
**РАБОТЫ ШКОЛЫ ПРОФ. Ю.К. ГОЛИКОВА:
РАБОТЫ С НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ УЧАСТИЕМ Ю.К. ГОЛИКОВА**

УДК 537.21

© **Ю. К. Голиков, И. А. Аверин**

НОВЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В КОРПУСКУЛЯРНОЙ ОПТИКЕ

В этой статье исследуется трехмерное уравнение Лапласа. Используя такие нетрадиционные приемы, как круговые переменные и аддитивно-мультипликативное разделение переменных, удастся отыскать новые и физически необычные решения.

Кл. сл.: лапласовы поля, разделение переменных, комплексные переменные, круговые координаты

ВВЕДЕНИЕ

Нас интересуют поля и траектории, которые выражаются аналитическим образом. Если в двумерном случае [1] и в случае потенциала, квадратичного по одной из координат [2], задача решена, то для трехмерных полей и траекторий она остается открытой. Один из самых эффективных способов — решить уравнение Гамильтона—Якоби [3, 4]. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что, решив это уравнение (зачастую с помощью наложения дополнительных условий на входящий в его состав потенциал), получим так называемый полный интеграл, с помощью которого выражается геометрия траектории в пространстве и ее кинематика, т. е. связь со временем. В данной статье будет рассмотрена предварительная часть этой задачи, состоящая в поиске гармонических потенциалов, удовлетворяющих трехмерному уравнению Лапласа.

Движение заряженной частицы в пространстве под действием электростатического поля с потенциалом $\varphi(x, y, z)$ описывается уравнением Гамильтона—Якоби относительно укороченного действия S ([4], гл. 7) в безразмерных переменных ([5], гл. 1):

$$\frac{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}{2} = h - \varphi(x, y, z), \quad (1)$$

где h — полная энергия системы. При этом потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi(x, y, z) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (2)$$

Поиск решения (1) будем осуществлять разделением переменных по следующим причинам.

1) Последовательное исследование двумерных решений методом разделения переменных прове-

дено в докторской диссертации Ю.К. Голикова [1].

2) В настоящий момент все известные аналитические решения так или иначе сводятся к решению уравнения Гамильтона—Якоби разделением переменных в той или иной криволинейной системе координат [6].

В частности, методом разделения переменных в подходящей системе координат в данной статье будет осуществлен поиск аналитических решений уравнения (2).

КРУГОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Итак, аналитические решения уравнения (2), которые можно получить разделением переменных в декартовых координатах, хорошо известны и приводятся в [7]. Для поиска других решений приходится использовать удобные криволинейные координаты. Воспользуемся так называемыми круговыми переменными, предложенными в свое время Ю.К. Голиковым и ранее не использовавшимися:

$$\begin{cases} \alpha = x + iy, \\ \beta = y + iz, \\ \gamma = z + ix. \end{cases} \quad (3)$$

Тонким моментом при использовании замены переменных (3) является переход от вещественных переменных (x, y, z) к комплексным переменным (α, β, γ) . Мы не будем специально останавливаться на обосновании этого тонкого момента, а просто будем по умолчанию предполагать, что все алгебраические операции с символами переменных (x, y, z) и (α, β, γ) сохраняют свою силу на многомерном комплексном пространстве. Соответствующий формализм аналитического продолжения функции многих вещественных переменных

на комплексное пространство изложен в [8].

Допустим, у нас есть функция $f(x, y, z)$, декартовы координаты связаны с круговыми соотношениями (3). Тогда производные от декартовых координат в новых переменных выразятся, как

$$\begin{aligned}f_x &= f_\alpha + if_\gamma, \\f_y &= f_\beta + if_\alpha, \\f_z &= f_\gamma + if_\beta.\end{aligned}$$

С помощью этих переменных запишем квадрат градиента и лапласиан:

$$\begin{aligned}f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 &= 2i(f_\alpha f_\beta + f_\beta f_\gamma + f_\gamma f_\alpha), \\ \Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 2i(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}).\end{aligned}$$

Тогда на основании полученных выражений уравнение Гамильтона—Якоби (1) и уравнение Лапласа (2) в новых переменных примут следующий вид:

$$i(S_\alpha S_\beta + S_\beta S_\gamma + S_\gamma S_\alpha) = h - \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \quad (4)$$

$$\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha} = 0. \quad (5)$$

Теперь приступим к решению уравнения (5).

АДДИТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Ищем потенциал в виде, объединяющем в себе достоинства аддитивного и мультипликативного разделения переменных:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha, \beta, \gamma) &= A_1(\alpha) \cdot B_1(\beta) \cdot C_1(\gamma) + \\ &+ A_2(\alpha) \cdot B_2(\beta) \cdot C_2(\gamma).\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ — неизвестные пока функции. Подставим (6) в (5). Тогда получим выражение, содержащее шесть неизвестных функций и их первые производные:

$$\begin{aligned}A'_1 B'_1 C_1 + A'_2 B'_2 C_2 + A_1 B'_1 C'_1 + \\ + A_2 B'_2 C'_2 + A'_1 B_1 C'_1 + A'_2 B_2 C'_2 = 0.\end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, функционально-дифференциальное уравнение свелось к билинейной форме. Анализ критериев совместности соотношения (7) с помощью дифференциальных операторов по схеме, обычно используемой в методе разделения переменных, утомителен, трудоемок и крайне неэкономичен. Однако это затруднение можно просто обойти с помощью следующих простых геометрических соображений. Соотношение (7) при фиксированных значениях α и β выражает тот факт, что функции $C_1(\gamma), C_2(\gamma), C'_1(\gamma)$ и $C'_2(\gamma)$ являются ли-

