu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} \left[R_{se}(t, t_1) * \frac{1}{\pi t} \right], \end{cases} \quad (41)$$

где $R_{ss}(t, t_1)$, $R_{ee}(t, t_1)$ — соответственно автокорреляционные функции сигнала и его ВПГ-образа; $R_{se}(t, t_1)$ — взаимокорреляционная функция сигнала и его ВПГ-образа.

В случае стационарного (в широком смысле) процесса $s(t)$ корреляционные функции зависят только от сдвига и являются стационарно связанными между собой. К примеру, последняя пара выражений в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} R_{ee}(\tau) = \nu R_{se}(\tau) + \mu \left[R_{se}(\tau) * \frac{1}{\pi \tau} \right], \\ R_{ss}(\tau) = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} R_{se}(\tau) + \\ + \frac{\mu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} \left[R_{se}(\tau) * \frac{1}{\pi \tau} \right]. \end{cases} \quad (42)$$

На основании полученных выражений было проведено математическое моделирование взвешенного преобразования Гильберта в среде математического пакета MathCad. В качестве тестового сигнала была выбрана синусоида (как наиболее наглядный пример), определенная 256 отсчетами. Преобразование Гильберта осуществлялось путем сдвига фазового спектра сигнала на 90° (что соответствует косинусоиде $\cos(i/8)$).

Анализ моделирования показывает, что при изменении коэффициента μ от 0 до 1 фаза гармонического сигнала плавно меняется от 0 до 90° , что особенно заметно на плоскости (s_i, Hs_i) , когда фазовый портрет изменяется от прямой линии, задаваемой уравнением $Hs_i = s_i$ (что соответствует $\nu=1$ и $\mu=0$), до окружности $Hs_i = \sqrt{1-s_i^2}$ (что соответствует $\nu=0$ и $\mu=1$).

ВЗАИМОСВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВПГ С УГЛАМИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Выразим коэффициенты μ и ν через углы преломления α и q . Известно [6], что при полном внутреннем отражении коэффициент преломления V определяется следующим выражением

$$V = \frac{q \cos \alpha \mp i |\cos \gamma|}{q \cos \alpha \pm i |\cos \gamma|} = \exp(\mp 2i\psi),$$

$$\text{где } |\cos \gamma| = \sqrt{\left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha\right)^2 - 1}, \quad \text{tg } \psi = \frac{|\cos \alpha|}{q \cos \alpha}.$$

В то же самое время мы имеем

$$\tilde{S}_\Lambda(\omega) = \tilde{S}(\omega) \exp\left[\mp \arctg\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда получаем: } 2\psi &= \arctg \frac{\mu}{\nu} \quad \text{или} \quad \frac{\mu}{\nu} = \\ &= \text{tg}(2\psi) = \frac{2\text{tg } \psi}{1 - \text{tg}^2 \psi} = \varphi(\psi). \end{aligned}$$

Так как $\mu^2 + \nu^2 = 1$, имеем $\nu = \sqrt{1 - \mu^2}$. Далее: $\frac{\mu^2}{1 - \mu^2} = \varphi^2(\psi) \Rightarrow \mu^2 [1 + \varphi^2(\psi)] = \varphi^2(\psi)$. Откуда получаем

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\varphi(\psi)}{\sqrt{1 + \varphi^2(\psi)}} = \frac{2\text{tg } \psi}{\sqrt{(1 - \text{tg}^2 \psi)^2 + 4\text{tg}^2 \psi}} = \\ &= \frac{2\text{tg } \psi}{1 + \text{tg}^2 \psi} = \frac{2|\cos \alpha|}{q \cos \alpha \left(1 + \frac{4\cos^2 \gamma}{q^2 \cos^2 \alpha}\right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно имеем: } \mu = \frac{2q|\cos \gamma| \cos \alpha}{q^2 \cos^2 \alpha + 4\cos^2 \gamma}.$$

Если подставить $|\cos \gamma| = \sqrt{\left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha\right)^2 - 1}$, то получим

$$\mu = \frac{2q|\cos \gamma| = \sqrt{\left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha\right)^2 - 1} \cdot \cos \alpha}{q^2 \cos^2 \alpha + 4 \left[\left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha\right)^2 - 1 \right]}. \quad (43)$$

Таким образом, получен результат, который связывает коэффициенты ВПГ с физическими свойствами среды и подтверждает тот факт, что распространение сигнала можно рассматривать как последовательность ВПГ. Взвешенное преобразование Гильберта является представлением сигнала, которое позволяет учитывать физические явления, связанные с распространением акустической энергии в среде с потерями.

Дальнейшее развитие моделирование сигналов с помощью ВПГ получает при использовании теоретико-группового подхода. В этом случае преобразование Гильберта будем определять как преобразование на группе.

Рассмотренное выше взвешенное преобразование Гильберта является полезным научным результатом, который позволит строить математические модели гидроакустических и радиолокационных сигналов, учитывающих свойства канала распространения. Процесс распространения сигнала представляется при этом

как многократное частичное преобразование Гильберта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 615 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. Фрэнкс Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974. 341 с.
4. Бутырский Е.Ю. Взвешенное преобразование Гильберта и его свойства // Информация и космос. 2008. Вып. № 2. С. 40–46.
5. Акустические волны в океане / Под ред. Бреховских Л.М., Андреевой И.Б. М.: Наука, 1987. 215 с.
6. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 264 с.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 243 с.

Санкт-Петербургский государственный университет

Контакты: Бутырский Евгений Юрьевич,
evgenira88@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 6.09.2014

WEIGHTED HILBERT TRANSFORMATION

E. Yu. Butyrsky

Saint-Petersburg State University, RF

Generalization of transformation of Hilbert, determined as the self-weighted transformation of Hilbert and which arises up at description physical distribution of signal and reflection of him from borders, is considered in the real article. Properties of this transformation are studied. The concept of analytical signal is adapted to the self-weighted transformation of Hilbert. As classic transformation of Hilbert appears as the special case of this transformation. Intercommunication of coefficients of the generalized transformation of Hilbert is found with properties of environment.

Keywords: Hilbert transformation, analytical signal, function, Fourier transformation, delta function, spectrum

Contacts: Butyrsky Evgeniy Yur'evich,
evgenira88@mail.ru

Article arrived in edition: 6.09.2014