

УДК 537.533.32

© А. П. Щербаков

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ НА ПЛОСКОСТИ И ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Исследованы особенности структуры пучка траекторий заряженных частиц в электростатическом поле с точки зрения теории катастроф и характеристик волнового фронта семейства траекторий. Установлены типы каустики вблизи плоскости фокусировки в зависимости от порядка фокусировки. Дана классификация особенностей в терминах теории катастроф.

Кл. сл.: фокусировка, каустика, волновой фронт, теория катастроф

ВВЕДЕНИЕ

Для научного творчества Ю.К. Голикова характерно широкое использование современного математического аппарата при анализе ионно-оптических систем. Одним из таких современных и эффективных методов является интенсивно развиваемый в последние десятилетия аппарат теории особенностей отображений дифференцируемых многообразий, более известной как "теория катастроф" [1]. Этот аппарат позволяет с единых позиций, абстрагируясь от частных случаев, анализировать общие свойства семейства траекторий.

Как в волновой, так и в корпускулярной оптике понятие фокусировки тесно связано с понятием каустики. Каустики, их форма и особенности, являются важнейшими характеристиками семейства траекторий. Они определяются из условия обращения в нуль гессиана классического действия на траектории

$$H(S) = \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь $S(\mathbf{r}, a_1, a_2)$ — полный интеграл стационарного уравнения Гамильтона—Якоби, которое для задачи о движении частицы массы m и с зарядом q в электростатическом поле с потенциалом $U(\mathbf{r})$ имеет вид

$$(\nabla S)^2 = 2m(E - qU(\mathbf{r})) \equiv P^2(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Параметры a_1 и a_2 в уравнении (1) задают совокупность траекторий, выходящих из заданной поверхности, координатами на которой можно считать эти параметры. Для центрального поля

траекторий a_1 и a_2 определяют направление выхода траекторий из заданной точки.

Каустики являются огибающими данного семейства траекторий. На каустиках обращается в бесконечность кривизна волнового фронта $S(\mathbf{r}, a_1, a_2) = \text{const}$. Вблизи каустики резко возрастает концентрация траекторий. При пересечении каустики изменяется число траекторий, приходящих в заданную точку [1]. Каустики играют важную роль в задачах о нахождении коротковолновых асимптотик уравнений Гельмгольца и Шредингера [2–4].

АНАЛИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим семейство прямолинейных траекторий на плоскости. Такими семействами описывается широкий класс электронно-оптических систем на основе двумерных электростатических полей [5]. Эти же семейства характеризуют оптические свойства систем на основе электростатических полей, обладающих осевой симметрией, в тех случаях, когда достаточно ограничиться траекториями в меридиональной плоскости, когда, например, точечный источник заряженных частиц находится на оси системы. Кроме того, поскольку в большинстве случаев плоскость фокусировки (плоскость изображения, или гауссова плоскость) находится в бесполом пространстве, достаточно ограничиться прямолинейными траекториями, считая, что на входе в эту бесполовую область предшествующим электрическим полем сформирован волновой фронт семейства траекторий с определенными свойствами.

Итак, пусть обозначены: кривая γ , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — волновой фронт семейства траекторий на плоскости, s — естественная параметризация кривой. Траектории ортогональны к кривой γ и прямолинейны. Огибающей семейства нормалей к кривой γ , т. е. каустикой рассматриваемого семейства траекторий, является эволюта [6]

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s), \quad (3)$$

где $k(s) = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|$ — кривизна кривой γ ,
 $\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$ — единичный вектор нормали к кривой γ в точке $\mathbf{r}(s)$.

Допустим, что кривизна волнового фронта имеет экстремум в точке s_0 и

$$k'(s_0) = k''(s_0) = \dots = k^{(l-1)}(s_0) = 0, \quad k^{(l)}(s_0) \neq 0. \quad (4)$$

Поместим начало системы координат XY в точку $\mathbf{r}(s_0)$, направив ось X вдоль вектора касательной $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ в этой точке, а ось Y вдоль вектора нормали $\mathbf{n}(s_0)$ (см. рис.).