нейно зависимыми. В случае существования только одной обращающейся в ноль линейной комбинации этих функций с постоянными коэффициентами отдельный анализ показывает, что решение (7) сводится либо к экспоненте, либо к сумме трех билинейных функций (разбор данного частного случая выходит за рамки этой статьи). Если же существуют хотя бы две линейно независимые комбинации функций $C_1(\gamma), C_2(\gamma), C'_1(\gamma)$ и $C'_2(\gamma)$, то за исключением частных вырожденных случаев их можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} C'_1 = a_1 C_1 + b_1 C_2, \\ C'_2 = a_2 C_1 + b_2 C_2, \end{cases} \quad (8)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные комплексные числа. Те же соображения, естественно, применимы и к функциям $A_1(\alpha), A_2(\alpha), A'_1(\alpha)$ и $A'_2(\alpha)$ и $B_1(\beta), B_2(\beta), B'_1(\beta)$ и $B'_2(\beta)$. Фактически этот прием основывается на одной практически не используемой задаче из теории линейных векторных пространств о разбиении $2n$ -мерного векторного (в данном случае евклидова) пространства на два взаимно ортогональных подпространства размерности n .

Условие (8) позволит нам выделить две функции C_1 и C_2 , перед каждой из которых будет коэффициент, состоящий из комбинации остальных четырех функций, их первых производных и указанных выше параметров. Равенство нулю подобного выражения может быть обеспечено только равенством нулю каждого из коэффициентов. Тогда мы имеем два уравнения, в которых вместо двух из шести неизвестных функций и их первых производных присутствуют четыре произвольных комплексных числа. Аналогично поступаем с функциями B_1, B_2 (появляется набор произвольных комплексных чисел e_1, e_2, d_1, d_2):

$$\begin{cases} B'_1 = e_1 B_1 + d_1 B_2, \\ B'_2 = e_2 B_1 + d_2 B_2. \end{cases} \quad (9)$$

В результате получаем вид оставшихся двух функций и условие на произвольные комплексные числа, играющие роль параметров:

$$\begin{cases} A_1 = f_1 e^{-a_1 \alpha}, \\ A_2 = f_2 e^{-b_2 \alpha}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} a_1 = e_1, \\ b_2 = d_2, \\ a_1^2 b_2^2 = b_1 d_1 a_2 e_2. \end{cases} \quad (11)$$

Применив к (8) и (9) метод, описанный в [9], мы получим следующий результат:

$$\begin{cases} B_1 = h_{11}e^{k_1\beta} + h_{12}e^{k_2\beta}, \\ B_2 = h_{21}e^{k_1\beta} + h_{22}e^{k_2\beta}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где } k_{1(2)} = \frac{(e_1 + d_2) \pm \sqrt{(e_1 + d_2)^2 - 4(e_1d_2 - e_2d_1)}}{2};$$

$$\begin{cases} C_1 = m_{11}e^{l_1\gamma} + m_{12}e^{l_2\gamma}, \\ C_2 = m_{21}e^{l_1\gamma} + m_{22}e^{l_2\gamma}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } l_{1(2)} = \frac{(a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)}}{2}.$$

Рассмотрим частный случай. Положим, что коэффициенты в (11) принимают следующие значения: $a_1 = e_1 = b_1 = -a_2 = 1$, $b_2 = d_2 = d_1 = -e_2 = -1$. Подставив (10), (12), (13) в (6) и учтя (3) вместе со значениями параметров, мы найдем искомый потенциал:

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 =$$

$$= (g_1(y + iz) - g_1(z + ix) + g_{10})e^{-x-iy} + \\ + (g_2(y + iz) - g_2(z + ix) + g_{20})e^{x+iy};$$

$$\varphi_1 = e^{-x} \times$$

$$\times [(g_1(y - z) + g_{10})\cos y + g_1(z - x)\sin y] + \quad (14)$$

$$+ e^x [(g_2(y - z) + g_{20})\cos y - g_2(z - x)\sin y];$$

$$\varphi_2 = e^{-x} \times$$

$$\times [g_1(z - x)\cos y - (g_1(y - z) + g_{10})\sin y] +$$

$$+ e^x [g_2(z - x)\cos y + (g_2(y - z) + g_{20})\sin y].$$

Решение представляет собой сумму двух слагаемых, имеющих линейно-экспоненциальную структуру. Обратим внимание на то, что каждое из выделенных нами двух слагаемых в φ_1 и φ_2 удовлетворяет уравнению Лапласа, также как и сумма.

