

УДК 532.517

© Е. Б. Шарфарец, Б. П. Шарфарец

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ. УЧЕТ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАКЕТОВ

В работе освещены особенности динамики конвективных течений, вызванных действием силы тяжести и градиентов температуры; приведена математическая модель, описывающая их поведение, а также условие механического равновесия жидкости при нагреве; условия возникновения устойчивого и неустойчивого конвективных течений. Приведены законы подобия для свободной конвекции и теплопередачи. Представленные результаты позволяют существенно повысить эффективность численного моделирования с целью получения рекомендаций к синтезу нужных для создания приборов устойчивых конвективных течений путем вариации геометрии задачи, распределения градиентов управляющего температурного поля и параметров рабочей жидкости.

Кл. сл.: свободная конвекция, градиент температуры, устойчивость конвективных течений, метод подобия

ВВЕДЕНИЕ

Появление в последнее время эффективных вычислительных пакетов позволяет численно решать весьма сложные нелинейные задачи математической физики, решение которых до этого было весьма проблематично или вообще невозможно. При использовании вычислительных пакетов для получения доброкачественных адекватных результатов необходимо профессиональное знание предметной области (ее "подводных камней"), к которой принадлежит решаемая задача.

Одной из сложнейших задач является решение связанных систем Навье—Стокса общего вида, включающих в себя поля скорости, давления, плотности и температуры вязких гидродинамических течений. (В 2000 г. Институт Клея сформулировал семь "задач тысячелетия", за решение которых назначил премию в миллион долларов за каждую; 6-й "проблемой тысячелетия" была сформулирована задача о существовании и гладкости решений уравнений Навье—Стокса для несжимаемой вязкой жидкости).

Среди гидродинамических течений важное место занимают свободные конвективные течения. Под свободной конвекцией понимают движения жидкости, возникающие за счет сил Архимеда при наличии неоднородности плотности жидкости в поле массовых сил. В настоящей работе речь пойдет о термогравитационной конвекции, т. е. случае, когда неоднородности жидкости связаны с ее неравномерным нагревом и течение возникает в поле силы тяжести, т. е. полагаем, что единст-

венным источником движения жидкости является неоднородность температуры.

Конвекция жидкости под воздействием градиента температуры имеет важное теоретическое и прикладное значение, может быть предметом исследований как теоретической гидродинамики, так иметь и прикладное значение для конструирования различных приборов. Конвективное движение жидкости может быть как регулярным (устойчивым), так и хаотическим. Изучение механизмов, приводящих к неустойчивому поведению течений, важно не только с научной точки зрения, но и практически в связи с необходимостью управления их устойчивостью.

К настоящему времени библиография по устойчивости конвективных течений насчитывает многие сотни названий. Исследована устойчивость конвективных течений в объемах различной формы и ориентации. Приведем здесь в качестве примера работы [1, 2], где исследована конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. В этих же работах представлен подробный обзор публикаций по данной тематике.

Началом систематического изучения конвективной устойчивости жидкости можно считать эксперименты Бенара (Benard H., 1900 г.), наблюдавшего возникновение регулярной пространственно-периодической конвекции гексагональной структуры в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости с верхней свободной поверхностью [3] (ячейки Бенара, см. рис. 1, 2 с фото 141 и 142 из работы [4] и взятыми там же комментариями). Такой характер ячеек обязан возникновением

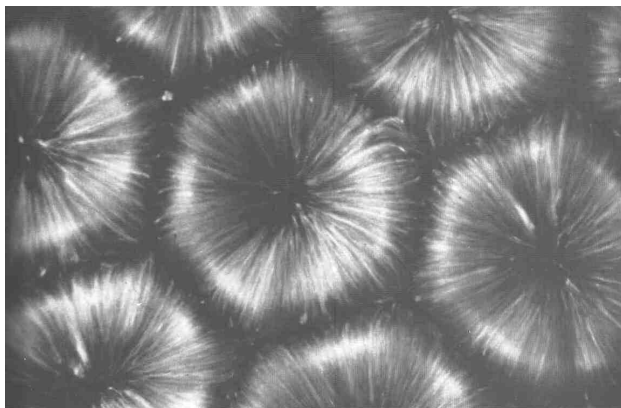


Рис. 1. Конвекция, создаваемая поверхностным натяжением (конвекция Бенара) [4, фото 141].

