

УДК 537.21:537.29

© Ю. К. Голиков, Н. К. Краснова

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНЫХ СПЕКТРОГРАФИЧЕСКИХ СРЕД

В статье развивается аналитический аппарат представления электрических спектрографических сред с гармоническим обобщенно-однородным потенциалом вида $\varphi(x, y, z) = P(x, y, z) \ln R(x, y, z) + Q(x, y, z)$, где P, Q, R — однородные по Л. Эйлеру функции с целочисленной кратностью. На базе комплексного потенциала Донкина для однородных функций нулевой кратности строится точный алгоритм синтеза таких потенциалов, содержащих в качестве свободного варьируемого элемента произвольные функции комплексного переменного. Анализируются эквипотенциальные портреты подобных полей и обсуждаются варианты их применения в электронной спектроскопии.

Кл. сл.: обобщенно-однородные по Л. Эйлеру функции, электрический спектрограф, электронная спектроскопия, комплексный потенциал Донкина, сферо-конические координаты

ВВЕДЕНИЕ

Спектрографическими электронно-оптическими средами мы будем называть электрические поля особой структуры, обладающие свойством пространственно разделять электронные или ионные потоки на систему изоэнергетических струй, сфокусированных на плоский либо прямолинейный позиционно-чувствительный детектор (ПЧД) [1].

Такой способ фиксации энергетических спектров одновременно в большом диапазоне изменения энергий имеет большие преимущества по сравнению с последовательным процессом измерения энергий, который лежит в основе работы большинства традиционных электронных спектрометров. В частности, спектрографы незаменимы при исследовании быстропротекающих физических и химических процессов на поверхности эмиттера (образца) средствами электронной спектроскопии. Идеальную спектрографическую среду образуют поля с потенциалом φ , однородным по Л. Эйлеру. Они характеризуются функциональным тождеством [2]

$$\varphi(kx, ky, kz) = k^n \varphi(x, y, z). \quad (1)$$

В таких полях действует специальный принцип механического подобия, который как раз и обеспечивает струйное разделение потока, причем струи оказываются взаимно подобными, а сфокусированные пятна разной энергии распределяются вдоль луча, проходящего через начало координат $x = y = z = 0$ — центр гомотетии. Теория таких

сред, включающая задачу Коши для симметричных потенциалов, построена в наших работах [3, 4] при помощи комплексных потенциалов Донкина общего вида, что позволило строить широкое многообразие нужных потенциалов с элементарным представлением, выводящее далеко за пределы стандартной теории сферических функций [5]. Этот прием в литературе не встречается. В данной работе мы распространяем наши методы на класс трехмерных потенциалов, которые удобно назвать обобщенно-однородными. Их форма такова

$$\varphi(x, y, z) = P(x, y, z) \ln R(x, y, z) + Q(x, y, z). \quad (2)$$

Здесь P, Q — однородные функции одинаковой кратности n , а R — однородная функция кратности m . Числа m и n могут быть любыми вещественными, но мы предпочтем только целые числа, положительные и отрицательные, включая 0. В классе этих структур также действует принцип подобия, но не абсолютно точный, а с некоторыми искажениями, что, впрочем, не мешает синтезировать на их базе весьма эффективные спектрографы [6]. К сожалению, потенциалы типа (2) за редчайшим исключением не позволяют проинтегрировать уравнения движения в замкнутой аналитической форме, и здесь приходится полагаться на компьютерное моделирование. Оно позволило выявить скрытую природу движения, в которой замаскированы правила подобия, столь ярко видные в случае чисто однородных полей. В работе [7] мы построили подкласс потенциалов типа (2), обладающих осевой симметрией вида

$$\varphi(r, z) = P(r, z) \ln r + Q(r, z), \quad (3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, z — цилиндрические координаты, а P, Q — однородные полиномы. Потенциалы (3) удовлетворяют осесимметричному уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Множитель P сам является гармонической функцией, как и $\ln r$, но функция $Q(r, z)$ заведомо не гармоническая и к ней можно "подмешивать" гармонический полином той же кратности n . Это свойство позволяет расширить класс (3). Он оказался чрезвычайно эффективен в поиске осесимметричных спектрографических сред с высоким качеством фокусировки полых конических пучков с осевой симметрией, но все-таки нужной свободы при постановке обратных задач механики здесь недостает, т. к. в составе потенциала отсутствуют свободные варьируемые функциональные элементы. Задача нашей работы сейчас состоит именно в том, чтобы ввести подобные элементы в общую структуру (2) с помощью все тех же потенциалов Донкина, которые так удачно вплелись в общую теорию однородных по Л. Эйлеру потенциалов [1].