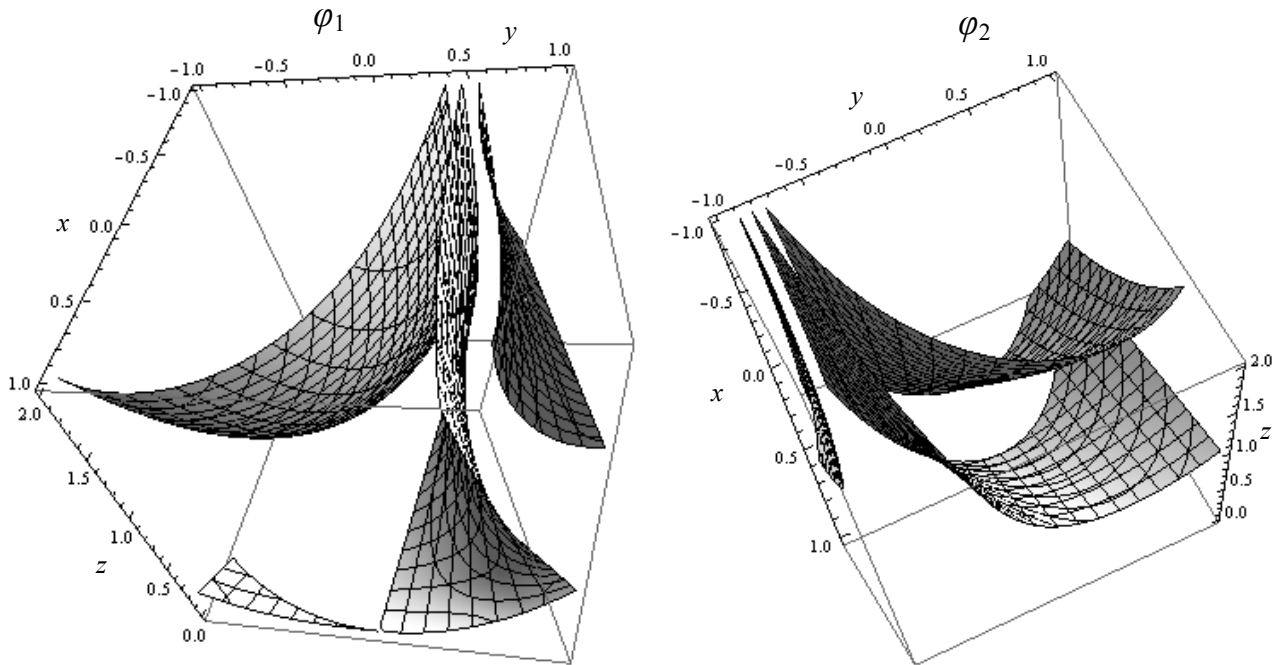


Рис. 1. $\varphi_1 = e^{-x}((y - z)\cos y + (z - x)\sin y)$, $\varphi_2 = e^{-x}((z - x)\cos y - (y - z)\sin y)$

Рассмотрим теперь полученное нами выражение в четырех крайних случаях.

1-й случай: $g_1 = 1, g_2 = g_{10} = g_{20} = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-x}((y-z)\cos y + (z-x)\sin y), \\ \varphi_2 &= e^{-x}((z-x)\cos y - (y-z)\sin y).\end{aligned}\quad (14a)$$

Эквипотенциальный портрет представлен на рис. 1.

2-й случай: $g_2 = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^x((y-z)\cos y - (z-x)\sin y), \\ \varphi_2 &= e^x((z-x)\cos y + (y-z)\sin y).\end{aligned}\quad (14б)$$

Рис. 2 иллюстрирует эквипотенциальные портреты.

3-й случай: $g_{10} = 1, g_1 = g_2 = g_{20} = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-x} \cos y, \\ \varphi_2 &= -e^{-x} \sin y.\end{aligned}\quad (14в)$$

На рис. 3 проиллюстрированы эквипотенциальные портреты.

4-й случай: $g_{20} = 1, g_1 = g_{10} = g_2 = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^x \cos y, \\ \varphi_2 &= e^x \sin y.\end{aligned}\quad (14г)$$

Эквипотенциальные портреты отображены на рис. 4.

Следует отметить, что решения (14) сами по себе могут являться источником новых решений. Так, используя линейную комбинацию

$$\frac{1}{2}(\varphi(x, y, z) + \varphi(-x, y, z)),$$

мы получим решение уравнения Лапласа (2), у которого плоскость $x = 0$ будет плоскостью симметрии. Однако легко заметить, что в переменных α, β, γ такие решения уже не будут иметь вид аддитивно-мультипликативного разделения переменных (6).

СВЯЗЬ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РЕШЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Переход к комплексным переменным и комплекснозначным функциям позволяет установить связь между аналитическим решением уравнения Лапласа и частными решениями волнового уравнения.