Увеличение ~ 25 раз. Снимок демонстрирует гексагональную конвективную структуру в слое силиконового масла глубиной 1 мм при равномерном нагреве снизу и воздействии окружающего воздуха сверху. Если верхняя поверхность свободна, то течение создается главным образом неоднородностями поверхностного натяжения, а не плавучестью. Свет, отраженный от алюминиевых хлопьев, демонстрирует подъем жидкости в центре каждой ячейки и ее опускание на краях. Время экспозиции составляет 10 с, тогда как время движения жидкости поперек ячейки от центра к краю равно 2 с

градиента поверхностного натяжения на верхней свободной границе под воздействием градиента температуры (эффект Марангони [5]).

Затем в 1916 г. Рэлей теоретически исследовал конвективную устойчивость в горизонтальном слое жидкости и определил порог конвекции для модельного случая слоя с обеими свободными границами [6]. Он рассмотрел горизонтальный слой жидкости со свободными, но недеформируемыми границами, на которых поддерживается разная, но постоянная температура при учете поля силы тяжести (задача Рэля—Бенара). Схема модели приведена на рис. 3. Рэлей установил, что степень неустойчивости конвективных течений зависит от параметра Ra (названного числом Рэля), определяемого, в частности, разностью температур на граничных поверхностях. При нагреве снизу (как на рис. 3) число Рэля неотрицательно $Ra \geq 0$. Пока $0 \leq Ra < Ra^c$, где Ra^c — критическое значение числа Рэля, конвекция отсутствует, что соответствует стационарной теплопроводности в задаче Рэля—Бенара. Далее используем относительное число Рэля $r = Ra / Ra^c$. При $1 < r < r_2$, где $r_2 \approx 24.74$, возникает стационарная конвекция в модели Рэля—Бенара [6, 7], что соответствует существованию вихрей в виде горизонтальных цилиндрических валов (см. рис. 3).

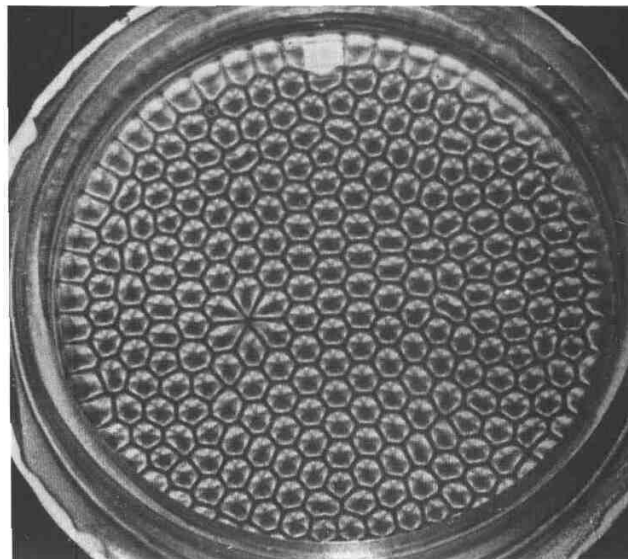


Рис. 2. Нерегулярности гексагональной структуры конвективной картины Бенара [4, фото 142].

Как видно на снимке, гексагональная структура ячеек, характерная для конвективной неустойчивости, вызванной главным образом поверхностным натяжением, приспосабливается к круговой границе. Алюминиевый порошок демонстрирует течение в тонком слое силиконового масла с кинематической вязкостью $0.5 \text{ см}^2/\text{с}$ на равномерно нагретой медной пластинке. Маленькая выемка на пластинке приводит к возникновению нерегулярности ячеек в области слева, где образуются ячейки в форме огранки бриллианта. Это показывает, насколько картина чувствительна к малейшим нарушениям регулярности [Koschmieder, 1974]

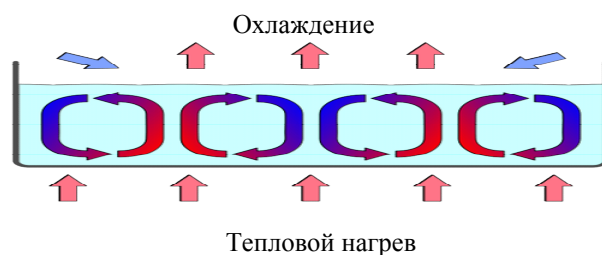


Рис. 3. Модель задачи Рэля—Бенара

На рис. 4, 5, также заимствованных из [4], показаны примеры таких валов.