Подчиним структуру (2) трехмерному уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

или в развернутой форме

$$\Delta P \cdot \ln R + 2 \nabla P \cdot \nabla \ln R + P \cdot \Delta \ln R + \Delta Q = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} j_1 + \frac{\partial}{\partial y} j_2 + \frac{\partial}{\partial z} j_3.$$

Подбирать (конструировать) тройки функций P, Q, R с учетом однородности, обращающие (6) в тождество слишком сложно, и это хочется упростить. Первый шаг в этом направлении состоит в обыгрывании условия Л. Эйлера (1) для однородных функций.

РЕДУКЦИЯ СТРУКТУР (2)

С помощью свойства (1), выбирая подходящий множитель k , нам выгодно привести однородную функцию $R(x, y, z)$ к трем типам представления:

$$R = z^m \cdot S\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right); \quad (7)$$

$$R = r^m \cdot S\left(\frac{x}{r}, \frac{z}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (8)$$

$$R = \rho^m \cdot S\left(\frac{x}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (9)$$

Подставим, например, R из (7) в (2) и преобразуем, получим

$$\varphi = P \cdot m \cdot \ln z + \left[P \ln S\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + Q \right] = P^* \ln z + Q^*. \quad (10)$$

Квадратная скобка, очевидно, — однородная функция n кратности как P, Q . Следовательно, форма (10) принадлежит тому же классу (2). Аналогичным образом, встраивая (8) и (9) в (2), можно получить родственные формулы. Опуская значок "*", запишем эти редуцированные к некому каноническому типу выражения для потенциалов (2), ничего не теряя в общности:

$$\varphi = P(x, y, z) \ln z + Q(x, y, z), \quad (11)$$

$$\varphi = P(x, y, z) \ln r + Q(x, y, z), \quad (12)$$

$$\varphi = P(x, y, z) \ln \rho + Q(x, y, z). \quad (13)$$

Математически в общем смысле все эти формы эквивалентны и лежат в классе (2), но конструктивно они разные, и каждая порождает свой подкласс спектрографических сред. Выбранный способ редукции, отнюдь, не единственный, и можно брать другие варианты функции R , кроме (7), (8), (9), но на данном этапе мы пока никаких явных преимуществ не усматриваем и потому ограничимся формулами (11), (12), (13). Поскольку типы функции R вполне конкретизировались, то на нашем усмотрении остались функции P, Q в уравнении (6). Одну из них мы вправе задать по своему усмотрению, тогда другая должна определяться из (6) как решение соответствующего уравнения Пуассона. Желание построить простой и эффективный метод синтеза искомых потенциалов приводит нас к очевидной мысли, что функцию $P(x, y, z)$ выгодно брать в классе гармонических функций

$$\Delta P = 0, \quad (14)$$

и тогда для $Q(x, y, z)$ образуется уравнение типа Пуассона

$$\Delta Q = -(2 \nabla P \cdot \nabla \ln R + P \cdot \Delta \ln R), \quad (15)$$

где в качестве R следует брать одну из функций: z ; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Общее решение

(15) должно состоять из частного решения неоднородного уравнения Пуассона и произвольной гармонической функции. Член $Q(x, y, z)$, особенно его негармоническую часть, удовлетворяющую неоднородному уравнению (15), для краткости и выразительности уместно назвать компенсатором, ибо он дополняет комбинацию $P \ln R$, уже нами выбранную (назначенную) до гармонической функции. Определение компенсатора $Q(x, y, z)$ с точностью до произвольной аддитивной добавки в виде гармонической функции $T(x, y, z)$ является большим благом для формирования spectroграфических сред с нужными электронно-оптическими свойствами

$$Q = Q_0(x, y, z) + T(x, y, z), \quad \Delta T(x, y, z) = 0. \quad (16)$$

Как в нашей статье [8] и здесь нам удобно взять в качестве стартового элемента P в виде комплексного потенциала Донкина [9]

$$\begin{aligned} P &= f(\omega), \\ \omega &= u + iv = \frac{x + iy}{z + \rho}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $f(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного аргумента ω . Формула (17) выражает все без исключения однородные потенциалы нулевой кратности, удовлетворяющие трехмерному уравнению Лапласа при любом выборе функции $f(\omega)$. Для начала возьмем вариант структуры (13) как наиболее простой для анализа и построим потенциал вида

$$\varphi = f(\omega) \ln \rho + Q(x, y, z), \quad (18)$$

найдем компенсатор Q с помощью уравнения (15):

$$\Delta Q = -(2\nabla f(\omega) \cdot \nabla \ln \rho + f(\omega) \cdot \Delta \ln \rho). \quad (19)$$