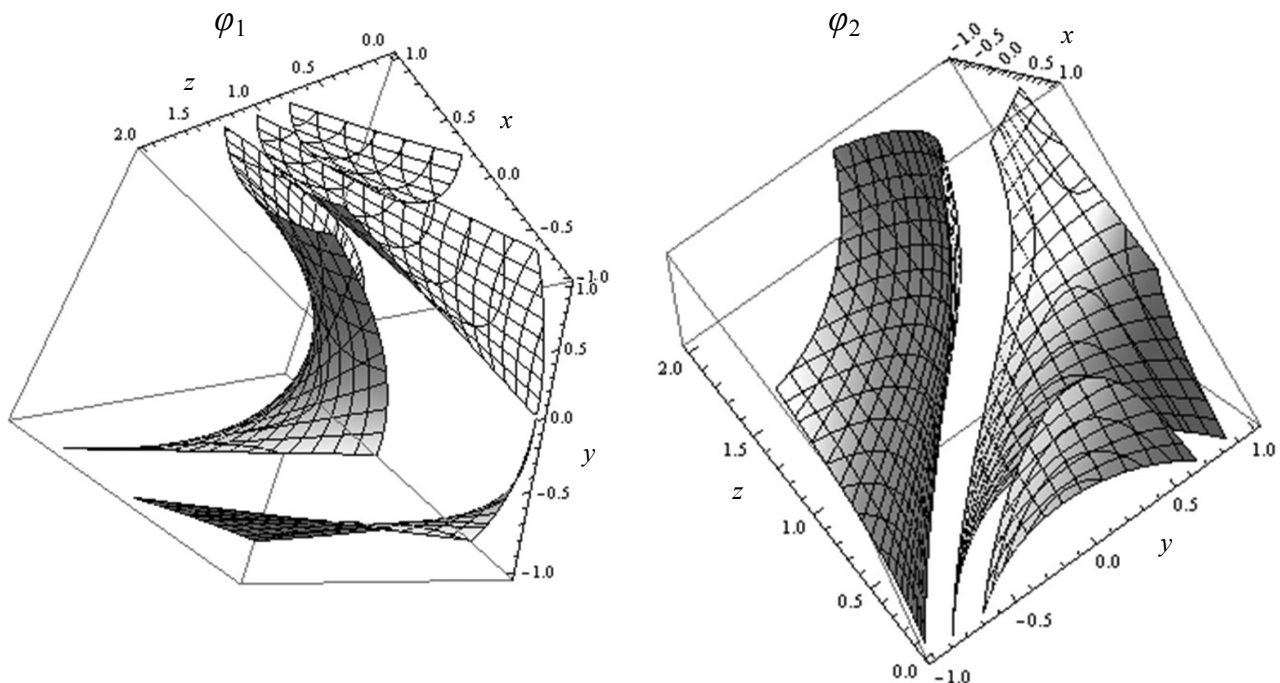


Рис. 2. $\varphi_1 = e^x((y-z)\cos y - (z-x)\sin y), \quad \varphi_2 = e^x((z-x)\cos y + (y-z)\sin y)$