Далее по мере создания теории хаоса стала появляться масса работ (назовем здесь для примера [7] и [8]), проявляющих многие особенности нелинейных динамических систем, неизвестные во времена Рэля. Классической работой, посвященной изучению устойчивости задач конвекции, стала работа Лоренца [9], в которой рассмотрена т. н. модель Лоренца, являющаяся с точки зрения

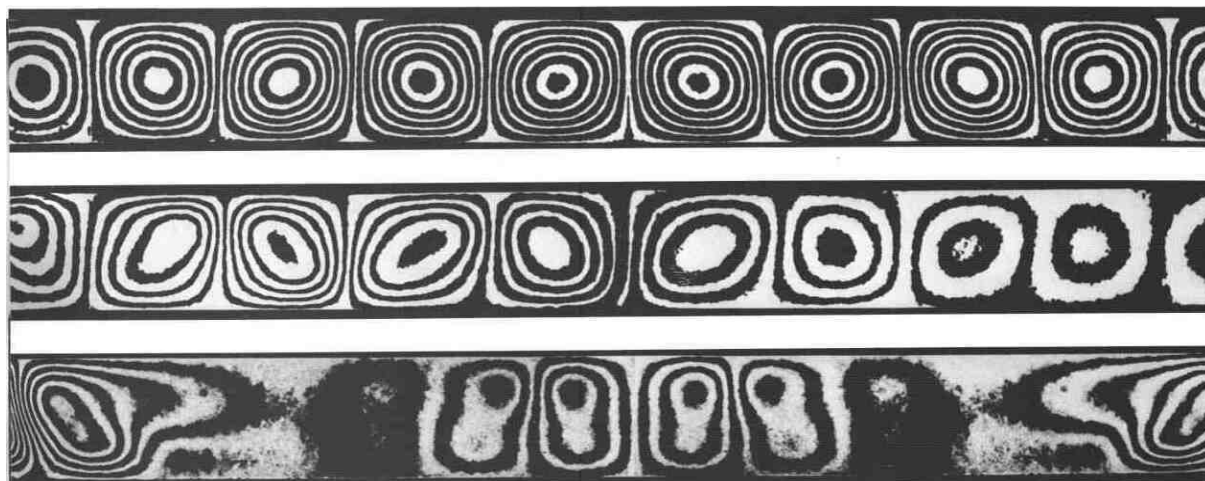


Рис. 4. Конвективные валики, движимые плавучестью [4, фото 139].

Дифференциальные интерферограммы демонстрируют сбоку картины конвективной неустойчивости силиконового масла в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон $10 : 4 : 1$, подогреваемом снизу. На верхнем снимке видна классическая ситуация Рэля—Бенара: равномерный нагрев создает валики, параллельные более короткой стороне. На средней фотографии разность температур, а следовательно, и амплитуда движения возрастают в направлении справа налево. На нижней фотографии ящик вращается относительно вертикальной оси [Oertel, Kirchartz, 1979; Oertel, 1982, a]