Правая часть здесь комплекснозначна, а следовательно, компенсатор Q также должен быть комплекснозначным, как и весь потенциал φ (18) в целом. Функция $f(\omega)$ распадается на две гармонические функции, однородные нулевой кратности

$$f(\omega) = f_1(x, y, z) + if_2(x, y, z). \quad (20)$$

Поверхности постоянного уровня здесь $f_1 = \text{const}, f_2 = \text{const}$ суть конусы с общей вершиной в начале координат, и, очевидно, они всегда

ортогональны сферам, но тогда ортогональны и их градиенты, так что

$$\nabla f(\omega) \cdot \nabla \ln \rho = \frac{\nabla f(\omega) \cdot \nabla \rho}{\rho} \equiv 0. \quad (21)$$

Простое вычисление $\Delta \ln \rho$ дает выражение

$$\Delta \ln \rho = \frac{1}{\rho^2}. \quad (22)$$

В результате уравнение для компенсатора Q (19) примет вид

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{-f(\omega)}{\rho^2}. \quad (23)$$

Чтобы найти в явной форме какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (23), нам придется ввести особые координаты, связанные с формулой (17). Для отличия от других систем координат их целесообразно назвать координатами Донкина, хотя они в электронной оптике нигде, кроме наших работ, не встречаются, а в классических книгах по математической физике мы находим в кратком изложении вариант сфероконических координат, образованных системой взаимно ортогональных конических поверхностей эллиптического сечения и сфер [10, 11]. При этом указывается в монографии [12], что в теоретической физике они применяются крайне редко. Что касается формулы (17) как источника общих сфероконических координат, то мы нашли только беглое упоминание в известном справочнике по теоретической физике Э. Маделунга [13], но, к сожалению, без малейшего раскрытия этой благодатной темы.

Между тем этот вопрос оказался столь интересным и полезным для нашей общей теории spectroграфов, что мы просто обязаны изложить его в достаточной мере подробно. Итак, вернемся к формулам (17) и (20). В зависимости от выбора функции $f(\omega)$ поверхности $f_1 = \text{const}, f_2 = \text{const}$ образуют систему взаимно ортогональных конусов самого разнообразного сечения. Функцию f можно подобрать так, что и классические сферические координаты и частный вариант сфероконических координат из [12] войдут в этот класс. Систему конусов дополняем сферами $\rho = \text{const}$. Простейший и в то же время наиболее прозрачный и эффективный вариант:

$$\begin{aligned} f &= \omega = u + iv, \\ u &= \frac{x}{z + \rho}, \quad v = \frac{y}{z + \rho}. \end{aligned} \quad (24)$$

К этим выражениям добавим третью координату

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \quad (25)$$

вместо простых сфер; λ — потенциал кулоновского центра и, следовательно, это гармоническая функция.

Вычислим лапласиан произвольной функции $\Phi(x, y, z)$, выражая его в координатах u, v, λ . Имеем:

$$\nabla \Phi = \Phi_u \nabla u + \Phi_v \nabla v + \Phi_\lambda \nabla \lambda, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = \nabla(\nabla \Phi) = & \Phi_{uu} (\nabla u)^2 + \Phi_{vv} (\nabla v)^2 + \Phi_{\lambda\lambda} (\nabla \lambda)^2 + \\ & + 2\Phi_{u\lambda} \nabla u \cdot \nabla \lambda + 2\Phi_{v\lambda} \nabla v \cdot \nabla \lambda + 2\Phi_{uv} \nabla u \cdot \nabla v + \\ & + \Phi_u \Delta u + \Phi_v \Delta v + \Phi_\lambda \Delta \lambda. \end{aligned} \quad (27)$$

Функции u, v, λ гармонические, и кроме того их градиенты взаимно ортогональны, поэтому

$$\begin{aligned} \nabla v \cdot \nabla \lambda = \nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla v & \equiv 0, \\ \Delta u = \Delta v = \Delta \lambda = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Вследствие этого выражение (27) принимает наиболее простой вид:

$$\Delta \Phi = \Phi_{uu} (\nabla u)^2 + \Phi_{vv} (\nabla v)^2 + \Phi_{\lambda\lambda} (\nabla \lambda)^2. \quad (29)$$