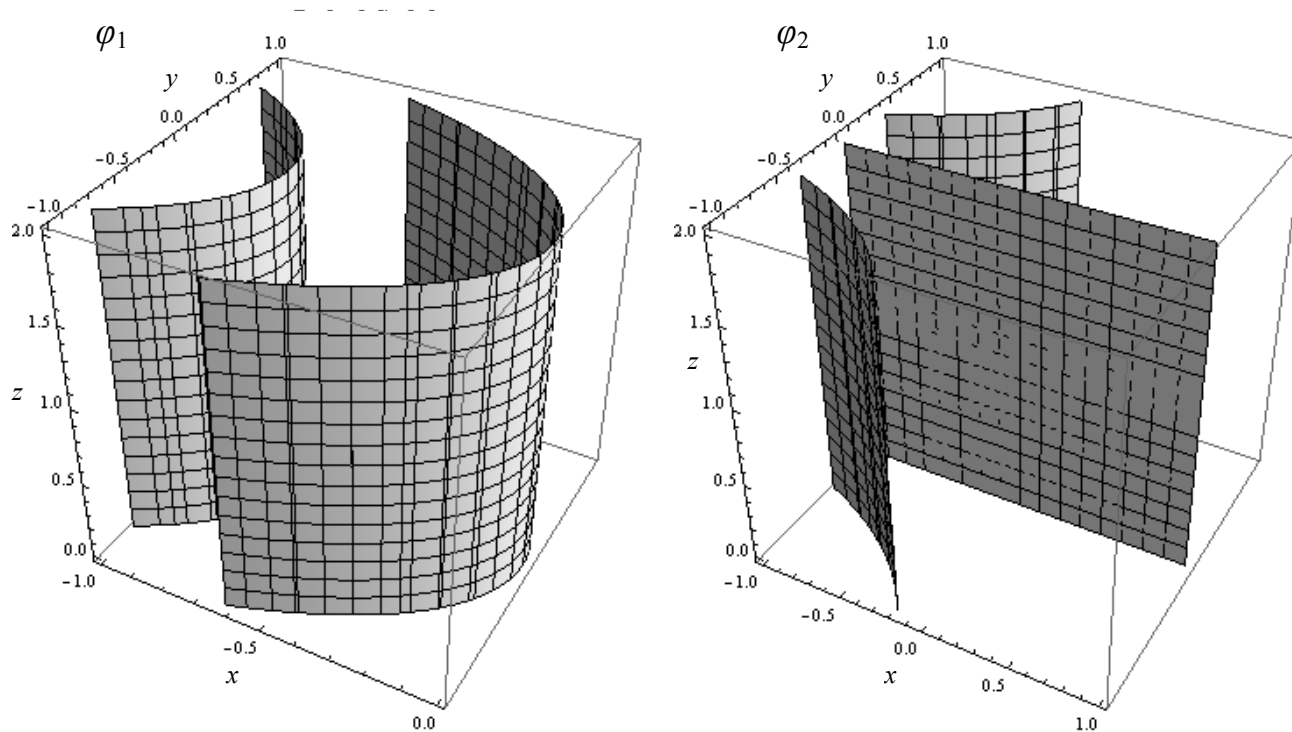


Рис. 3. $\varphi_1 = e^{-x} \cos y$, $\varphi_2 = -e^{-x} \sin y$

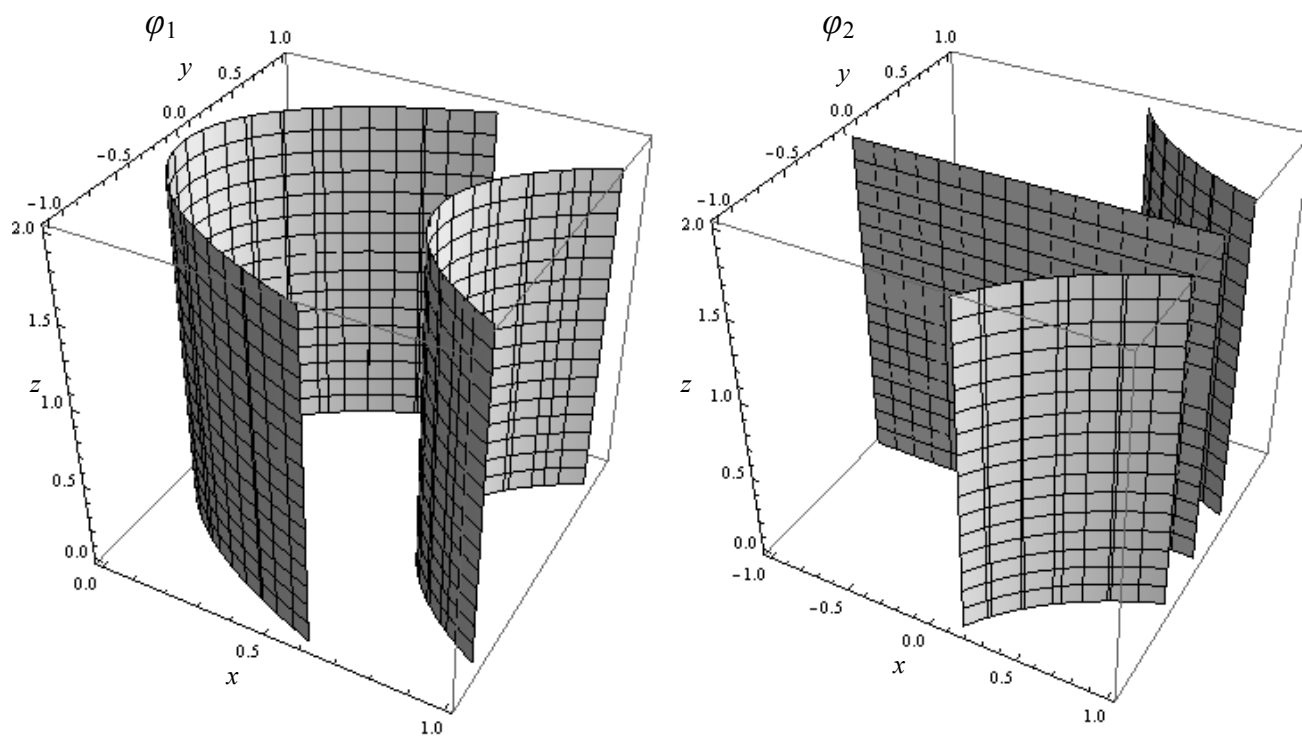


Рис. 4. $\varphi_1 = e^x \cos y$, $\varphi_2 = e^x \sin y$

Если в трехмерном уравнении Лапласа одну из декартовых координат, например z , заменить мнимой переменной времени ikt , то оно превратится в двумерное по координатам x, y волновое уравнение. Следовательно, любое трехмерное решение мы можем превратить в соответствующее

волновое решение. Для аддитивно-мультипликативного разделения переменных, которое мы использовали выше, получим новый и физически необычный результат — решение волнового уравнения, отличное от классической суперпозиции синусоидальных гармоник:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1 + i\psi_2 = (g_1(y - kt) - ig_1(kt + x) + g_{10})e^{-x-iy} + (g_2(y - kt) - ig_2(kt + x) + g_{20})e^{x+iy}, \\ \psi_1 &= e^{-x}[(g_1(y - kt) + g_{10})\cos y - g_1(kt + x)\sin y] + e^x[(g_2(y - kt) + g_{20})\cos y + g_2(kt + x)\sin y], \\ \psi_2 &= -e^{-x}[g_1(kt + x)\cos y + (g_1(y - kt) + g_{10})\sin y] - e^x[g_2(kt + x)\cos y - (g_2(y - kt) + g_{20})\sin y]; \\ \psi &= \psi_1 + i\psi_2 = (g_1(y + iz) - g_1(z - kt) + g_{10})e^{-i(kt+y)} + (g_2(y + iz) - g_2(z - kt) + g_{20})e^{i(kt+y)}, \\ \psi_1 &= [(g_1(y - z + kt) + g_{10})\cos(kt + y) + g_1z\sin(kt + y)] + [(g_2(y - z + kt) + g_{20})\cos(kt + y) - g_2z\sin(kt + y)], \\ \psi_2 &= [g_1z\cos(kt + y) - (g_1(y - z + kt) + g_{10})\sin(kt + y)] + [g_2z\cos(kt + y) + (g_2(y - z + kt) + g_{20})\sin(kt + y)].\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь после отделения действительной и мнимой частей получаем решение, представляющее собой сумму двух слагаемых, имеющих линейно-экспоненциальную структуру. Обратим внимание на то, что каждое из выделенных нами двух слагаемых ψ_1 и ψ_2 удовлетворяет волновому уравнению и имеет ту же структуру, что и их сумма ψ . А значит, и действительная, и мнимая части представляют собой каждая сумму двух слагаемых. Отметим также, что эти слагаемые, состоящие из периодических по координатам структур и членов, изображающих бегущую неоднородную волну, распадаются на сумму двух функций, каждая из которых по отдельности не является решением уравнения. Акцентируем внимание на частном случае, при котором $g_2 = 1, k = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0$. В рассмотренном ранее уравнении Лапласа этому соответствует вариант 2 с проведенной заменой $z = it$ или $x = it$. Эквипотенциальные портреты представлены в Приложении на рис. П1–П4 соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, следует отметить, что нам удалось найти искомые потенциалы с помощью комплексного анализа. Особенный интерес представляет выявленная связь между аналитическим решением уравнения Лапласа (14) и частными решениями волнового уравнения (15). Дальнейшее решение поставленной задачи (поиск семейств траекторий в найденных полях) и более глубокий анализ полученных результатов, равно как и ис-

