

РАБОТЫ ШКОЛЫ ПРОФ. Ю. К. ГОЛИКОВА:
РАБОТЫ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ПАМЯТИ Ю. К. ГОЛИКОВА

УДК 537.8: 537.533/ 537.534

© А. С. Бердников

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ С АРХИМЕДОВЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе исследуется учет максвелловских поправок для высокочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами. Показано, что существуют такие аналитические решения уравнений Максвелла, которые можно использовать для архимедовой транспортировки заряженных частиц. Важным моментом является то, что указанные электромагнитные поля реализуют аналитически точную архимедову транспортировку заряженных частиц, в том числе при наличии и существенном воздействии на движение заряженных частиц добавок к электромагнитному полю, вытекающих из уравнений Максвелла.

Кл. сл.: электромагнитные поля, уравнения Максвелла, заряженные частицы в высокочастотных электромагнитных полях

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–12] было продемонстрировано существование высокочастотных электрических полей, осуществляющих транспортировку заряженных частиц нового типа. Пусть в окрестности оси симметрии OZ транспортирующего устройства создается высокочастотное электрическое поле с потенциалом вида

$$U(x, y, z, t) \approx U_0 \cos(z/L - t/T) \times \\ \times [1 + f(x/L, y/L)] \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где U_0 — масштаб амплитуды потенциала осциллирующего электрического поля на оси устройства; L — пространственный масштаб изменения электрического поля; T — временной масштаб "медленного" изменения параметров электрического поля; ω — базовая частота высокочастотного электрического поля (круговая); φ — фаза высокочастотного электрического поля; $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + \dots$ — функция, обращающаяся в нуль на оси симметрии OZ вместе со своими первыми производными $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ (она описывает поведение потенциала (1) в окрестности оси симметрии $x=0, y=0$). Т. к. функция (1) должна удовлетворять уравнению Лапласа, то функция $f(x, y)$ является решением уравнения $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 - f = 1$. Значит, $f(x, y)$ квадратично стремится к нулю при приближении к оси симметрии: поскольку на оси симметрии $f=0$, то по крайней мере одна из вторых производных $\partial^2 f/\partial x^2$ и $\partial^2 f/\partial y^2$ на оси симметрии не равна

нулю, а т. к. по условию на оси симметрии $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$, то линейно стремиться к нулю при приближении к оси симметрии функция $f(x, y)$ также не может. Дополнительно потребуем (хотя это и не всегда обязательно), чтобы квад-

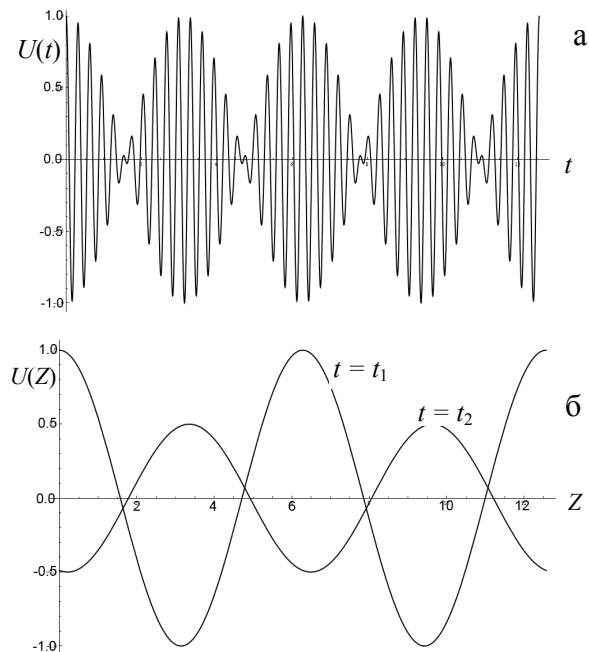


Рис. 1. Поведение на оси электрического потенциала $U(x, y, z, t)$ вида (1).

а — в фиксированной точке оси OZ в зависимости от времени; б — вдоль оси OZ в два разных момента времени t_1 и t_2 (графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах)

ратичная форма $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + \dots$, образованная главными членами разложения функции $f(x, y)$ в окрестности оси симметрии $x=0, y=0$ в ряд Тейлора, была положительно определенной; будем называть такие функции функциями с положительно-квадратичным поведением вблизи оси симметрии.

На рис. 1 показано поведение высокочастотного потенциала (1) на оси симметрии OZ . Псевдопотенциал $\bar{U}(x, y, z, t)$ этого электрического поля, характеризующий усредненное движение заряженной частицы с массой m и зарядом q (см. [13–18]), представляет собой трехмерную синусоидальную волну, бегущую вдоль оси OZ со скоростью L/T и подчиняющуюся закону

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, z) \approx & \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \sin^2(z/L - t/T) \times [1 + g(x/L, y/L)] + \\ & + \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \cos^2(z/L - t/T) \cdot h(x/L, y/L), \end{aligned} \quad (2)$$

где $g(x, y) = (1 + f(x, y))^2 - 1$, $h(x, y) = (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2$ (как легко видеть, $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — функции с положительно-квадратичным поведением вблизи оси симметрии).

На рис. 2 показано поведение псевдопотенциала $\bar{U}(x, y, z, t)$ на оси симметрии OZ . В силу того

что $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — функции с положительно-квадратичным поведением вблизи оси симметрии, локальные минимумы псевдопотенциала $\bar{U}$ вдоль оси OZ будут одновременно трехмерными локальными минимумами по переменным x, y, z . Поэтому при движении в таком высокочастотном электрическом поле, особенно при наличии демпфирующего газа, заряженные частицы концентрируются вблизи оси в точках локальных минимумов и транспортируются с единой групповой скоростью L/T вдоль оси устройства вместе с этими минимумами независимо от заряда, массы и энергии заряженных частиц (рис. 3). Естественно, это происходит лишь в определенном диапазоне параметров заряженных частиц, а наличие единой поступательной групповой скорости не мешает заряженным частицам совершать в пределах локальных псевдопотенциальных ям осциллирующие движения, характеризующиеся их собственными частотами и амплитудами, зависящими от массы, заряда и энергии.

Работоспособность и эффективность такого способа разбиения континуального ансамбля заряженных частиц на изолированные пакеты, составленные из частиц с разными массами, зарядами и энергиями, с последующей транспортировкой полученных пакетов в синхронизованном режиме вдоль оси устройства, продемонстрирована с помощью прямых компьютерных моделирований, в [1, 6–8]. В работах [1–12] рассматривается, как синтезировать электродные конфигурации и прикладываемые к ним напряжения, чтобы в объеме устройства создавать высокочастотные электрические потенциалы вида (1).