Используя формулы Френе [5], легко показать, что при выполнении условия (4) для эволюты (3)

$$\tilde{\mathbf{r}}'(s_0) = \tilde{\mathbf{r}}''(s_0) = \dots = \tilde{\mathbf{r}}^{(l-1)}(s_0) = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(l)}(s_0) = \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} \mathbf{n}(s_0),$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(l+1)}(s_0) = \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l+1)} \mathbf{n}(s_0) - lk(s_0) \mathbf{t}(s_0) \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)}.$$

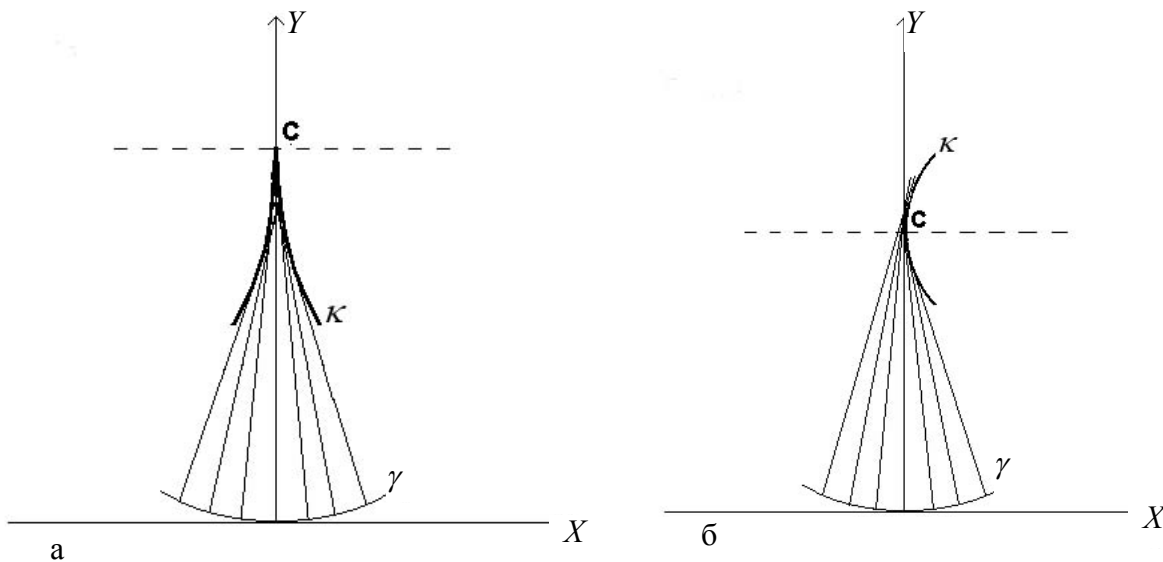
Поэтому в окрестности точки $\tilde{\mathbf{r}}(s_0)$ будем иметь

$$\begin{cases} \tilde{x}(s) = \\ = -\frac{l}{(l+1)!} k(s_0) \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} (s-s_0)^{l+1} + O((s-s_0)^{l+2}), \\ \tilde{y}(s) = \tilde{y}_0 + \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} (s-s_0)^l + O((s-s_0)^{l+1}). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{y}_0 = \tilde{y}(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} = R(s_0)$ — радиус кривизны кривой γ в точке s_0 .

Из соотношений (5) следует, что вблизи s_0 имеем уравнения каустики:

$$\tilde{x}(s) = c_x (s-s_0)^{l+1}, \quad \tilde{y}(s) - \tilde{y}_0 = c_y (s-s_0)^l.$$



Каустики (кривые κ) семейства прямолинейных траекторий вблизи точки фокусировки порядка l .

а — четное значение l ; б — нечетное значение l . Точка C — точка фокуса, кривые γ — волновые фронты

В случае четного значения l каустика рассматриваемого семейства траекторий имеет при $s = s_0$ точку возврата (точка С на рис., а). Острие каустики направлено в сторону от волнового фронта, если его кривизна в точке s_0 имеет минимум ($k^{(l)}(s_0) > 0$). Если кривизна имеет максимум в точке s_0 ($k^{(l)}(s_0) < 0$), то острие направлено к волновому фронту. В частности, при $l = 2$ имеем полукубическую параболу: $\tilde{x} = c_x (s - s_0)^3$, $\tilde{y} - \tilde{y}_0 = c_y (s - s_0)^2$.

Для случая нечетного значения l каустика изображена на рис., б. Она может располагаться как слева, так и справа от оси Y в зависимости от знака $k^{(l)}(s_0)$.

Заметим, что в случае осесимметричных систем для меридиональных траекторий реализуются только четные значения l : в силу указанной симметрии $k(s_0 + \Delta) = k(s_0 - \Delta)$.

Из соотношений (5) легко получить зависимость от параметра s угла α с осью Y траектории, проходящей через точку $\mathbf{r}(s)$ волнового фронта и касающейся каустики в точке $\tilde{\mathbf{r}}(s)$:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\tilde{x}}{ds} / \frac{d\tilde{y}}{ds} = -k_0 (s - s_0),$$

где $k_0 = k(s_0)$.