Вычисляя градиенты функций u, v, λ с помощью выражений (24), (25), получим

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 &= \frac{1}{(z + \rho)^2}, \\ |\nabla \lambda|^2 &= \frac{1}{\rho^4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Выражение (29) запишется теперь так:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{(z + \rho)^2} (\Phi_{uu} + \Phi_{vv}) + \frac{1}{\rho^4} \Phi_{\lambda\lambda}. \quad (31)$$

Остается выразить коэффициенты через новые координаты u, v, λ . Для этого запишем систему:

$$\begin{aligned} \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= u, \\ \frac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= v, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Система (32) вполне легко, но несколько длинно разрешается относительно x, y, z . Опуская эти выкладки, сразу же запишем результат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{u}{1 + u^2 + v^2}, \\ y &= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{v}{1 + u^2 + v^2}, \\ z &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

С помощью выражений (32), (33) преобразуем коэффициенты в (31) и после простых вычислений запишем окончательно

$$\Delta \Phi = \lambda^2 \left\{ \frac{(1 + u^2 + v^2)^2}{4} (\Phi_{uu} + \Phi_{vv}) + \lambda^2 \Phi_{\lambda\lambda} \right\}. \quad (34)$$

Кроме вещественных координат Донкина u, v имеет смысл ввести еще комплексные координаты Донкина

$$\begin{aligned} \omega = u + iv &= \frac{x + iy}{z + \rho}, \\ \varpi = u - iv &= \frac{x - iy}{z + \rho}. \end{aligned} \quad (35)$$

Производные по ω, ϖ выразим с помощью, т. н. операторов Г.К. Колосова [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \varpi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда двумерный оператор Лапласа выразится формулой

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega \partial \varpi}. \quad (37)$$

В переменных ω, ϖ, λ лапласиан (34) примет вид, особенно удобный для наших исследований:

$$\Delta \Phi = \lambda^2 \left\{ (1 + \omega \varpi)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega \partial \varpi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} \right\}. \quad (38)$$

Теперь настал момент вернуться к уравнению компенсатора (23). Подставляя Δ из (38) и выражая справа в (23) $\frac{1}{\rho^2} = \lambda^2$, мы получим равенство

$$\lambda^2 \left\{ (1 + \omega\varpi)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \omega \partial \varpi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} \right\} = -\lambda^2 f(\omega). \quad (39)$$

Общий множитель λ^2 сокращается, и для Q остается комплексное уравнение Пуассона с произвольной аналитической функцией $f(\omega)$ справа

$$(1 + \omega\varpi)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \omega \partial \varpi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} = -f(\omega). \quad (40)$$

Поскольку справа в (40) координаты λ нет, то резонно предположить, что искомое частное решение Q также не должно зависеть от λ , тогда следует положить

$$Q = Q(\omega, \varpi). \quad (41)$$

Для $Q(\omega, \varpi)$ образовалось легко интегрируемое уравнение

$$(1 + \omega\varpi)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \omega \partial \varpi} = -f(\omega). \quad (42)$$

Интегрируя его сначала по ϖ , потом по ω , после простых преобразований получим формулу для $Q(\omega, \varpi)$ общего вида

$$Q = -\varpi \int \frac{f(\omega) d\omega}{1 + \omega\varpi} + p(\omega) + g(\varpi), \quad (43)$$

где $p(\omega)$ и $g(\varpi)$ — произвольные аналитические функции комплексных аргументов ω, ϖ , т. е., по сути, свободные донкинские потенциалы. В дальнейшем они будут играть важную роль при решении задачи Коши для симметричных полей, а на данном этапе их можно опустить. Негармонический интегральный член в (43) — также однородный нулевой кратности, является главной частью компенсатора Q . В итоге мы можем записать формулу потенциала нулевой кратности из класса (13)

$$\varphi_0 = f(\omega) \ln \rho - \varpi \int \frac{f(\omega) d\omega}{1 + \omega\varpi}. \quad (44)$$

Он является порождающим элементом для множества потенциалов класса (13) с целочисленными кратностями

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (45)$$

ГЕНЕРАЦИЯ НОВЫХ РЕШЕНИЙ

Мы будем часто пользоваться следующей замечательной теоремой У. Томсона (лорда Кельвина) [15]:

на) [15]:

"Если в любом гармоническом потенциале $\Phi(x, y, z)$ преобразовать переменные по формулам

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (46)$$

и домножить его на множитель $\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$, то

получится новый гармонический потенциал $\Phi(X, Y, Z)$ в переменных X, Y, Z вида

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \times \Phi \left(\frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \frac{Z}{X^2 + Y^2 + Z^2} \right). \quad (47)$$

"

В геометрическом смысле преобразование координат (46) отвечает инверсии в единичном шаре, "выворачивающем" пространство x, y, z наизнанку, поскольку внешность единичного шара, включая бесконечно удаленную точку, переходит внутрь шара, а его внутренность, напротив, переходит во внешность шара, причем центр уходит на бесконечность. Инверсия (46) не меняет отношений

$$\frac{x}{z} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{Y}{Z}. \quad (48)$$

Поскольку все однородные функции нулевой кратности зависят только от отношений координат, то они также сохраняют свою аналитическую форму. Поэтому нет необходимости в дальнейшем менять обозначения x, y, z на X, Y, Z , достаточно

только изменить $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ на $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$. Сказанного достаточно, чтобы из основной функции φ_0 (44) при помощи преобразования Кельвина построить новый гармонический потенциал кратности (-1) вида

$$\varphi_{-1} = \frac{-1}{\rho} \left[f(\omega) \ln \rho + \varpi \int \frac{f(\omega) d\omega}{1 + \omega\varpi} \right]. \quad (49)$$

Как вполне очевидно, частные производные от произвольной гармонической функции $\Phi(x, y, z)$ любого порядка по x, y, z сами являются гармоническими функциями. Таким способом из потен-

циалов (44) и (49) можно образовать великое множество новых гармонических потенциалов. К сожалению, этот процесс уже через несколько шагов начинает так ветвиться, что мир этих функций становится практически необозримым и ценность их для теории спектрографов становится неуловимой. На самом деле нам нужны достаточно простые и математически прозрачные структуры. Их мы сможем получить, пользуясь только оператором $\frac{\partial}{\partial z}$. Запишем (49) в более удобной форме

$$\varphi_{-1} = \frac{-f(\omega) \ln \rho + Q(\omega, \varpi)}{\rho}. \quad (50)$$

С помощью выражений легко найти следующие величины, которые будут постоянно возникать в наших аналитических конструкциях:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{-\omega}{\rho}, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial z} = \frac{-\varpi}{\rho}, \quad \frac{z}{\rho} = \frac{1 - \omega \varpi}{1 + \omega \varpi}. \quad (51)$$

Дифференцируя (50) по z , с учетом формул (51) получим потенциал φ_{-2} кратности (-2) по формуле

$$\begin{aligned} \varphi_{-2} = & \frac{1}{\rho^2} \left[\omega f'(\omega) + f(\omega) \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} \right] \ln \rho - \\ & - \frac{1}{\rho^2} \left[f(\omega) \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} + Q \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} + Q_\omega \omega + Q_\omega \varpi \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Благодаря комплексным донкинским переменным ω, ϖ аналитические структуры довольно компактны. Но уже при разбиении полученных структур на вещественную и мнимую части количество новых гармонических структур удваивается, и, вот, они будут действительно очень громоздкими. Для генерации новых структур, помимо дифференцирования по координате, мы можем применять и преобразование Кельвина (47); из (52) образуем очень интересный физически содержательный потенциал кратности $(+1)$ с помощью преобразования Кельвина

$$\begin{aligned} \varphi_{+1} = & -\rho \left[\omega f'(\omega) + f(\omega) \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} \right] \ln \rho - \\ & - \rho \left[f(\omega) \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} + Q \frac{1 - \varpi \omega}{1 + \omega \varpi} + Q_\omega \omega + Q_\omega \varpi \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, мы проиллюстрировали общий аналитический алгоритм создания новых структур, но при конкретном выборе производящей $f(\omega)$ более выгодно делать реальные выкладки, начиная со структуры (44), и далее вычислять получаю-

щиеся новые структуры с учетом всех упрощений, которые будут возникать по ходу дела.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СТРУКТУР КЛАССА (2)

Теперь рассмотрим несколько конкретных примеров потенциальных структур данного класса трехмерных потенциалов (2). Если P и R определены, то необходимо найти функцию-компенсатор Q

$$Q(\omega, \varpi) = -\varpi \int \frac{f(\omega) d\omega}{1 + \omega \varpi}. \quad (54)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, этот интеграл берется в элементарных функциях только для $f(\omega)$ в виде конечных полиномов, либо отношения полиномов; иных вариантов, по-видимому, нет. Ограничимся только целыми степенями

$$f = \omega^n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

Из таких элементов складываются полиномы, и класс интегрируемых вариантов $f(\omega)$ становится достаточно богатым.