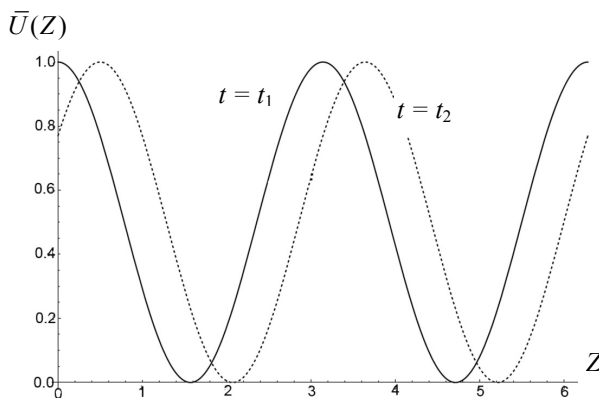


Рис. 2. Поведение псевдопотенциала $\bar{U}(x, y, z, t)$, характеризующего электрический потенциал вида (1) вдоль оси OZ в два разных момента времени t_1 и t_2 (графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах)

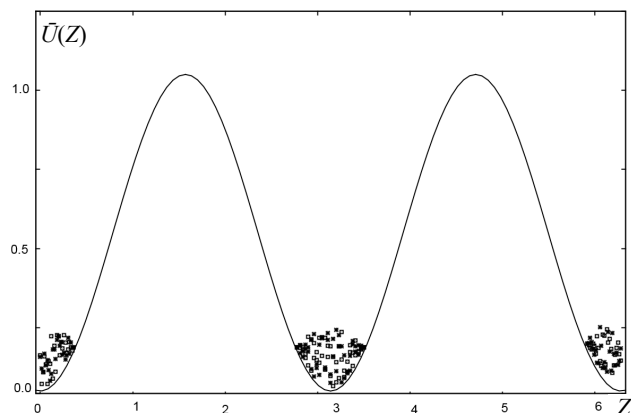


Рис. 3. Группировка заряженных частиц в точках минимума осевого распределения псевдопотенциала $\bar{U}$, описываемого формулой (2)

Однако данная теория была построена в предположении о квазистационарности высокочастотного электрического поля вида (1), т. е. без учета максвелловских поправок, неизбежно возникающих при изменении электрического поля во времени. Действительно, для тех параметров электрического поля, которые используются в [1–12], максвелловские поправки пренебрежимо малы. При характерной частоте $\omega \sim 1 \div 2$ МГц параметры электрического поля существенно перестраиваются за время $t = 2\pi/\omega \approx 6/3 \times 10^{-6}$ с, так что даже при характерных размерах устройства $L \sim 1$ м время распространения со скоростью света вдоль длины устройства электромагнитного возмущения $t_c = L/c \approx 3.3 \times 10^{-9}$ с. Тем самым гипотеза о том, что изменение электрического поля в объеме устройства практически мгновенно отслеживает изменение электрических потенциалов на электродах для рассматриваемых случаев, безусловно, выполняется.

Тем не менее, как справедливо было отмечено в оппонентском отзыве Юрия Константиновича Голикова на диссертацию [12], этот факт не освобождает теоретика от обязанности анализировать влияние максвелловских поправок (например, с помощью уравнения Гельмгольца вместо уравнения Лапласа), особенно с учетом того, что высокочастотные поля вида (1) представляют собой новый тип высокочастотных электромагнитных полей, ранее не анализировавшихся. Кроме того, легко понять, что аналогичные эффекты по транспортировке заряженных частиц, скорее всего, имеют место, например, при транспортировке

электронов в поле электромагнитной волны (внутри волновода или вдоль лазерного луча), где влияние максвелловских поправок к электрическому полю уже не может рассматриваться как пренебрежимо малое. Данная работа посвящена такому анализу — исследованию движения заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях вида (1) без привлечения гипотезы о квазистационарности электрического поля.

1. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА С АРХИМЕДОВЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Простейший способ создания высокочастотного электрического поля вида (1) — использовать систему круговых диафрагм или кольцевых электродов (см. рис. 4), где к электродам с номерами 1, 5, 9, ..., $4n+1$, ... прикладываются напряжения $+U_R \cos(t/T) \cos(\omega t + \varphi)$, к электродам с номерами 2, 6, 10, ..., $4n+2$, ... прикладываются напряжения $+U_R \sin(t/T) \cos(\omega t + \varphi)$, к электродам с номерами 3, 7, 11, ..., $4n+3$, ... прикладываются напряжения $-U_R \cos(t/T) \cos(\omega t + \varphi)$, к электродам с номерами 4, 8, 12, ..., $4n+4$, ... прикладываются напряжения $-U_R \sin(t/T) \times \cos(\omega t + \varphi)$ (см. рис. 5). Эти напряжения представляют собой синусоидальные высокочастотные сигналы $U_R \cos(\omega t + \varphi)$, амплитудно модулированные по синусоидальному закону с характерным временем T периода амплитудной модуляции, причем

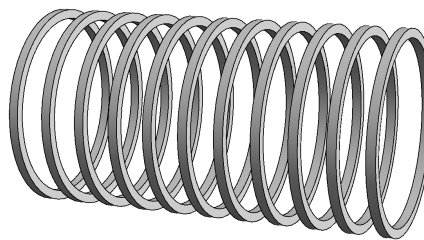
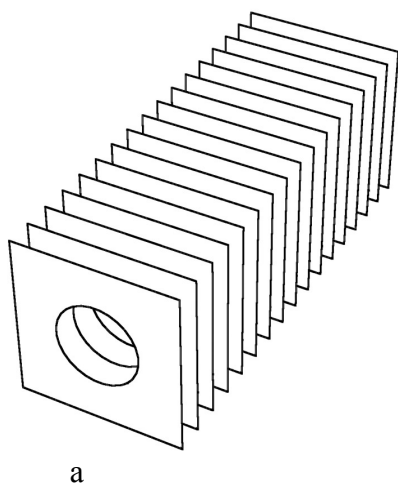


Рис. 4. Возможные электродные конфигурации для создания высокочастотного электрического поля с бегущей волной псевдопотенциала.

а — система плоских пластин с круглыми отверстиями, б — система кольцевых электродов

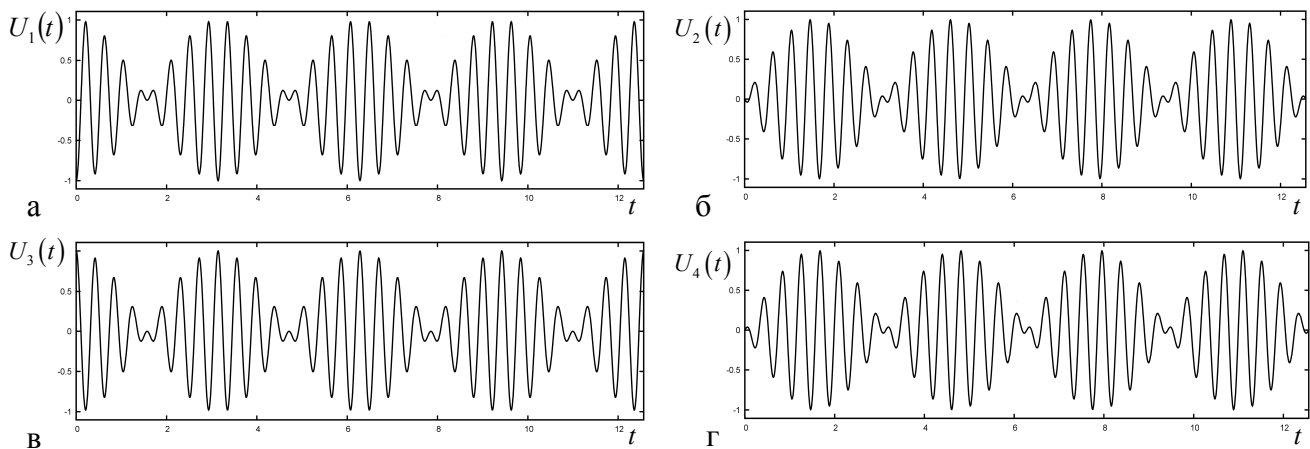


Рис. 5. Напряжения, подаваемые на периодическую систему электродов для создания высокочастотного электрического поля с бегущей волной псевдопотенциала.

а — напряжения $U_1(t)$ подаются на электроды с номерами 1, 5, 9, 13,...; б — напряжения $U_2(t)$ подаются на электроды с номерами 2, 6, 10, 14,...; в — напряжения $U_3(t)$ подаются на электроды с номерами 3, 7, 11, 15,...; г — напряжения $U_4(t)$ подаются на электроды с номерами 4, 8, 12, 16,... (графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах)

фаза амплитудной модуляции между соседними электродами отличается на $\pi/2$ (см. рис. 5), что и дает, собственно, период повторения электропитания, прикладываемого к электродам, равный четверти.