следование возможности их применения вне рамок статической корпускулярной оптики, является целью последующих работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голиков Ю.К. Определение электростатических полей по заданным характеристикам движения заряженных и дипольных частиц. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Л.: ЛПИ, 1985. 254 с.
2. Голиков Ю.К., Соловьев К.В. Электростатические ионные ловушки. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 152 с.
3. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. Издательский дом "Удмуртский университет", 1999. 587 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Механика. Изд-во "Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры", 1988. 214 с.
5. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 409 с.
6. Цыганов А.В. Интегрируемые системы в методе разделения переменных. Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 384 с.
7. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 578 с.
8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Изд-во "Лань", 1969. 576 с.
9. Гурса Э. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2, ч. 2. М.-Л.: ГТТИ, 1933. 287 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

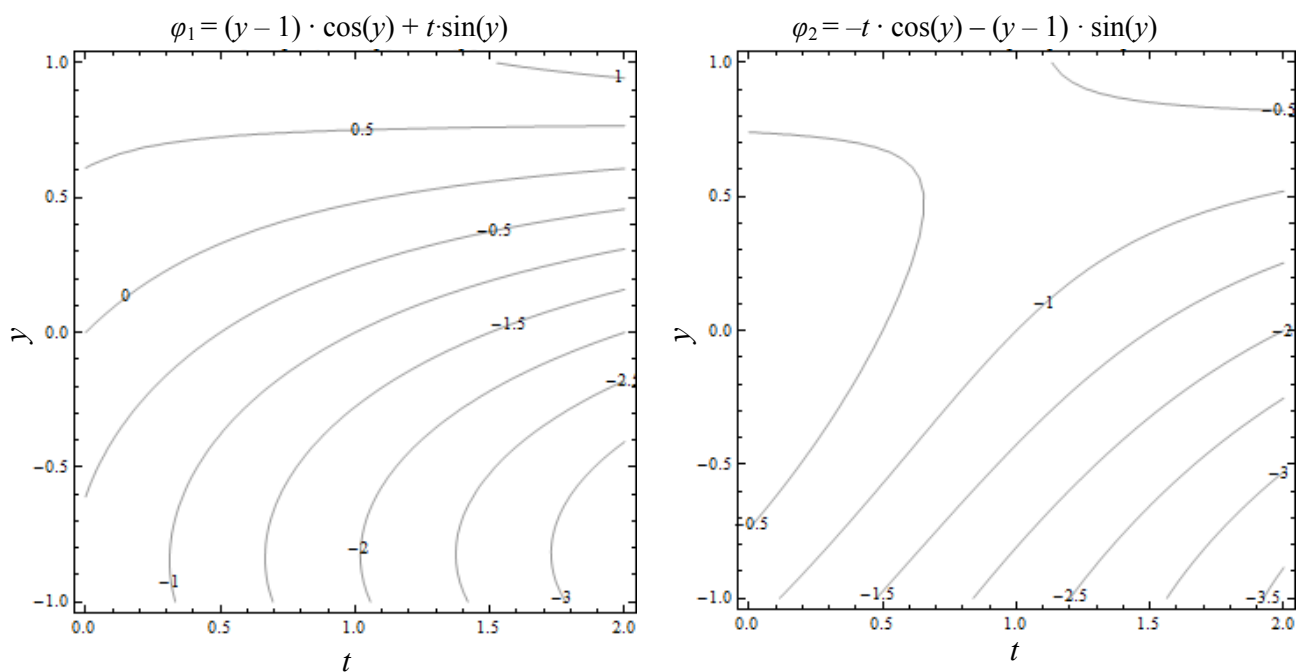


Рис. П1. Экипотенциальные портреты.
 $g_2 = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0, z = it$ при $x = 0$