Пример 1. $f = \omega$.

$$Q = -\int \frac{\omega \varpi d\omega}{1 + \omega \varpi} = -\omega + \frac{1}{\varpi} \ln(1 + \omega \varpi). \quad (56)$$

Несущественную гармоническую составляющую ω можно отбросить, и полный потенциал по формуле (44) предстанет в виде

$$\varphi_0 = \omega \ln \rho + \frac{1}{\varpi} \ln(1 + \omega \varpi). \quad (57)$$

Пример 2. $f = \omega^2$.

$$Q = -\int \frac{\omega^2 \varpi d\omega}{1 + \omega \varpi} = \frac{\omega}{\varpi} - \frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{\varpi^2} \ln(1 + \omega \varpi). \quad (58)$$

И здесь, отбрасывая $\frac{\omega^2}{2}$, получим

$$\varphi_0 = \omega^2 \ln \rho + \frac{\omega}{\varpi} - \frac{1}{\varpi^2} \ln(1 + \omega \varpi). \quad (59)$$

Пример 3. $f = \omega^3$.

$$Q = -\int \frac{\omega^3 \varpi d\omega}{1 + \omega \varpi} = -\frac{\omega}{\varpi^2} + \frac{\omega^2}{2\varpi} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{1}{\varpi^3} \ln(1 + \omega \varpi). \quad (60)$$

Снова игнорируя гармонический член $\left(\frac{-\omega^3}{3} \right)$,

получим потенциал

$$\varphi_0 = \omega^3 \ln \rho - \frac{\omega}{\varpi^2} + \frac{\omega^2}{2\varpi} + \frac{1}{\varpi^3} \ln(1 + \omega\varpi). \quad (61)$$

С ростом n число членов растет, но не слишком быстро, при этом в структуре выражения потенциала наблюдается некое единообразие. Каждый из этих потенциалов служит зародышем для целой цепочки потенциалов с отрицательными и положительными кратностями. Размножение этих конкретных структур происходит чрезвычайно быстро, и всех их обозреть практически невозможно. Ограничимся самыми лаконичными иллюстрирующими примерами.

Подвергнем преобразованию Кельвина потенциал (57)

$$\varphi_{-1} = \frac{-\omega \ln \rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\varpi} \ln(1 + \omega\varpi) \right]. \quad (62)$$

Воспользуемся далее формулой (52) и построим потенциал кратности (-2) . Даже в этом простейшем случае последовательность формул неожиданно оказывается весьма нетривиальной. Опуская алгебраические выкладки, запишем окончательный результат

$$\varphi_{-2} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\omega}{1 + \omega\varpi} \{2 \ln \rho - 3 + \omega\varpi + 2 \ln(1 + \omega\varpi)\}. \quad (63)$$

Это выражение можно снова продифференцировать по z и получить потенциал кратности (-3) и так далее. Преобразованием Кельвина потенциал (63) можно превратить в потенциал кратности $(+1)$:

$$\varphi_{+1} = \rho \cdot \frac{\omega}{1 + \omega\varpi} \{-2 \ln \rho - 3 + \omega\varpi + 2 \ln(1 + \omega\varpi)\}. \quad (64)$$

Чтобы понять физическую природу этих потенциалов, перейдем от абстрактных донкинских координат ω, ϖ к обычным декартовым. Пользуясь формулой

$$1 + \omega\varpi = 1 + \frac{x^2 + y^2}{(z + \rho)^2} = \frac{2\rho}{z + \rho}, \quad (65)$$

получим

$$\varphi_{-2} = \frac{-1}{\rho^2} \cdot \frac{x + iy}{\rho} \left\{ \ln \rho - 2 + \frac{\rho}{z + \rho} + \ln \frac{2\rho}{z + \rho} \right\}. \quad (66)$$