Рассмотрим поле на оси устройства. При подаче на электроды постоянных напряжений по схеме $(+U_R, 0, -U_R, 0, \dots)$ на оси образуется почти косинусоидальное распределение потенциала $U_0 \cos(z/L)$, а при подаче на электроды постоянных напряжений по схеме $(0, +U_R, 0, -U_R, \dots)$ на оси образуется почти синусоидальное распределение потенциала $U_0 \sin(z/L)$ (если, конечно, радиус диафрагмы достаточно велик по сравнению с межэлектродными расстояниями). Поэтому в силу принципа суперпозиции электромагнитных полей и в приближении квазистационарности электрического поля суммарный высокочастотный потенциал электрического поля, образующегося в устройстве, когда потенциалы на электродах меняются во времени согласно выписанным ранее законам, на оси равен

$$\begin{aligned} & U_0 \cos(z/L) \cos(t/T) \cos(\omega t + \varphi) + \\ & + U_0 \sin(z/L) \sin(t/T) \cos(\omega t + \varphi) = \\ & = U_0 \cos(z/L - t/T) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Осесимметричному электростатическому полю с осевым распределением потенциала $U_0 \cos(z/L)$ соответствует трехмерный осесимметричный

электростатический потенциал $U_c(x, y, z) = U_0 \cos\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right)$ [19, 20] (см. Приложение, рис. П1), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата, а $I_0(s)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, удовлетворяющая дифференциальному уравнению [21–25]

$$I_0''(s) + \frac{1}{s} I_0'(s) - I_0(s) = 0, \quad I_0(0) = 1, \quad I_0'(0) = 0.$$

Осевому распределению электростатического потенциала $U_0 \sin(z/L)$ соответствует трехмерный осесимметричный электростатический потенциал $U_s(x, y, z) = U_0 \sin\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right)$. Как результат, суммарный высокочастотный электрический потенциал (вычисленный в приближении квазистационарности высокочастотного электрического поля) описывается формулой

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= \\ &= U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \cos(t/T) \cos(\omega t + \varphi) + \\ &+ U_0 I_0(r/L) \sin(z/L) \sin(t/T) \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= U_0 \cos(z/L - t/T) I_0(r/L) \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= U_*(x, y, z, t) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Псевдопотенциал такого высокочастотного по-

ля со сложной зависимостью от времени, включающей как "быстрое" время, характеризуемое базовой частотой ω , так и "медленное" время, характеризуемое временным масштабом T амплитудной модуляции прикладываемых к электродам напряжений, вычисляется по формуле [2, 12]

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, y, z, t) &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \left[\left(\frac{\partial U_*(x, y, z, t)}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial U_*(x, y, z, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_*(x, y, z, t)}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \left[\sin^2(z/L - t/T) (I_0(r/L))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(z/L - t/T) (I_1(r/L))^2 \right], \quad (4)\end{aligned}$$

где $I_1(s)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, возникающая в результате дифференцирования функции $I_0(s)$ по аргументу s .

В Приложении на рис. П2 показан трехмерный рельеф и структура эквилиний в плоскости rz для псевдопотенциала (4). На рис. П3 (Приложение) показаны очертания пространственных зон захвата заряженных частиц для высокочастотного поля (3), рассчитанные на основании псевдопотенциальной модели (4) движения заряженных частиц в высокочастотном электрическом поле (истинный профиль зон захвата будет отличаться от изображенного на рис. П3, однако качественная картина сохраняется). В частности, из этого рисунка следует, что для того, чтобы границы электродов не захватывали границы зон захвата заряженных частиц, необходимо выполнение неравенства $R \geq 1.5183471 L$ (здесь R — радиус отверстий в электродах, тогда как расстояние между соседними электродами, выраженное через масштабный параметр L , равно $\pi L/2$).

В реальности электрическое поле, которое создается рассматриваемой нами периодической структурой кольцевых диафрагм, более сложное. На рис. П4, а, (Приложение) показаны контуры электродов, используемые для создания идеального трехмерного поля $U_C(x, y, z) = U_0 \cos\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right)$, а на рис. П4, б, — контуры электродов, используемые для создания идеального трехмерного поля $U_S(x, y, z) = U_0 \sin\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right)$. Очевидно, что если эти конфигурации электродов совместить в одной конст-

рукции (рис. П4, в), то результирующее поле будет отличаться от простой суперпозиции полей $U_C(x, y, z)$ и $U_S(x, y, z)$.

Чтобы учесть это расхождение, рассмотрим поведение электрического потенциала вдоль горизонтальной линии $r = R$ на высоте, соответствующей радиусу диафрагм. В силу периодичности электродной конфигурации и периодичности приложенных электрических напряжений $(+U_R, 0, -U_R, 0, \dots)$ поведение потенциала получившегося трехмерного электрического поля $U_C^*(x, y, z)$ по координате z во всем пространстве и, в частности, вдоль этой линии будет периодической функцией координаты z . Эту периодическую функцию $U_R^*(z)$ можно разложить в ряд Фурье, причем в силу внутренней симметрии электродной конфигурации и структуры потенциалов в разложении будут присутствовать только нечетные степени косинусов: $U_R^*(z) = U_R (a_1 \cos(z/L) + a_3 \cos(3z/L) + \dots + a_{2k+1} \cos((2k+1)z/L) + \dots)$. После этого легко проверить, что трехмерное электрическое поле, получаемое для рассматриваемой электродной конфигурации, будет описываться формулой

$$U_C^*(x, y, z) = U_R \sum_k a_{2k+1} \frac{\cos((2k+1)z/L) I_0((2k+1)r/L)}{I_0((2k+1)R/L)}, \quad (5)$$

где коэффициенты a_{2k+1} приходится считать численно. Легко понять, что потенциал $U_S^*(x, y, z)$, соответствующий напряжениям $(0, +U_R, 0, -U_R, \dots)$, подаваемым на эти же электроды, будет описываться формулой

$$U_S^*(x, y, z) = U_R \sum_k a_{2k+1} \frac{\sin((2k+1)z/L) I_0((2k+1)r/L)}{I_0((2k+1)R/L)}. \quad (6)$$

На рис. П5 (Приложение) показан достаточно грубый модельный профиль для $U_R^*(z)$, где потенциал вдоль поверхностей электродов равен соответствующей константе, а потенциал в межэлектродном интервале аппроксимируется линейной функцией. Из формулы (5) следует, что если на уровне $r = R$ соотношение между соседними гармониками равно $\gamma^* = a_3/a_1$, то на уровне $r = 0$ это соотношение будет уже равно величине $\gamma_0 = \gamma^* \times I_0(R/L)/I_0(3R/L)$. Модифицированная функция Бесселя $I_0(\rho)$ растет экспоненциально

быстро с ростом аргумента ρ , поэтому, выбирая достаточно большое значение R/L , величину γ_0 можно сделать сколь угодно малой. В частности, поскольку для модельного профиля $U_R^*(z)$ на рис. П5 (Приложение) в наихудшем случае отношение $\gamma^* = a_3/a_1 \leq 1/3$, то для $R/L > \pi$ отличие истинных осевых распределений $U_c^0(z)$ и $U_s^0(z)$ от соответственно $U_0 \cos(z/L)$ и $U_0 \sin(z/L)$ гарантированно не будет превышать одного процента. (На самом же деле нам не требуется столь высокого качества синусоидальности профиля потенциала на оси — достаточно, чтобы силовое воздействие на заряженную частицу, оказываемое основной пространственной гармоникой поля, было преобладающим по сравнению с вкладом в этот процесс остальных пространственных гармоник).