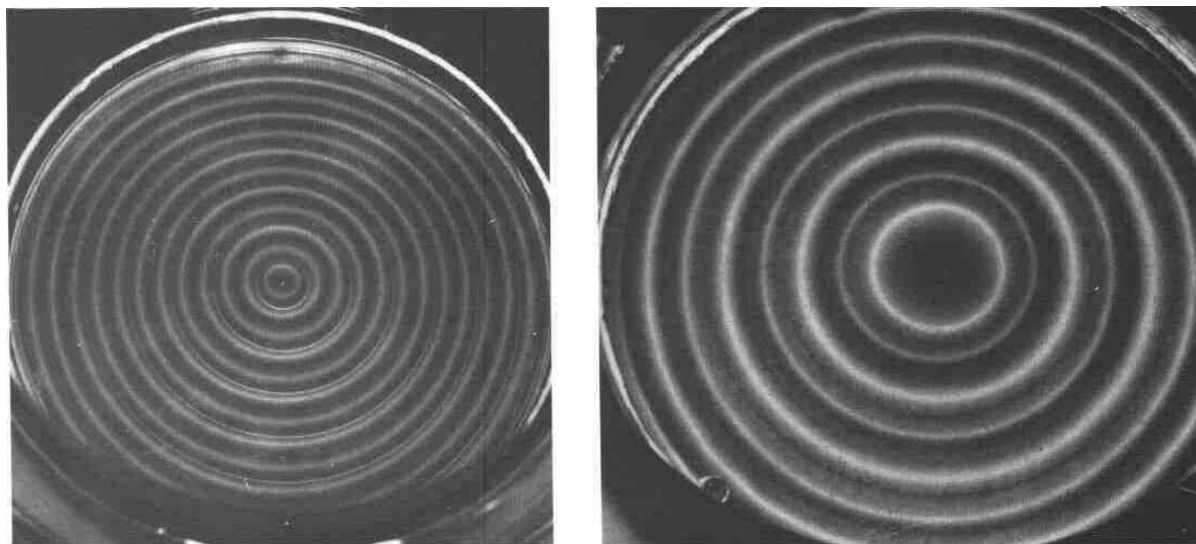


Рис. 5. Круговые конвективные ячейки, движимые плавучестью [4, фото 140].

Силиконовое масло, содержащее алюминиевый порошок, покрыто равномерно охлаждаемой стеклянной пластинкой, исключая влияние поверхностного натяжения. Круговая граница создает круговые валики. На левом снимке медное дно равномерно подогревается при условиях, соответствующих числу Рэля, в 2.9 раза превышающему критическое, что приводит к образованию регулярных валиков. На правом снимке дно около внешней границы горячее, чем в центре. Тем самым создается глобальная циркуляция, которая, будучи наложена на регулярные круговые валики, порождает попеременно более крупные или более мелкие валики [Koschmieder, 1974, 1966]

математической модели несколько упрощенным вариантом задачи Рэля—Бенара, после которой появилось множество работ, посвященных про-

блеме неустойчивости решений с точки зрения теории хаоса. Так, если вновь вернуться к шкале относительного числа Рэля, то [7, с. 77, 78] при

$r > r_1 \approx 24.06$ возникает странный аттрактор с хаотическим движением. В узкой области $24.06 < r < 24.74$ существуют три аттрактора. Два из них соответствуют стационарной конвекции, а третий — хаотическому потоку. При этом в системе имеет место гистерезис: если r растет, то регулярная конвекция переходит в турбулентность при $r = 24.74$; если же r уменьшается, турбулентное движение переходит в регулярную конвекцию при $r = 24.06$.

На рис. 6 приведен пример эволюции турбулентности в горизонтальном слое, заимствованный из работы [4].

При проектировании научных приборов, использующих в своей работе обязательное наличие различных конвективных течений, необходимо четко представлять математические модели, описывающие динамику конвективных течений, наличие границ перехода от механического равновесия (когда теплопередача осуществляется при отсутствии конвекции) к устойчивым конвективным течениям и далее от последних к турбулентным (неустойчивым) течениям.

Целью настоящей работы является освещение этих и ряда других важных особенностей динамики конвективных течений для последующего их корректного исследования с помощью вычислительных пакетов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА

Приведем некоторые сведения, касающиеся математического моделирования конвективных течений, вызванных наличием градиентов температуры. Для реальной сжимаемой жидкости, находящейся в поле тяжести, общая система уравнений гидродинамики имеет вид [10]:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left[\frac{\eta}{3} + \zeta \right] \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