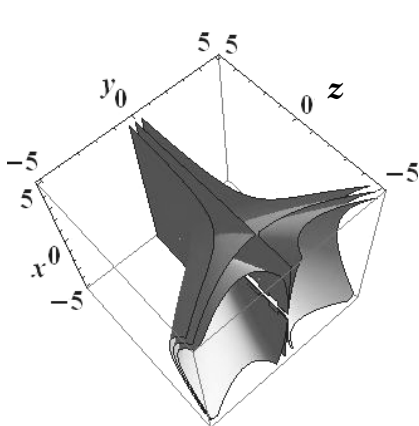


Рис. 1. Эквипотенциальные поверхности структуры

$$\varphi_{+1} = y \ln(z + \rho) + \frac{yz}{z + \rho}.$$

$$\varphi_{+1} = C = \text{const} = -1, 0, 1$$

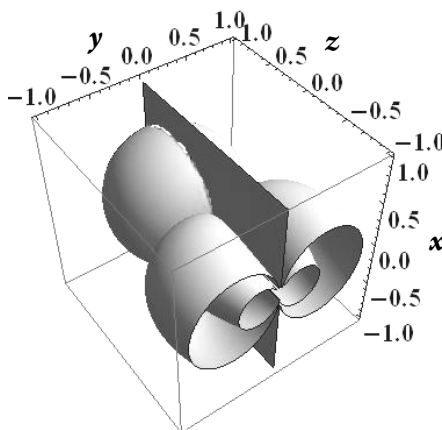


Рис. 2. Эквипотенциальные поверхности структуры

$$\varphi_{-2} = \frac{-y}{\rho^2} \left\{ 2 \ln \rho + \frac{\rho}{z + \rho} - \ln(z + \rho) \right\}.$$

$$\varphi_{-2} = C = \text{const} = -5, -2, 0, 2, 5$$

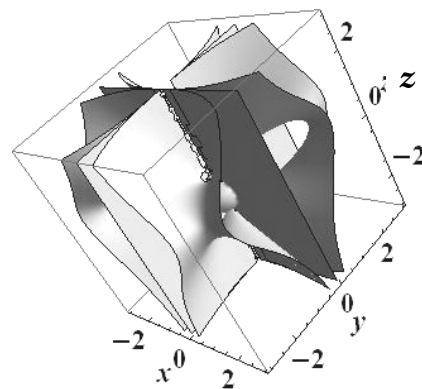


Рис. 3. Эквипотенциальные поверхности структуры

$$\varphi_0 = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \times$$

$$\times \left\{ (z + \rho)^2 \ln(z + \rho) - 4z\rho \ln \rho \right\} +$$

$$+ \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$\varphi_0 = C = \text{const} = -2, 0, 2$$

Преобразуем (66) по Кельвину, тогда получится выражение

$$\begin{aligned}\varphi_{+1} &= (x+iy) \left\{ \ln \frac{1}{\rho} - 2 + \frac{\rho}{z+\rho} + \ln \frac{2\rho}{z+\rho} \right\} = \\ &= (x+iy) \times \\ &\times \left\{ -\ln \rho - 2 + \frac{\rho+z-z}{z+\rho} + \ln 2 + \ln \rho - \ln(z+\rho) \right\} = \\ &= (x+iy) \left\{ (\ln 2 - 1) - \frac{z}{z+\rho} - \ln(z+\rho) \right\}. \quad (67)\end{aligned}$$

Отбрасывая тривиальный двумерный гармонический член $(x+iy)(\ln 2 - 1)$ и меняя знак, мы напишем, отнюдь, нетривиальный обобщенно-однородный гармонический потенциал с кратностью (+1) вида

$$\varphi_{+1} = (x+iy) \ln(z+\rho) + \frac{z(x+iy)}{z+\rho}. \quad (68)$$

На рис. 1–3 представлены эквипотенциальные поверхности потенциальных структур изучаемого класса с разной кратностью.

ВЫВОДЫ

Подведем итоги. С помощью комплексных потенциалов Донкина мы можем строить огромное многообразие обобщенно-однородных гармонических потенциалов с целочисленными кратностями и затем изучать их с той или иной степенью подробности либо чисто аналитическими способами, либо компьютерным моделированием, но лучше комбинацией того и другого. Меняя $f(\omega)$ только в классе полиномов и отношения полиномов, мы образуем очень пестрый и богатый мир спектрографических сред с неограниченными возможностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
2. Кельман В.М., Явор С.Я. Электронная оптика. Л.: Наука, 1968. 487 с.

3. Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // ЖТФ. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
4. Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // ЖТФ. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
5. Левин В.И., Гросберг Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М., Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1951. 576 с.
6. Read F.H. The parallel cylindrical mirror electron energy analyzer // Rev. Sci. Instrum. 2002. V. 73, N 3. P. 1129–1139.
7. Голиков Ю.К., Григорьев Д.В., Соловьев К.В., Уткин К.Г. Новый базисный ряд осесимметричных гармонических потенциалов для синтеза энергоанализаторов // Тез. докл. 4 Всерос. сем. "Проблемы теоретической и прикладной электронной и ионной оптики". Москва, 1999. С. 11–12.
8. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Электрические поля, однородные по Л. Эйлеру, для электронной спектрографии // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.
9. Уиттекер Э., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. В 2 т. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
10. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2 т. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 930 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1968. 720 с.
12. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
13. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 618 с.
14. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 409 с.
15. Томсон У., Тэт П. Трактат по натуральной философии. Ч. II. М., Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 592 с.

**Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет**

Контакты: Краснова Надежда Константиновна,
n.k.krasnova@mail.ru

Материал поступил в редакцию 10.01.2014

ANALYTICAL STRUCTURES OF ELECTRIC SPECTROGRAPHS THE FIELDS OF WHICH ARE EXPRESSED IN A UNIFORM GENERALIZED FORM

Ю. К. Golikov, N. K. Krasnova

Saint-Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, RF

In the article an analytical representation of the fields for electric spectrographs expressed in an uniform generalized form is developed. The potentials of such fields are of Laplace's type and presented as $\varphi(x, y, z) = P(x, y, z) \ln R(x, y, z) + Q(x, y, z)$, where P, Q, R — are uniform functions in Euler's sense with an integer multiplicity. It is built an accurate algorithm to synthesize such potential structures exploiting a complex Donkin's potential of null multiplicity. In these constructions one can use any function of complex variables. Some surfaces of equal potential of these fields are demonstrated and analyze. The different variants to use in electron spectroscopy are discussed.

Keywords: uniform generalized in Euler's sense functions, electric spectrograph, electron spectroscopy, complex Donkin's potential, spherical conical coordinates

REFERENCES

1. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. Obobshchennyy printsip podobiya i yego primeneniye v elektronnoy spektrografii // Prikladnaya fizika. 2007. № 2. S. 5–11. (in Russian).
2. Kelman V.M., Yavor S.Ya. Elektronnaya optika. L.: Nauka, 1968. 487 s. (in Russian).
3. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. Primeniye formuly Donkina v teorii energoanalizatorov. I // ZhTF. 2000. T. 70, № 2. S. 91–94. (in Russian).
4. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. Primeniye formuly Donkina v teorii energoanalizatorov. II // ZhTF. 2000. T. 70, № 3. S. 44–47. (in Russian).
5. Levin V.I., Grosberg Yu.I. Differentsialnyye uravneniya matematicheskoy fiziki. M., L.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1951. 576 s. (in Russian).
6. Read F.H. The parallel cylindrical mirror electron energy analyzer // Rev. Sci. Instrum. 2002. V. 73, N 3. P. 1129–1139.
7. Golikov Yu.K., Grigoryev D.V., Solovyev K.V., Utkin K.G. Novyy bazisnyy ryad osesimmetrichnykh harmonicheskikh potentsialov dlya sinteza energo-analizatorov // Tez. dokl. 4 Vseros. sem. "Problemy teoreticheskoy i prikladnoy elektronnoy i ionnoy optiki". Moskva, 1999. C. 11–12. (in Russian).
8. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. Elektricheskiye polya, odnorodnyye po L. Eyleru, dlya elektronnoy spektrografii // ZhTF. 2011. T. 81, № 2. S. 9–15. (in Russian).
9. Uitteker E., Watson Dzh.N. Kurs sovremennogo analiza. (2 t). T. 2. M.: Fizmatgiz, 1963. 516 s. (in Russian).
10. Mors F.M., Feshbakh G. Metody teoreticheskoy fiziki. (2 t). T. 1. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1958. 930 s. (in Russian).
11. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1968. 720 s. (in Russian).
12. Arfken G. Matematicheskiye metody v fizike. M.: Atomizdat, 1970. 712 s. (in Russian).
13. Madelung E. Matematicheskii apparat fiziki. M.: Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1960. 618 s. (in Russian).
14. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. Teoriya sinteza elektrosticheskikh energoanalizatorov. SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2010. 409 s. (in Russian).
15. Tomson U., Tet P. Traktat po naturalnoy filosofii. Ch. II. M., Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khao-ticheskaya dinamika", Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy, 2010. 592 s. (in Russian).