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В системе единиц СГСЭ меняющиеся во времени электрические и магнитные поля описываются нижеследующими уравнениями Максвелла [26–30]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — пространственная плотность электрического заряда, $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ — пространственная плотность электрического тока, $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ — электрическая индукция, $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ — магнитная индукция, $c = 299\,792\,458$ м/с — скорость света, $\pi = 3.141592653589\dots$ — безразмерная нормировочная константа.

В случае, когда

- плотностью электрического заряда заряженных частиц и плотностью тока, возникающего в силу движения заряженных частиц, можно пренебречь;
- дополнительные заряды и токи отсутствуют;
- индивидуальные свойства среды в плане поляризуемости, намагнитченности и электропроводности строго линейны, так что выполнены соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$;

- безразмерная относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \text{const}$ и безразмерная относительная магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$ одинаковы во всех точках пространства, а проводимость среды $\sigma = 0$ отсутствует, — уравнения (7) приобретают вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Систему из четырех уравнений (8) можно сократить до двух уравнений, если выразить компоненты электрического и магнитного полей через скалярный потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ и векторный потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ как

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} \end{aligned} \quad (9)$$

(при такой подстановке уравнения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ удовлетворяются тождественно).

Подстановка (9) для уравнений Максвелла хорошо известна. Так как дивергенция $\mathbf{B}$ равна нулю, можно построить вектор-функцию $\mathbf{A}$, для которой $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — достаточно выбрать произвольно функцию A_x , подобрать функцию A_y так, что $\partial A_y / \partial x = \partial A_x / \partial y + B_z$, и тогда для уравнений $\partial A_z / \partial y = \partial A_y / \partial z + B_x$, $\partial A_z / \partial x = \partial A_x / \partial z - B_y$ относительно неизвестной функции A_z выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости [36, 37] (решение A_z определяется с точностью до произвольной аддитивной добавки, зависящей от z и t). После этого при замене $\mathbf{E} = \mathbf{F} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ из условия $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ следует, что $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ — поле $\mathbf{F}$ является потенциальным (интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю). Поэтому $\mathbf{F}$ может быть представлено как градиент скалярной функции φ ; функция φ восстанавливается однозначно с точностью до зависящей от времени аддитивной константы как интеграл от вектор-функции $\mathbf{F}$ вдоль произвольного пути, соединяющего две точки.

Хорошо известно, что функции $\mathbf{A}$ и φ в формуле (9) определены с некоторой степенью произвола: при замене $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi$, $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$, где

$\psi(x, y, z, t)$ — произвольная скалярная функция координат и времени, напряженность электрического поля $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и магнитная индукция $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ в формуле (9) не меняются. Из проведенных рассуждений следует, что это *единственная* неоднозначность, возникающая при восстановлении скалярного и векторного потенциалов по заданному электромагнитному полю.

Свобода выбора потенциалов φ и $\mathbf{A}$ может быть полезна в процессе решения уравнений Максвелла. В частности, накладывая на потенциалы калибровочное условие Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ [28–30, 33], уравнения (8) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(здесь $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Ла-

пласа, его применение к вектору $\mathbf{A}$ осуществляется покомпонентно). Условие Лоренца тесно связано с разрешимостью задачи Гельмгольца о восстановлении векторного поля $\mathbf{A}$ по заданному ротору $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ и заданной дивергенции $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ [31, 32]; легко получить уравнение для поправки $\psi(x, y, z, t)$, если условие Лоренца для функций $\mathbf{A}$ и φ вдруг не выполнено.¹⁾

С учетом осевой симметричности рассматриваемой нами конфигурации электродов уравнения (8) и/или (10) удобно решать в цилиндрической системе координат [34, 35] $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{e}_r F_r + \mathbf{e}_\theta F_\theta + \mathbf{e}_z F_z, \quad F_x = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta, \\ F_y &= F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta, \quad F_z = F_z, \end{aligned}$$

¹⁾ Даже с использованием калибровочного условия Лоренца сохраняется неоднозначность скалярного и векторного потенциалов: замена $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi$,

$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$, если $\Delta \psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, сохраняет условие Лоренца в неприкосновенности. Эта неоднозначность потенциалов — вспомогательных математических конструкций — не сказывается на значениях полей (напряженности электрического поля и магнитной индукции): однозначность решения системы уравнений Максвелла при правильно заданных начальных и краевых условиях строго доказана [30].

в которой дифференциальные операторы выражаются как

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \Delta f &= (\nabla \cdot \nabla) f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

причем с самого начала все участвующие в уравнениях функции от переменной θ не зависят.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим решение уравнений Максвелла в безразмерных координатах $z' \rightarrow z/L$, $r' \rightarrow r/L$, когда электрическое поле на оси устройства ведет себя как $E_z(z/L) = E_0 \sin(z/L) \cos \omega t$. Естественно ожидать, что, когда $\omega \rightarrow 0$, нужные нам решения уравнений Максвелла стремятся к квазистатическому решению $\mathbf{E}_{\text{lim}}(r/L, z/L, t) = -\nabla \varphi_{\text{lim}}$, где $\varphi_{\text{lim}}(r/L, z/L, t) = U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \cos \omega t$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и обеспечивает требуемое поведение напряженности электрического поля на оси, когда $E_0 = U_0/L$.

Будет разумно искать приближенное решение уравнений Максвелла в виде ряда по малому безразмерному параметру $\omega L/c$. При таком подходе напряженность электрического поля имеет вид $\mathbf{E}(r, z, \omega) \cos \omega t$, где $\mathbf{E}(r, z, \omega)$ раскладывается в ряд по четным степеням параметра $\omega L/c$, а магнитная индукция имеет вид $\mathbf{B}(r, z, \omega) \sin \omega t$, где $\mathbf{B}(r, z, \omega)$ раскладывается в ряд по нечетным степеням параметра $\omega L/c$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, z, \omega) &= \frac{U_0}{L} \sum \mathbf{E}^{(2k)} \left(\frac{r}{L}, \frac{z}{L} \right) \left(\frac{\omega L}{c} \right)^{2k}, \\ \mathbf{B}(r, z, \omega) &= \frac{U_0}{L} \sum \mathbf{B}^{(2k+1)} \left(\frac{r}{L}, \frac{z}{L} \right) \left(\frac{\omega L}{c} \right)^{2k+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (11) в (8), получаем цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(0)} &= -\nabla' \varphi^{(0)}, \quad \varphi^{(0)} = \cos(z') I_0(r'), \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}^{(2k+1)} &= 0, \quad \nabla' \times \mathbf{B}^{(2k+1)} = -\varepsilon \mu \mathbf{E}^{(2k)}, \\ \nabla' \cdot \mathbf{E}^{(2k)} &= 0, \quad \nabla' \times \mathbf{E}^{(2k)} = -\mathbf{B}^{(2k-1)} \end{aligned} \quad (12)$$

(здесь оператор ∇' соответствует дифференцированию по безразмерным координатам r' и z' ; в дальнейшем для упрощения записи знак штриха будет опускаться).

Уравнения (12) по сути представляют собой задачу Гельмгольца — восстановление неизвестного векторного поля $\mathbf{B}^{(2k-1)}$ или $\mathbf{E}^{(2k)}$ по известным дивергенции и ротору [31, 32]. Задача сильно упрощается за счет априорно установленного условия, что все функции зависят от свободных переменных (r, z) и не зависят от свободной переменной θ . Рассмотрим общую схему ее решения.