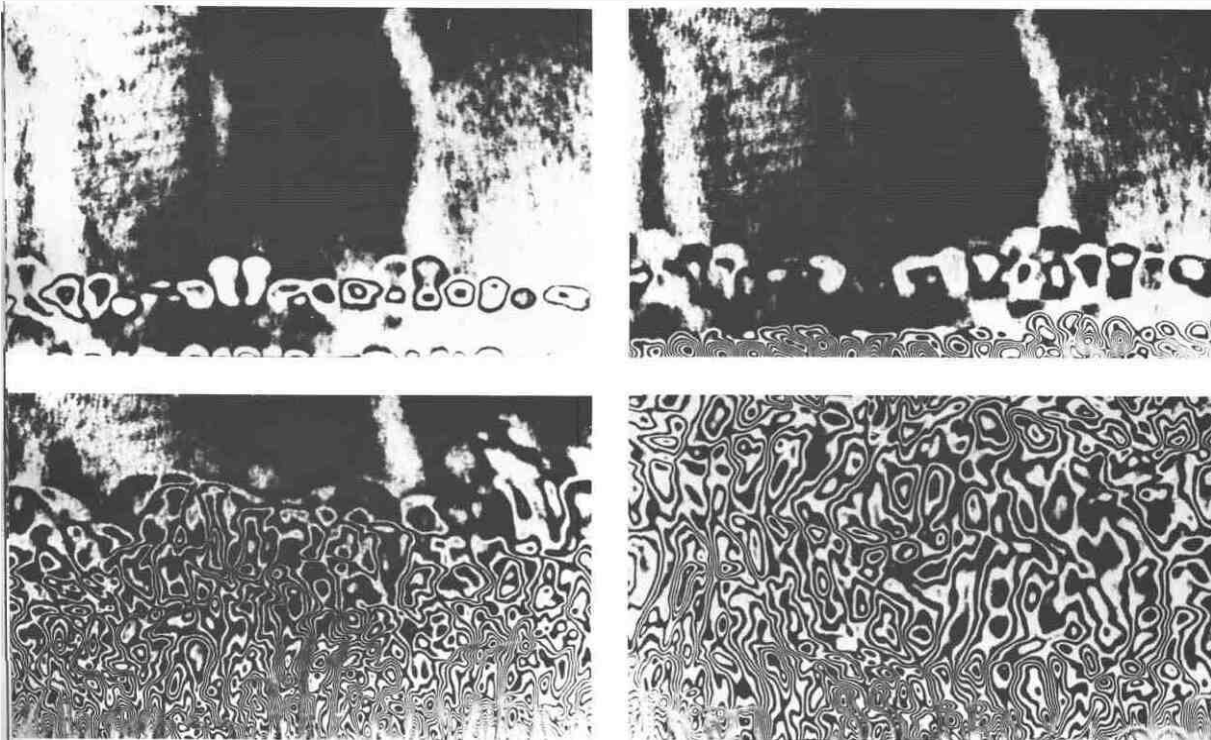


Рис. 6. Формы неустойчивости в нагретом слое [4, фото 143].

Фреон, заполняющий пространство между горизонтальными пластинками, мгновенно нагревается снизу. Серия последовательно снятых дифференциальных интерферограмм демонстрирует формы неустойчивости в возникающем конвективном факеле и тепловом пограничном слое на нижней пластинке; переход к турбулентности и турбулентные структуры в верхнем и нижнем пограничных слоях [Oertel, 1982, b]

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \kappa \Delta T + D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость течения; ρ — плотность; T — абсолютная температура; s — энтропия единицы массы жидкости; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; η , ς — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно (здесь они полагаются постоянными); D — диссипативная функция

$$D = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 + \varsigma (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (4)$$

Во многих случаях представляет интерес исследование конвекции, протекающей в условиях, когда сжимаемость среды не существенна (условия правомерности такого допущения приведены в [10, с. 41, 42, 277]). С учетом несжимаемости жидкости, а также при принятии еще ряда допущений, которые укажем ниже, исходная система уравнений (1)–(3) может быть значительно упрощена. Соответствующие приближенные уравнения обычно называют уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [11]. Их вывод приведен, например, в [10, § 56], [1, § 1]. Если принять в системе уравнений (1)–(3) $T = T_0 + T'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, где величины с нижним индексом 0 — некоторые их равновесные состояния, а со штрихом — их возмущения, и учесть уравнение гидростатики для величины p_0 , то (1)–(3) приводятся к уравнениям конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} + \beta T' g \gamma, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения: $\nu = \eta / \rho_0$ — кинематическая вязкость; $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ — коэффициент теплового расширения; $\chi = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p}$ — коэффициент температуропроводности; κ — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; γ — единичный

вектор, направленный вертикально вверх вдоль положительного направления оси z ; $g = |\mathbf{g}|$. При выводе (5)–(7) принимались предположения о малости возмущенных величин (обозначения со штрихом) по отношению к равновесным величинам (с индексом ноль). Кроме того, учитывались только линейные относительно величин p' и T' члены. Диссипативный член (4) в (2) мал по сравнению с остальными членами и им также можно пренебречь [6, с. 307].