Координата точки пересечения траектории с гауссовой плоскостью — с плоскостью фокусировки (прямая $y = \tilde{y}(s_0)$)

$$x = \tilde{x} - (\tilde{y} - \tilde{y}(s_0)) \operatorname{tg} \alpha = \frac{(-1)^{l+1}}{k_0^l (l+1)!} \left(\frac{1}{k} \right)^{(l)}_{s_0} \alpha^{l+1}. \quad (6)$$

Такой вид зависимости координаты точки прихода частицы в гауссову плоскость от угла наклона траектории в терминах оптики заряженных частиц [5] означает наличие в плоскости $y = \tilde{y}(s_0)$ фокусировки l -го порядка.

Таким образом, каустика для семейства прямолинейных траекторий на плоскости в окрестности его точки фокусировки нечетного порядка (фокусировка первого, третьего и т. д. порядков) имеет вид, изображенный на рис., б. Для случая фокусировки четного порядка каустика имеет вид, изображенный на рис., а. В этом случае каустика имеет точку возврата.

КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОЛЯ ТРАЕКТОРИЙ

Коснемся теперь вопроса о классификации особенностей поля траекторий, связанных с фокуси-

ровкой l -го порядка, в терминах теории катастроф [1]. Для этого рассмотрим плоскость $y = \tilde{y}(s_0) + \delta$, близкую к гауссовой. Используя соотношение (6), с учетом малости угла α траектории с осью Y имеем для координаты точки пересечения траектории с этой плоскостью

$$x(\alpha, \delta) = c_l \alpha^{l+1} + \delta \alpha. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$c_l = \frac{(-1)^l}{(l+1)!} k_0^{(l)}, \quad (8)$$

$k_0^{(l)}$ — значение первой отличной от нуля производной кривизны волнового фронта в критической точке в соответствии с (4).

Критические углы траекторий определяются из условия $dx/d\alpha = 0$, откуда для четного l и при условии $\delta/c_l < 0$ имеем два значения

$$\alpha_c = \pm \left(-\delta / ((l+1)c_l) \right)^{1/l} \quad (9)$$

и для нечетного l — одно значение критического угла

$$\alpha_c = - \left(\delta / ((l+1)c_l) \right)^{1/l}. \quad (10)$$

Каустики определяются из условия $\tilde{x}(\delta) = x(\alpha, \delta)|_{\alpha=\alpha_c}$, откуда

$$\tilde{x}(\delta) = \frac{l}{l+1} \alpha_c \delta. \quad (11)$$

Для четных значений l вещественная каустика имеет две ветви и расположена в области значений δ , противоположных по знаку коэффициенту c_l .

Производящая функция или версальная деформация особенности [1], соответствующая фокусировке l -го порядка (соотношение (7)), содержит l существенных внешних параметров (кормазмерность особенности равна l) и при $l > 1$ имеет вид

$$f(\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \alpha^{l+2} + \lambda_1 \alpha^l + \lambda_2 \alpha^{l-1} + \dots + \lambda_l \alpha. \quad (12)$$

Параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ образуют пространство каустики. В соответствии с зависимостью (7), для фокусировки l -го порядка

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{l-2} = 0; \\ \lambda_{l-1} = \frac{l+2}{2c_l} \delta; \quad \lambda_l = -\frac{l+2}{c_l} x. \quad (13)$$

Для фокусировки первого порядка ($l=1$) версальная деформация $f(\tilde{\alpha}, \lambda) = \tilde{\alpha}^3 + \lambda \tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha} = \alpha + \delta/2c_1$, имеет один существенный внешний

параметр $\lambda = -\frac{3}{c_1} \left(x + \frac{\delta^2}{4c_1} \right)$. Точка фокуса $\lambda = 0$ в терминах теории катастроф [1] является точкой типа "складка". Это условие определяет параболу $x + \delta^2/4c_1 = 0$ в пространстве координат (x, δ) , на которой реализуется фокусировка первого порядка и которая является каустикой.

Для фокусировки второго порядка версальная деформация содержит два существенных внешних параметра, которые связаны с координатами в плоскости (x, δ) соотношениями (13). Точка фокуса $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — точка фокусировки второго порядка, является точкой "сборки" [1]. Каустика данной особенности — полукубическая парабола $8\lambda_1^3 + 27\lambda_2^2 = 0$. Ее точки вне фокуса — точки "складки". В этих точках реализуется фокусировка первого порядка.