Пусть в цилиндрических координатах (r, z) требуется решить задачу

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (13)$$

при неизвестной вектор-функции $\mathbf{F}(r, z) = (F_r, F_\theta, F_z)$ и известной вектор-функции $\mathbf{G}(r, z) = (G_r, G_\theta, G_z)$. В явной форме соответствующие уравнения записываются как

$$\begin{cases} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \\ -\frac{\partial F_\theta}{\partial z} = G_r, \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = G_\theta, \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} F_\theta = G_z. \end{cases} \quad (14)$$

Второе и четвертое уравнения системы (14) образуют замкнутую систему относительно функции $F_\theta(r, z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_\theta}{\partial z} = -G_r, \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = G_z - \frac{1}{r} F_\theta. \end{cases} \quad (15)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы уравнений является условие [36–38]

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) = \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{1}{r} G_r + \frac{\partial G_r}{\partial r} = \operatorname{div} \mathbf{G}.$$

При этом для функций, стоящих в правых частях уравнений (12), это условие всегда выполнено. Из первого уравнения системы (15) следует, что $F_\theta(r, z) = -\int G_r dz + f(r)$, где $f(r)$ — пока неизвестная функция. Подставив это выражение во второе уравнение (15), получаем уравнение $\frac{df}{dr} + \frac{1}{r} f = G_z + \int \left(\frac{1}{r} G_r + \frac{\partial G_r}{\partial r} \right) dz = h(r)$, где правая часть уравнения, обозначенная как $h(r)$, не зави-

сит от z в силу условия $\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} G_r + \frac{\partial G_z}{\partial z} = 0$. Решением полученного линейного дифференциального уравнения с ненулевой правой частью будет функция $f(r) = (1/r) \int_0^r r h(r) dr + c_0/r$, зависящая от произвольным образом выбираемой константы c_0 . Однако, поскольку $f(r)$ должна иметь конечный предел при $r \rightarrow 0$, то необходимым образом $c_0 = 0$.

Первое и третье уравнения системы (14) образуют замкнутую систему относительно функции $F_z(r, z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial z} = -\frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{1}{r} F_r, \\ \frac{\partial F_z}{\partial r} = \frac{\partial F_r}{\partial z} - G_\theta. \end{cases} \quad (16)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы уравнений является условие [36–38]

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 F_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F_r - \frac{\partial G_\theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Нас интересуют только такие решения уравнения

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F_r = \frac{\partial G_\theta}{\partial z}, \quad (17)$$

которые регулярным образом ведут себя в точке $r \rightarrow 0$. Подставляя в уравнение (17) разложения функций $F_r(r, z) = \sum f_k(z) r^k / k!$ и $G_\theta(r, z) = \sum g_k(z) r^k / k!$ в ряды по переменной r в окрестности точки $r = 0$, получаем, что $f_0(z) \equiv 0$,

$f_1(z)$ — произвольная функция, а остальные функции $f_k(z)$ определяются однозначным образом из рекуррентных соотношений через $f_1(z)$ и $g_k(z)$.

Возможность существования широкого набора решений для (17) и соответственно для (16) связана с возможностью наличия собственных электромагнитных колебаний в рассматриваемой конфигурации электродов. Примем как очевидное, что режим работы устройства в качестве волновода должен быть исключен. Соответственно нас будут интересовать распределения электромагнитного поля, вынужденные внешним воздействием (в данном случае в качестве его представителя выступает функция $G_\theta(r, z)$), а не собственные электромагнитные колебания. Такие решения соответствуют выбору $f_1(z) = 0$, и при условии $f_1(z) = 0$ решение уравнения (17) для заданной функции $G_\theta(r, z)$ будет единственным.

Как только определено решение $F_r(r, z)$, обеспечивающее совместность уравнений (16), решение $F_z(r, z)$ системы уравнений (16) находится

единственным образом с точностью до аддитивной константы. Аддитивная константа соответствует однородному полю в направлении z (электрическому или магнитному, осциллирующему во времени по синусоидальному закону) и должна быть отброшена по очевидным физическим соображениям. Тем самым для цепочки рекуррентных соотношений (12) решение строится однозначным образом.

Для $\mathbf{E}^{(0)}$, соответствующего базовому потенциалу $\varphi^{(0)} = \cos(z)I_0(r)$, мы имеем первый член решения в явном виде: $E_z^{(0)}(r, z) = \sin(z)I_0(r)$, $E_r^{(0)}(r, z) = -\cos(z)I_1(r)$, $E_\theta^{(0)}(r, z) = 0$. Используя описанную выше цепочку рассуждений, для выбранного базового потенциала можно получить сходящийся ряд из поправок, обусловленных максвелловскими эффектами. Решение этих уравнений удобно выполнять с помощью программы [39], при этом в упрощенных к конечной форме формулах появляются модифицированные функции Бесселя более высокого порядка $I_1(s)$, $I_2(s)$, ... Максвелловские поправки для потенциала $\Phi_{cc} = U_0 \cos(z/L) \times I_0(r/L) \cos \omega t$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 E_r(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \cos\left(\frac{z}{L}\right) I_1\left(\frac{r}{L}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon\mu}{4} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \frac{\frac{r}{L} \left(I_0\left(\frac{r}{L}\right) + I_2\left(\frac{r}{L}\right) \right) - 2I_1\left(\frac{r}{L}\right)}{I_1\left(\frac{r}{L}\right)} + \dots \right] \cos \omega t, \\
 E_z(r, z, t) &= +\frac{U_0}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \frac{\frac{r}{L} I_1\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{r}{L}\right)} + \dots \right] \cos \omega t, \\
 B_f(r, z, t) &= -\varepsilon\mu \frac{U_0}{L} \left(\frac{\omega L}{c}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) I_1\left(\frac{r}{L}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon\mu}{4} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \frac{\frac{r}{L} \left(I_0\left(\frac{r}{L}\right) + I_2\left(\frac{r}{L}\right) \right) - 2I_1\left(\frac{r}{L}\right)}{I_1\left(\frac{r}{L}\right)} + \dots \right] \sin \omega t, \\
 E_f(r, z, t) &= 0, \quad B_r(r, z, t) = 0, \quad B_z(r, z, t) = 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

а скалярный и векторный потенциалы, соответствующие этому электромагнитному полю, принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi(r, z, t) &= U_0 \cos\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \frac{2I_0\left(\frac{r}{L}\right) - \frac{r}{L} I_1\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{r}{L}\right)} + \dots \right] \cos \omega t, \\ A_z(r, z, t) &= \varepsilon\mu U_0 \frac{\omega L}{c} \sin\left(\frac{z}{L}\right) I_0\left(\frac{r}{L}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \frac{2I_0\left(\frac{r}{L}\right) - \frac{r}{L} I_1\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{r}{L}\right)} + \dots \right] \sin \omega t, \\ A_r(r, z, t) &= A_\varphi(r, z, t) = 0.\end{aligned}\tag{19}$$

Аналогичным образом находятся максвелловские поправки для базовых потенциалов

$$\begin{aligned}\Phi_{cs} &= U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \sin \omega t, \\ \Phi_{sc} &= \sin(z/L) I_0(r/L) \cos \omega t, \\ \Phi_{ss} &= \sin(z/L) I_0(r/L) \sin \omega t.\end{aligned}$$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С СИНУСОИДАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ ВДОЛЬ ОСИ