Основным допущением при выводе системы (5)–(7) является предположение о том, что, как сформулировано в [1, с. 11], рассматривается в некотором смысле "слабая" конвекция: вызванные неоднородностью температуры отклонения плотности от среднего значения предполагаются настолько малыми, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения, где это отклонение учитывается лишь в члене с подъемной силой. Однако сравнение результатов решения уравнений конвекции (5)–(7) с обширным экспериментальным материалом с определенностью свидетельствует о том, что эти уравнения достаточно хорошо отражают все важные особенности тепловой конвекции в лабораторных масштабах. Принятое ограничение "слабой" конвекции предполагает, что [11, 12] $\beta T' \ll 1$. Для воды, например, $\beta = (0.53 \div 5.87) \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ при изменении температуры от 5 до 80 °C, и, следовательно, приближение годится для любых возможных разностей температуры.

УСЛОВИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Условие механического равновесия жидкости, описываемой системой уравнений (5)–(7), дано, например, в [1, 10, 12] и сводится к вопросу о том, может ли жидкость оставаться неподвижной при наличии неоднородного распределения температуры.

Далее вывод необходимого условия равновесия заимствован из работ [1, § 2], [10, § 57] и [12, с. 31, 32].

Положим возмущенное значение температуры T' и давления p' из системы (5)–(7) равными

$$T' = T^0 + T'', \quad p' = p^0 + p'',$$

где T^0 и p^0 относятся к неподвижной жидкости, а T'' и p'' — соответствующие возмущения, связанные с движением жидкости. Механическое равновесие подразумевает нулевые скорости и стационарность (независимость решения от времени) всех полей в системе уравнений Буссинеска,

т. е. $\mathbf{v} = 0$, $p'' = 0$, $T'' = 0$.

С учетом этого система (5)–(7) упрощается

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla p^0 + \beta T^0 g \gamma = 0, \quad \chi \Delta T^0 = 0$$

и сводится к виду [10, с. 311]

$$\frac{dp^0}{dz} = \rho_0 g \beta T^0, \\ \Delta T^0 = \frac{d^2 T^0}{dz^2} = 0.$$

Решение последней системы сводится к линейной зависимости стационарного смещения температуры T^0 от вертикальной координаты

$$T^0 = Az + B. \quad (8)$$

Здесь A и B — константы. При $A < 0$ подразумевается подогрев снизу, в противном случае подогрев сверху.

Опыт подсказывает, что при выполнении (8) устойчивым может быть нагрев сверху [12, с. 32]. При нагреве снизу условие (8) является необходимым, но недостаточным условием механического равновесия. Выше уже отмечалось, что при подогреве снизу при некотором критическом значении числа Рэлея Ra^c в задаче (5)–(7) для плоского горизонтального слоя (или, что то же самое, при превышении некоторого критического градиента температуры) механическое равновесие пропадает и возникает конвективное течение. Так, согласно [12], неустойчивость в слое воды глубиной 1 м при подогреве снизу возникает уже при вертикальной разности температуры величиной всего 10^{-7} градусов, в слое толщиной 1 см критическая разность температуры равна 0.1 градуса, а слой воды толщиной 1 мм практически абсолютно устойчив.

Если условие (8) не выполнено (т. е. температура зависит не только от z , либо зависимость от z не является линейной), то механическое равновесие априори невозможно и неизбежно возникает конвекция [1, 10].

ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Используя стандартную технику [13], приведем систему уравнений Буссинеска для свободной конвекции (5)–(7) к безразмерному виду, например, по аналогии с [14] (далее штрихи у величин в системе уравнений (5)–(7) везде опущены). Начнем с координат (все величины с тильдой становятся безразмерными, а размерность "уходит" в масштабные множители):

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = h \tilde{\mathbf{r}} = h(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad [h] = \text{м}.$$

Здесь h — характерный линейный размер объема с жидкостью.

Для вектора скорости выбираем

$$\mathbf{v} = V_0 \tilde{\mathbf{v}}, \quad V_0 = \frac{v}{h}, \quad [V_0] = \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (9)$$

Выбор $V_0 = \frac{v}{h}$ сделан согласно [10, с. 308, выражение (56.10)].

Для масштабирования температуры имеем

$$T = \theta \tilde{T}, \quad [\theta] = \text{К}. \quad (10)$$

Здесь θ — характерный разброс температуры (например, в случае модели Рэлея—Бенара это постоянная разность температур на горизонтальных свободных поверхностях).