В случае фокусировки второго порядка две пространственные координаты (x, δ) полностью описывают особенность, ее версальную деформацию и пространство каустики, которое в данном случае является двумерным.

Для фокусировки третьего порядка ($l = 3$) версальная деформация содержит три существенных внешних параметра. Пространство каустики трехмерно. Точка фокуса $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — точка фокусировки третьего порядка, является точкой типа "ласточкин хвост" [1]. Каустика представляет собой сложную поверхность в трехмерном пространстве. В нашем случае в доступном нам пространстве координат (x, δ) мы наблюдаем лишь сечение этой поверхности плоскостью $\lambda_1 = 0$, которое имеет вид $27\lambda_2^4 + 80\lambda_3^3 = 0$ и которое схематично изображено на рис., б. Точки этой каустики вне фокуса являются точками "складки". В этих точках реализуется фокусировка первого порядка.

В случае фокусировки четвертого порядка ($l = 4$) точка фокуса $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ — точка типа "бабочка" [1]. Каустика такой особенности — трехмерная гиперповерхность в четырехмерном пространстве. Каустика в пространстве (x, δ) — сечение этой поверхности плоскостями $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, которое схематично изображено на рис., а. Точки этой каустики вне фокуса являются точками "складки", где реализуется фокусировка первого порядка.

Плотность траекторий $I \sim (dx/d\alpha)^{-1}$ на каустике обращается в бесконечность. Используя формулу (11), легко получить порядок особенности:

– в плоскости фокусировки

$$I \sim \alpha^{-l} \sim x^{-l/(l+1)} \text{ при } \alpha \rightarrow 0, x \rightarrow 0;$$

– в плоскости $y = y_1$ вблизи фокуса ($y_1 \neq \tilde{y}(s_0)$)

$$I \sim (\alpha - \alpha_1)^{-1} \sim (x - x_1)^{-1/2}, \quad \alpha \rightarrow \alpha_1, x \rightarrow x_1,$$

где x_1 — координата пересечения каустики плоскостью, α_1 — соответствующий угол траектории.

Независимость порядка особенности от l вне фокальной точки означает однотипность точек каустики — как уже отмечалось выше, все точки каустики кроме, может быть, фокальной — точки "складки".

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи электронной оптики — это, как правило, исследование особенностей отображения двумерных многообразий (например, направление луча, выходящего из заданной точки, представляется некоторой областью на единичной сфере) на двумерные (например, плоскость фокусировки). Устойчивыми особенностями таких отображений, согласно теореме Уитни [1], являются только "складка" и "сборка". Все остальные "малым шевелением" распадаются на эти две. Это означает, в частности, что фокусировка третьего и более высокого порядков в реальных системах недостижима, мы лишь можем приблизиться к ней, максимально сжав каустическую структуру из точек "складки" и "сборки".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Каустики, катастрофы и волновые поля. // УФН. 1983. Т. 141, № 4. С. 591–627.
4. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
5. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики. В 2 томах. М.: Мир, 1993.
6. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 176 с.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург*

Контакты: Щербаков Анатолий Петрович,
anpshch@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 12.11.2013

STRUCTURAL SINGULARITIES OF TRAJECTORIES SET ON PLANE AND FOCUSING OF CHARGED PARTICLE BEAMS

A. P. Shcherbakov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

Structural singularities of charged particle beam in electrostatic field from the point of view of catastrophe theory and wave front features are studied. Caustic type near focal plane in accordance with the order of focusing has been established. Classification of singularities in terms of catastrophe theory is given.

Keywords: focusing, caustic, wave front, catastrophe theory

REFERENCES

1. *Arnold V.I.* Teoriya katastrof. M.: Nauka, 1990. 128 s. (in Russian).
2. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* Asimtoticheskiye metody v zadachakh difraktsii korotkikh voln. M.: Nauka, 1972. 456 s. (in Russian).
3. *Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I.* Kaustiki, katastrofy i volnovyye polya. // UFN. 1983. T. 141, № 4. S. 591–627. (in Russian).
4. *Maslov V.P., Fedoryuk M.V.* Kvaziklassicheskoye priblizheniye dlya uravneniy kvantovoy mekhaniki. M.: Nauka, 1976. 296 s. (in Russian).
5. *Hawkes P.H., Kasper E.* Principles of Electron Optics. Vol. 1, 2. Academic Press, 1989.
6. *Pogorelov A.V.* Differentsialnaya geometriya. M.: Nauka, 1969. 176 s. (in Russian).