Для нахождения аналитического решения удобно использовать уравнения Максвелла в форме (10) и прием, использованный в [31] для нахождения решения задачи Гельмгольца (восстановления векторного поля по заданным ротору и дивергенции). Однако в данном случае удобнее просто угадать аналитическое решение. Результаты, полученные в предыдущем разделе, наводят на мысль искать точное аналитическое решение для базового потенциала $\Phi_{cc} = U_0 \cos(z/L) \times I_0(r/L) \cos \omega t$ в форме

$$\begin{aligned}E_r(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \cos\left(\frac{z}{L}\right) J_R\left(\frac{r}{L}\right) \cos \omega t, \\ E_\varphi(r, z, t) &= 0, \\ E_z(r, z, t) &= +\frac{U_0}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) J_Z\left(\frac{r}{L}\right) \cos \omega t, \\ B_r(r, z, t) &= 0, \\ B_\varphi(r, z, t) &= -\varepsilon\mu \frac{U_0}{L} \left(\frac{\omega L}{c}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) J_F\left(\frac{r}{L}\right) \sin \omega t, \\ B_z(r, z, t) &= 0,\end{aligned}\tag{20}$$

где $J_R(s)$, $J_\varphi(s)$, $J_Z(s)$ — некоторые неизвестные функции. Подставив (20) в уравнения (8), получим условия

$$\begin{aligned}J_F(s) &= J_R(s), \quad J_R(s) = J'_Z(s) / \left(1 - \varepsilon\mu\omega^2 L^2 / c^2\right), \\ J'_Z(s) + \frac{1}{s} J'_Z(s) - \left(1 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2 L^2}{c^2}\right) J_Z(s) &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

С учетом начального условия $J_Z(0) = 1$, $J'_Z(0) = 0$ решением для (21) будут функции

$$\begin{aligned}J_R(s) &= I_1(\lambda s) / \lambda, \\ J_F(s) &= I_1(\lambda s) / \lambda, \\ J_Z(s) &= I_0(\lambda s),\end{aligned}\tag{22}$$

где $I_0(s)$ и $I_1(s)$ — уже знакомые нам модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка, а $\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon\mu\omega^2 L^2 / c^2}$.

Аналогичным образом для базового потенциала $\Phi_{cs} = U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \sin \omega t$ решение находится в форме

$$\begin{aligned}E_r(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \cos(z/L) J_R(r/L) \sin \omega t, \\ E_\varphi(r, z, t) &= 0, \\ E_z(r, z, t) &= +\frac{U_0}{L} \sin(z/L) J_Z(r/L) \sin \omega t, \\ B_r(r, z, t) &= 0, \\ B_\varphi(r, z, t) &= +\varepsilon\mu \frac{U_0}{L} \left(\frac{\omega L}{c}\right) \sin(z/L) J_F(r/L) \cos \omega t, \\ B_z(r, z, t) &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Для базового потенциала $\Phi_{sc} = U_0 \sin(z/L) \times$
 $\times I_0(r/L) \cos \omega t$ решение находится в форме

$$\begin{aligned} E_r(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \sin(z/L) J_R(r/L) \cos \omega t, \\ E_f(r, z, t) &= 0, \\ E_z(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \cos(z/L) J_z(r/L) \cos \omega t, \\ B_r(r, z, t) &= 0, \\ B_f(r, z, t) &= +\varepsilon \mu \frac{U_0}{L} \left(\frac{\omega L}{c} \right) \cos(z/L) J_F(r/L) \sin \omega t, \\ B_z(r, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Для базового потенциала $\Phi_{ss} = U_0 \sin(z/L) \times$
 $\times I_0(r/L) \sin \omega t$ решение находится в форме

$$\begin{aligned} E_r(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \sin(z/L) J_R(r/L) \sin \omega t, \\ E_f(r, z, t) &= 0, \\ E_z(r, z, t) &= -\frac{U_0}{L} \cos(z/L) J_z(r/L) \sin \omega t, \\ B_r(r, z, t) &= 0, \\ B_f(r, z, t) &= -\varepsilon \mu \frac{U_0}{L} \left(\frac{\omega L}{c} \right) \cos(z/L) J_F(r/L) \cos \omega t, \\ B_z(r, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь функции $J_R(s)$, $J_z(s)$, $J_F(s)$ по-прежнему определяются уравнениями (22).

Высокочастотное электромагнитное поле удобно представить в форме (10). Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

• для решения (20) (потенциал $\Phi_{cc} =$
 $= U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \cos \omega t$):

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= U_0 \frac{1}{\lambda^2} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \cos \left(\frac{z}{L} \right) \cos(\omega t), \\ A_r(r, z, t) &= 0, \quad A_f(r, z, t) = 0, \\ A_z(r, z, t) &= U_0 \frac{\varepsilon \mu \omega L}{\lambda^2 c} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \sin \left(\frac{z}{L} \right) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (26)$$

• для решения (23) (потенциал $\Phi_{cs} =$
 $= U_0 \cos(z/L) I_0(r/L) \sin \omega t$):

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= U_0 \frac{1}{\lambda^2} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \cos \left(\frac{z}{L} \right) \sin(\omega t), \\ A_r(r, z, t) &= 0, \quad A_f(r, z, t) = 0, \\ A_z(r, z, t) &= -U_0 \frac{\varepsilon \mu \omega L}{\lambda^2 c} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \sin \left(\frac{z}{L} \right) \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (27)$$

• для решения (24) (потенциал $\Phi_{sc} =$
 $= U_0 \sin(z/L) I_0(r/L) \cos \omega t$):

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= U_0 \frac{1}{\lambda^2} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \sin \left(\frac{z}{L} \right) \cos(\omega t), \\ A_r(r, z, t) &= 0, \quad A_f(r, z, t) = 0, \\ A_z(r, z, t) &= -U_0 \frac{\varepsilon \mu \omega L}{\lambda^2 c} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \cos \left(\frac{z}{L} \right) \sin(\omega t); \end{aligned} \quad (28)$$

• для решения (25) (потенциал $\Phi_{ss} =$
 $= U_0 \sin(z/L) I_0(r/L) \sin \omega t$):

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= U_0 \frac{1}{\lambda^2} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \sin \left(\frac{z}{L} \right) \sin(\omega t), \\ A_r(r, z, t) &= 0, \quad A_f(r, z, t) = 0, \\ A_z(r, z, t) &= U_0 \frac{\varepsilon \mu \omega L}{\lambda^2 c} I_0 \left(\frac{\lambda r}{L} \right) \cos \left(\frac{z}{L} \right) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (29)$$

Эти эталонные аналитические решения соответствуют частному случаю цилиндрических электромагнитных волн, рассмотренных, в частности, в [28]. С их помощью можно сконструировать аналитические решения для архимедовых высокочастотных полей. Пусть, например, рассматривается архимедово поле с базовым потенциалом $\hat{U}(z, t) = U_0 \cos \left(\frac{z}{L} - \frac{t}{T} \right) \cos(\omega t)$ на оси устройства.