Для времени выбор масштабного множителя очевиден:

$$t = t_0 \tilde{t}, \quad t_0 = \frac{h}{V_0}, \quad [t_0] = \text{с}. \quad (11)$$

Для давления из двух возможных вариантов [14, (6), (7)] примем множитель P_0 в виде [14, (6)]

$$p = P_0 \tilde{p}, \quad P_0 = \frac{\eta V_0}{h} = \frac{\eta v}{h^2}, \quad [P_0] = \text{Па}. \quad (12)$$

С учетом изменения дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\nabla = \frac{1}{h} \tilde{\nabla}$ и значений масштабных множителей преобразуем систему (5)–(7) к безразмерному виду. Для уравнения движения получаем

$$\frac{V_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{V_0^2}{h} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P_0}{\rho h} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{v V_0}{h^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \beta \theta g \tilde{T} \tilde{\gamma}.$$

С учетом выражений (9), (11) и (12) это уравнение преобразуется к виду

$$\left(\frac{v^2}{h^3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{v^2}{h^3} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\frac{v^2}{h^3} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{v^2}{h^3} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \beta \theta g \tilde{\gamma}.$$

После деления последнего уравнения на величину $\frac{v^2}{h^3}$ получаем

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\beta \theta g h^3}{v^2} \tilde{T} \tilde{\gamma}.$$

Стоящий в массовой (архимедовой) силе справа постоянный коэффициент представляет собой число Грассгофа [10, с. 308]

$$G = \frac{\beta \theta g h^3}{v^2} = \frac{Ra}{\text{Pr}}, \quad (13)$$

являющееся частным от деления чисел Рэлея Ra

$$Ra = \frac{\beta \theta g h^3}{\nu \chi} \quad (14)$$

и Прандтля Pr

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}.$$

Число Прандтля Pr связано с другими критериями подобия — числом Пекле Pe и числом Рейнольдса Re — соотношением $Pr = \frac{Pe}{Re}$. Что касается числа Прандтля, то оно представляет собой некоторую материальную константу вещества и не зависит от свойств самого потока [10, с. 293, 294].

Аналогичная процедура приводит уравнение (6) к виду

$$\frac{\nu}{h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\nu}{h^2} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{\chi}{h^2} \Delta \tilde{T},$$

или после сокращения

$$Pr \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \right) = \Delta \tilde{T}.$$

Окончательно безразмерная система уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска записывается в виде (см. схожую запись в [12, с. 30])

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{Ra}{Pr} \tilde{T} \boldsymbol{\gamma}, \quad (15)$$

$$Pr \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \right) = \Delta \tilde{T}, \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (17)$$

Если за единицу скорости V_0 взять не выражение из (9), а $V_0 = \frac{\chi}{h}$, то система (15)–(17) преобразуется к виду [12, с. 30]

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + Ra \tilde{T} \boldsymbol{\gamma}, \quad (15a)$$

$$Pr \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} = \Delta \tilde{T}, \quad (16a)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (17a)$$

В работе [12, с. 31] приведены выражения для безразмерной системы, аналогичной системам (15)–(17) и (15a)–(17a), в которой фигурирует

в качестве безразмерных параметров число Рейнольдса и число Прандтля.

Запишем, следуя [10, с. 308], решения для $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\tilde{T}$:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_1 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, Ra, Pr \right),$$

$$\tilde{T} = f_2 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, Ra, Pr \right).$$

Для исходных величин имеем, согласно (10) и (11):

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{h} \mathbf{f}_1 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, Ra, Pr \right),$$

$$T = \theta f_2 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, Ra, Pr \right).$$

Здесь θ определено в (10).

Таким образом, два течения подобны, если они подобны геометрически (геометрически подобные точки течений находятся из условия $\frac{\mathbf{r}_1}{h_1} = \frac{\mathbf{r}_2}{h_2}$, где индексы нумеруют течения, $\mathbf{r}_i \in \Omega_i$, где Ω_i — область i -го течения, $i=1,2$) и у них равны числа Рэлея и Прандтля. Если найдены величины $\mathbf{v}_1$ и T_1 для одного из подобных течений, то соответствующие величины $\mathbf{v}_2$ и T_2 в подобных точках для второго легко находятся из последних выражений

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\nu_2 h_1}{\nu_1 h_2} \mathbf{v}_1, \quad T_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} T_1. ^*)$$

ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Приведем закон подобия для теплопередачи, когда архимедовой силой можно пренебречь. Уравнение движения (5) тогда запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (18)$$

а уравнения (6), (7) остаются неизменными.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

^{*)} **Замечание.** Число Грассгофа (13) характеризует отношение архимедовых сил к вязким силам и свидетельствует о сильной зависимости конвективных механизмов от размера h (в третьей степени).