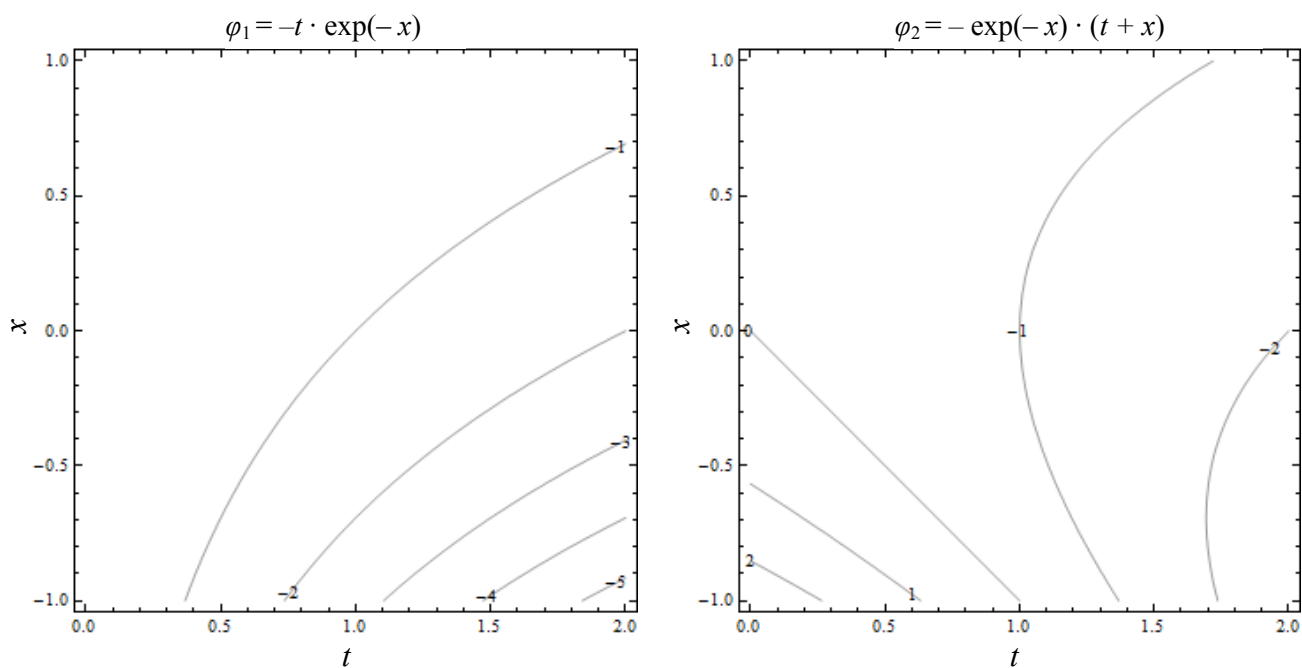


Рис. П2. Экипотенциальные портреты.
 $g_2 = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0, z = it$ при $y = 0$

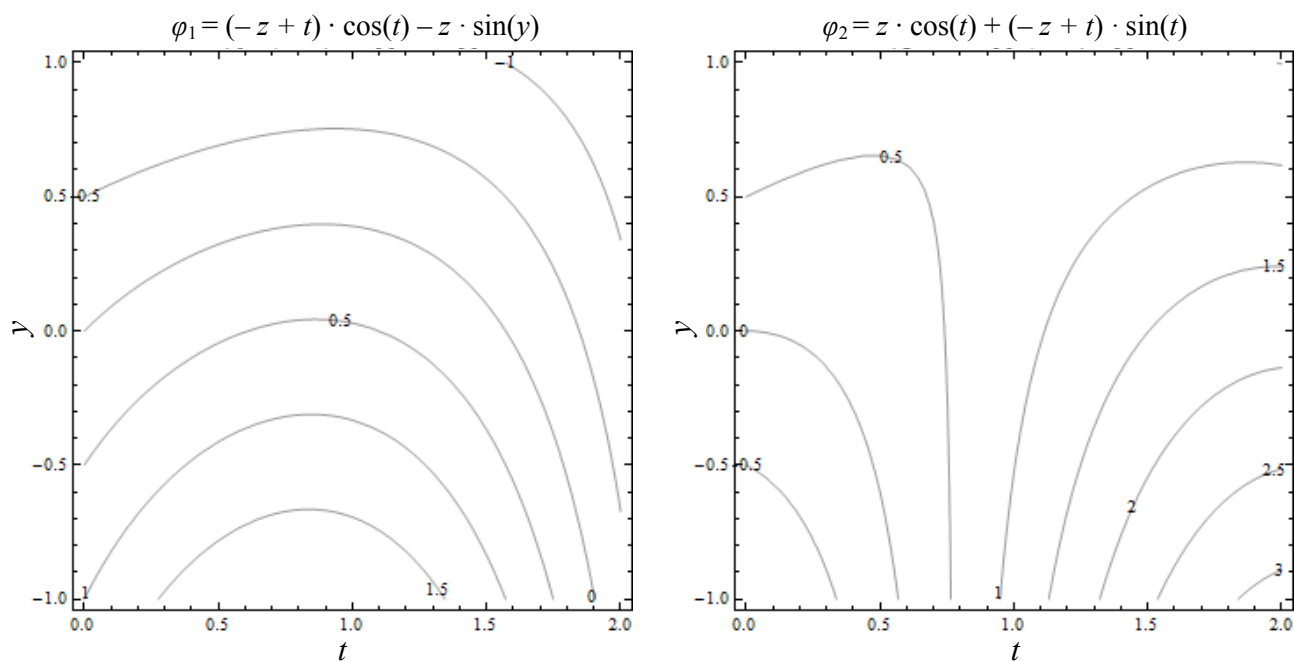


Рис. ПЗ. Экипотенциальные портреты.
 $g_2 = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0, x = it$ при $y = 0$