После элементарных тригонометрических преобразований получается тождество

$$\begin{aligned} \hat{U}(z, t) &= \frac{U_0}{2} \cos \left(\frac{z}{L} \right) \times \\ &\times \cos \left(\left(\omega + \frac{1}{T} \right) t \right) + \frac{U_0}{2} \cos \left(\frac{z}{L} \right) \cos \left(\left(\omega - \frac{1}{T} \right) t \right) + \\ &+ \frac{U_0}{2} \sin \left(\frac{z}{L} \right) \sin \left(\left(\omega + \frac{1}{T} \right) t \right) - \\ &- \frac{U_0}{2} \sin \left(\frac{z}{L} \right) \sin \left(\left(\omega - \frac{1}{T} \right) t \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Вычисляя суперпозицию полученных эталонных решений, легко можно найти, что требуемое

высокочастотное поле характеризуется скалярным и векторным потенциалами, вычисляемыми как

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(r, z, t) = & + \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \cos(\omega t) \times \\ & \times \left[K_- \left(\frac{r}{L} \right) + K_+ \left(\frac{r}{L} \right) \right] + \\ & + \frac{U_0}{2} \sin\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \sin(\omega t) \times \\ & \times \left[K_- \left(\frac{r}{L} \right) - K_+ \left(\frac{r}{L} \right) \right]; \\ \hat{A}_z(r, z, t) = & \frac{U_0}{2} \frac{\varepsilon \mu \omega L}{c} \cos\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \cos(\omega t) \times \\ & \times \left[-\frac{(\omega - \Omega)}{\omega} K_- \left(\frac{r}{L} \right) + \frac{(\omega + \Omega)}{\omega} K_+ \left(\frac{r}{L} \right) \right] - \\ & - \frac{U_0}{2} \frac{\varepsilon \mu \omega L}{c} \sin\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \sin(\omega t) \times \\ & \times \left[\frac{(\omega - \Omega)}{\omega} K_- \left(\frac{r}{L} \right) + \frac{(\omega + \Omega)}{\omega} K_+ \left(\frac{r}{L} \right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Omega = 1/T$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} K_+(\tau) &= I_0(\lambda_+ \tau) / \lambda_+^2, \quad K_-(\tau) = I_0(\lambda_- \tau) / \lambda_-^2, \\ \lambda_+ &= \sqrt{1 - \varepsilon \mu (\omega + \Omega)^2 L^2 / c^2}, \\ \lambda_- &= \sqrt{1 - \varepsilon \mu (\omega - \Omega)^2 L^2 / c^2}. \end{aligned}$$

В (31) итоговые выражения преобразованы к виду, где "быстрые" частоты ω в явном виде отделены от "медленных" частот Ω . Считая, что $\Omega \ll \omega$, выражения (31) можно упростить:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(r, z, t) \approx & + U_0 \frac{1}{\lambda^2} I_0\left(\frac{\lambda r}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \times \\ & \times \cos(\omega t), \\ \hat{A}_z(r, z, t) \approx & - U_0 \frac{\varepsilon \mu L \omega}{\lambda^2 c} I_0\left(\frac{\lambda r}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L} - \Omega t\right) \times \\ & \times \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя полученные выражения, можно определить (см. следующий раздел 5), как именно искажают максвелловские высокочастотные поправки форму псевдопотенциальной волны. Однако, как будет видно из раздела 6, можно сделать гораздо больше — рассчитать высокочастотное поле, обеспечивающее идеальную волну псевдопотенциала.

5. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Сила, действующая со стороны электромагнитного поля на заряженную частицу с электрическим зарядом q , которая движется со скоростью $\mathbf{v}$, опре-

ределяется формулой $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ (сила Лоренца, названная так потому, что эта формула была получена Оливером Хевисайдом в 1889 г. за три года до аналогичного результата Хендрика Лоренца [42]). Без учета релятивистских поправок уравнения движения заряженной частицы с массой m и зарядом q в электромагнитном поле типа

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}^0(x, y, z, t) + \\ &+ \mathbf{E}^c(x, y, z, t) \cos \omega t + \mathbf{E}^s(x, y, z, t) \sin \omega t; \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \mathbf{B}^0(x, y, z, t) + \\ &+ \mathbf{B}^c(x, y, z, t) \cos \omega t + \mathbf{B}^s(x, y, z, t) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (33)$$

где функции $\mathbf{E}^0(x, y, z, t)$, $\mathbf{E}^c(x, y, z, t)$, $\mathbf{E}^s(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}^0(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}^c(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}^s(x, y, z, t)$ считаются "медленными" по сравнению с "быстрой" частотой ω , имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \left[qE_x^0 + \frac{q}{c}(\dot{y}B_z^0 - \dot{z}B_y^0) \right] + \\ &+ \left[qE_x^c + \frac{q}{c}(\dot{y}B_z^c - \dot{z}B_y^c) \right] \cos \omega t + \\ &+ \left[qE_x^s + \frac{q}{c}(\dot{y}B_z^s - \dot{z}B_y^s) \right] \sin \omega t, \\ m\ddot{y} &= \left[qE_y^0 + \frac{q}{c}(-\dot{x}B_z^0 + \dot{z}B_x^0) \right] + \\ &+ \left[qE_y^c + \frac{q}{c}(-\dot{x}B_z^c + \dot{z}B_x^c) \right] \cos \omega t + \\ &+ \left[qE_y^s + \frac{q}{c}(-\dot{x}B_z^s + \dot{z}B_x^s) \right] \sin \omega t, \\ m\ddot{z} &= \left[qE_z^0 + \frac{q}{c}(\dot{x}B_y^0 - \dot{y}B_x^0) \right] + \\ &+ \left[qE_z^c + \frac{q}{c}(\dot{x}B_y^c - \dot{y}B_x^c) \right] \cos \omega t + \\ &+ \left[qE_z^s + \frac{q}{c}(\dot{x}B_y^s - \dot{y}B_x^s) \right] \sin \omega t. \end{aligned} \quad (34)$$

Усреднение уравнений движения (34) в самом общем случае приводит к достаточно запутанному выражению. Однако выкладки и результирующее выражение можно существенно упростить, если использовать априорную информацию о структуре высокочастотного электромагнитного поля. А именно, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитная индукция $\mathbf{B}$ могут быть выражены через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ по формулам (9), где

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= \varphi^0(x, y, z, t) + \\ &+ \varphi^c(x, y, z, t) \cos \omega t + \varphi^s(x, y, z, t) \sin \omega t, \\ \mathbf{A}(x, y, z, t) &= \mathbf{A}^0(x, y, z, t) + \\ &+ \mathbf{A}^c(x, y, z, t) \cos \omega t + \mathbf{A}^s(x, y, z, t) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (35)$$

Используя процедуру усреднения, описанную в [13, 15, 16, 18], для уравнений (34) с учетом подстановки (35) можно искать решение в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0(t) + x_c(t) \cos \omega t + x_s(t) \sin \omega t + \\ &+ x_{2c}(t) \cos 2\omega t + x_{2s}(t) \sin 2\omega t + \dots; \\ y(t) &= y_0(t) + y_c(t) \cos \omega t + y_s(t) \sin \omega t + \\ &+ y_{2c}(t) \cos 2\omega t + y_{2s}(t) \sin 2\omega t + \dots; \\ z(t) &= z_0(t) + z_c(t) \cos \omega t + z_s(t) \sin \omega t + \\ &+ z_{2c}(t) \cos 2\omega t + z_{2s}(t) \sin 2\omega t + \dots,\end{aligned}\quad (36)$$

где $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ — "медленная" часть траектории $(x(t), y(t), z(t))$, а $x_c(t)$, $y_c(t)$, $z_c(t)$, $x_s(t)$, $y_s(t)$, $z_s(t)$, $x_{2c}(t)$, $y_{2c}(t)$, $z_{2c}(t)$, $x_{2s}(t)$, $y_{2s}(t)$, $z_{2s}(t)$, ... — "медленно" меняющиеся амплитуды при быстро осциллирующих добавках. Считается, что значения медленно меняющихся амплитуд малы по сравнению с медленной частью траектории $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$.