Система (6), (7), (18) характеризуется пятью параметрами со следующими размерностями [10, с. 293]: некоторой заданной характерной скоростью $[V_0] = \text{м/с}$, а не определяемой через выражение (9); кинематической вязкостью $[\nu] = [\chi] = \text{м}^2/\text{с}$; характерным размером $[h] = \text{м}$ и характерной разницей температур $[\theta] = \text{К}$. Тогда возникают следующие масштабы для величин: (9) — для вектора скорости, (10) — для температуры, (11) — для времени и (12) — для давления. При этом нужно помнить, что величина V_0 определяется не выражением (9), а задается.

Выражение (18) в безразмерном виде приведено, например, в [14]:

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (18a)$$

Здесь, как обычно, число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\rho_0 V_0 h}{\eta}$.

Выражение (6) после приведения к безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{\chi}{V_0 h} \Delta \tilde{T}.$$

Константа справа $\frac{\chi}{V_0 h}$ — безразмерная и с точностью до постоянного множителя обратна числу Прандтля $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$. Тогда, следуя [10, с. 294], можно записать

$$\mathbf{v} = V_0 \mathbf{f}_1 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \text{Re} \right), \quad T = \theta f_2 \left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \text{Re}, \text{Pr} \right).$$

Последние выражения при одинаковых параметрах Re и Pr позволяют изучать подобные процессы, как это делалось выше в случае конвективных течений.

ВЫВОДЫ

Приведенные результаты позволяют качественно провести численное моделирование конвективных течений в сложных областях, повысить эффективность вычислений с использованием методов подобия в таких областях, где без этого задача решается либо очень долго, либо не решается вовсе в силу особенностей разбиения областей на конечные элементы. В конечном итоге это помогает получить рекомендации к синтезу нужных для создания приборов конвективных течений путем вариации геометрии задачи, распределения

градиентов управляющего температурного поля и параметров рабочей жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
3. Benard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Revue generale des Sciences, pures et appliquees. 1900. Vol. 12. P. 1261–1309.
4. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
5. Marangoni C. Sull'espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. 1865.
6. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // Phil. Mag. 1916. Vol. 32, nu. 6. P. 529–546.
7. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
8. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
9. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. Nu. 20. P. 130–141 (перевод: Лоренц Э.Н. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы (сб.) / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 88–116).
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Boussinesq J. Theorie analytique de la chaleur. Vol. 2. Paris, 1903.
12. Флик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Учебное пособие. Часть I. Пермь: Перм. гос. тех. ун-т, 1998. 108 с.
13. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
14. Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б. Некоторые особенности моделирования микрофлюидных процессов // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, № 4. С. 91–94.

Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 10.04.2014

FREE CONVECTION. ACCOUNTING FOR CERTAIN PHYSICAL FEATURES WHEN SIMULATION SOFTWARE USING FOR MODELING CONVECTION FLOWS

E. B. Sharfarets, B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

In the work of the highlighted features of the dynamics of convective flows induced by gravity and temperature gradients, the mathematical model describing their behavior, and the condition of mechanical equilibrium liquid when heated, the conditions of formation of stable and unstable convective flows. Given the similarity laws for free convection and heat transfer. These results enable to significantly increase the efficiency of numerical modeling with the aim of producing recommendations to the synthesis need to create devices sustainable convection currents by variation geometry, distribution gradients control of the temperature field and the parameters of the working fluid.

Keywords: free convection, temperature gradient, the stability of convective flows, similarity method

REFERENCES

1. Benard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue generale des Sciences, pures et appliquees*, 1900, vol. 12, pp. 1261–1309.
2. Marangoni C. Sull'espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. 1865.
3. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, 1916, vol. 32, nu. 6, pp. 529–546.
4. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmosp. Sci.*, nu. 20, pp. 130–141.

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article arrived in edition: 10.04.2014