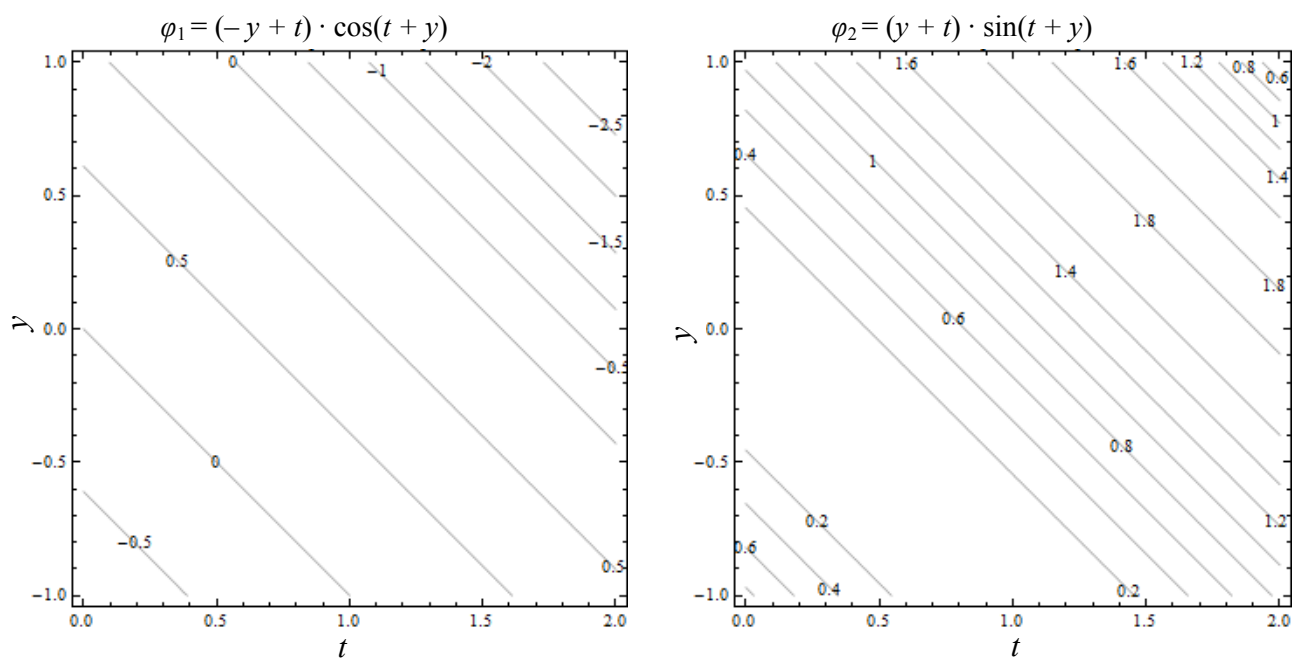


Рис. П4. Экипотенциальные портреты.
 $g_2 = 1, g_1 = g_{10} = g_{20} = 0, x = it$ при $z = 0$

*Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет
(Голиков Ю.К., Аверин И.А.)*

*Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург (Аверин И.А.)*

Контакты: Аверин Игорь Андреевич,
agreer@bk.ru

Материал поступил в редакцию 25.12.2013

NEW THREE-DIMENSIONAL HARMONIC POTENTIALS FOR CORPUSCULAR OPTICS

Yu. K. Golikov¹, I. A. Averin^{1,2}

¹*Saint-Petersburg State Polytechnical University, RF*

²*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF*

In this article the authors study the three-dimensional Laplace equation. Using innovative techniques such as circular variables and additively multiplicative separation of variables, they are able to find new and unusual physically solutions.

Keywords: Laplace fields, separation of variables, complex variables, circular variables

REFERENCES

1. Golikov Yu.K. Opredeleniye elektrostatičeskikh poley po zadannym kharakteristikam dvizheniya zaryazhennykh i dipolnykh chastits. Dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk. L.: LPI, 1985. 254 s. (in Russian).
2. Golikov Yu.K., Solovyev K.V. Elektrostatičeskiye ionnyye lovushki. Ucheb. posobiye. SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2008. 152 s. (in Russian).
3. Uitteker E.T. Analitičeskaya dinamika. Izdatelskiy dom "Udmurtskiy universitet", 1999. 587 s. (in Russian).
4. Landau L.D., Lifshits Ye.M. Teoreticheskaya fizika. Mekhanika. Izd-vo "Nauka, Glav. red. fiz.-mat. lit-ry", 1988. 214 s. (in Russian).
5. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. Teoriya sinteza elektrostatičeskikh energoanalizatorov. SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2010. 409 s. (in Russian).
6. Tsyganov A.V. Integriruyemyye sistemy v metode razdeleniya peremennykh. Izhevsk: Nauchno-izdatel'skiy tsentr "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2005. 384 s. (in Russian).
7. Polyanin A.D. Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki. M.: Fizmatlit, 2001. 578 s. (in Russian).
8. Shabat B.V. Vvedeniye v kompleksnyy analiz. Izd-vo "Lan", 1969. 576 s. (in Russian).
9. Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza. (3 t). T. 2, ch. 2. M.-L.: GTTI, 1933. 287 s. (in Russian).