При $\omega \rightarrow \infty$ ожидается, что траектория регулярным образом стремится к предельному решению, в котором все быстро осциллирующие добавки обращаются в ноль. Поэтому высокочастотные добавки должны раскладываться в ряд по обратным степеням частоты ω :

$$\begin{aligned}x_c(t) &= \frac{1}{\omega} x_c^{(1)}(t) + \frac{1}{\omega^2} x_c^{(2)}(t) + \dots; \\ y_c(t) &= \frac{1}{\omega} y_c^{(1)}(t) + \frac{1}{\omega^2} y_c^{(2)}(t) + \dots; \\ z_c(t) &= \frac{1}{\omega} z_c^{(1)}(t) + \frac{1}{\omega^2} z_c^{(2)}(t) + \dots.\end{aligned}\quad (37)$$

В силу малости быстро осциллирующих членов по отношению к основной части траектории $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ потенциальные функции, входящие в уравнения движения (34) можно разложить в ряд Тейлора относительно базовой точки $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$. Если теперь объединить вместе (37), (36) и (35), подставив эти формулы в (34), возможно сгруппировать вместе члены, соответствующие величинам разного порядка и гармоникам с разными частотами и тем самым получить набор уравнений для неизвестных медленных функций, входящих в (36) и (37).

При группировке членов одной степени малости следует учитывать, что $\omega/c \sim 1$ (тогда как по отдельности и ω , и c — большие величины), а также, что значения φ^0 , φ^c , φ^s , A^0 , A^c , A^s и их производные по координатам являются величинами одного порядка и при этом обязаны быть "медленными" функциями времени. В конечном счете, сохраняя члены не выше $1/\omega^2$ и группируя вместе члены, соответствующие разным тригонометрическим гармоникам и разным степеням $1/\omega^k$, получаем соотношения:

$$\begin{aligned}x_c^{(1)}(t) &= 0, \quad x_c^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^c}{\partial x} + \frac{\omega}{c} A_x^s \right), \\ x_s^{(1)}(t) &= 0, \quad x_s^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^s}{\partial x} - \frac{\omega}{c} A_x^c \right), \\ x_{2c}^{(1)}(t) &= 0, \quad x_{2c}^{(2)}(t) = 0, \quad x_{2s}^{(1)}(t) = 0, \quad x_{2s}^{(2)}(t) = 0, \\ y_c^{(1)}(t) &= 0, \quad y_c^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^c}{\partial y} + \frac{\omega}{c} A_y^s \right), \\ y_s^{(1)}(t) &= 0, \quad y_s^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^s}{\partial y} - \frac{\omega}{c} A_y^c \right), \\ y_{2c}^{(1)}(t) &= 0, \quad y_{2c}^{(2)}(t) = 0, \quad y_{2s}^{(1)}(t) = 0, \quad y_{2s}^{(2)}(t) = 0, \\ z_c^{(1)}(t) &= 0, \quad z_c^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^c}{\partial z} + \frac{\omega}{c} A_z^s \right), \\ z_s^{(1)}(t) &= 0, \quad z_s^{(2)}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{\partial \varphi^s}{\partial z} - \frac{\omega}{c} A_z^c \right), \\ z_{2c}^{(1)}(t) &= 0, \quad z_{2c}^{(2)}(t) = 0, \quad z_{2s}^{(1)}(t) = 0, \quad z_{2s}^{(2)}(t) = 0.\end{aligned}\quad (38)$$

Осталось сгруппировать вместе члены, соответствующие нулевой гармонике (т. е. медленно меняющимся во времени функциям), и подставить в полученное соотношение значения (38). Тонким моментом является тот факт, что здесь мы объеди-

нием в одно уравнение члены с разными степенями $1/\omega^k$. В результате получаются замкнутые уравнения для "медленных" функций $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$, соответствующие псевдопотенциальной модели усредненного движения заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_0 &\approx qE_x^0 + \frac{q}{c}(\dot{y}B_z^0 - \dot{z}B_y^0) + q\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}; \\ m\ddot{y}_0 &\approx qE_y^0 + \frac{q}{c}(-\dot{x}B_z^0 + \dot{z}B_x^0) + q\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}; \\ m\ddot{z}_0 &\approx qE_z^0 + \frac{q}{c}(\dot{x}B_y^0 - \dot{y}B_x^0) + q\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $E_x^0 = -\frac{\partial\varphi^0}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x^0}{\partial t}$, $E_y^0 = -\frac{\partial\varphi^0}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y^0}{\partial t}$,
 $E_z^0 = -\frac{\partial\varphi^0}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z^0}{\partial t}$, $B_x^0 = \frac{\partial A_z^0}{\partial y} - \frac{\partial A_y^0}{\partial z}$, $B_y^0 =$
 $= -\frac{\partial A_z^0}{\partial x} + \frac{\partial A_x^0}{\partial z}$, $B_z^0 = \frac{\partial A_y^0}{\partial x} - \frac{\partial A_x^0}{\partial y}$, а псевдопотенциальная функция $\bar{U}(x, y, z, t)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, z, t) &= \frac{q}{4m\omega^2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial x} + \frac{\omega}{c}A_x^s \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial y} + \frac{\omega}{c}A_y^s \right)^2 + \right. \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial z} + \frac{\omega}{c}A_z^s \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^s}{\partial x} - \frac{\omega}{c}A_x^c \right)^2 + \\ &+ \left. \left(\frac{\partial\varphi^s}{\partial y} - \frac{\omega}{c}A_y^c \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^s}{\partial z} - \frac{\omega}{c}A_z^c \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Если скалярный и векторный потенциалы пере- считываются как $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$, $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$, где $\psi = \psi^c(x, y, z, t)\cos\omega t + \psi^s(x, y, z, t)\sin\omega t$ — выбираемая с большой степенью произвольности калибровочная скалярная функция, то значение псевдопотенциала (40) сохраняет свое значение с точностью до членов порядка $1/c$. Тем самым независимо от выбора калибровки скалярного и векторного потенциалов псевдопотенциал (40) будет инвариантной величиной, характеризующей электромагнитное поле — с точностью до поправок более высокого порядка, чем учитывается при выводе усредненных уравнений движения.

6. АРХИМЕДОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Если подставить в формулу (40) аналитические выражения (22)–(32), полученные в разделе "Аналитические решения...", можно оценить искажения "архимедовой" волны, которые возникают из-за высокочастотных максвелловских поправок. В частности, в той мере, в которой справедлива приближенная формула (32), эффект псевдопотенциальной волны для поля (32) сохраняется с поправкой на изменение глубины и профиля псевдопотенциальных ям:

$$\begin{aligned} \bar{U}(r, z, t) &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \times \\ &\times \frac{1}{1-\rho} I_1^2 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1-\rho} \right) \cos^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) + \\ &+ \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \times \\ &\times \left(1 + \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^2 \right) I_0^2 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1-\rho} \right) \sin^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right), \\ \bar{U}_0(z, t) &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \left(1 + \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^2 \right) \sin^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \end{aligned} \quad (41)$$

(здесь $\bar{U}_0(z, t)$ — псевдопотенциал на оси устройства). Для сравнения ниже приводятся формулы, соответствующие волне псевдопотенциала, вычисленной в квазистатическом приближении для высокочастотного электрического поля:

$$\begin{aligned} \bar{U}^e(r, z, t) &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \times \\ &\times \left(I_1^2 \left(\frac{r}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) + I_0^2 \left(\frac{r}{L} \right) \sin^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \right), \\ \bar{U}_0^e(z, t) &= \frac{qU_0^2}{4m\omega^2 L^2} \sin^2 \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Когда при увеличении частоты Ω условие $\Omega \ll \omega$ начинает нарушаться, у поля (31) ухудшаются параметры псевдопотенциальной волны, если только не корректировать высокочастотные напряжения. Чтобы определить способ корректировки, рассмотрим, как должно выглядеть высокочастотное поле, чтобы идеальная волна псевдопотенциала реализовывалась аналитически точно.

Пусть скалярный и векторный потенциалы высокочастотного электромагнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(r, z, t) &= \varphi^c(r, z, t) \cos(\omega t) + \varphi^s(r, z, t) \sin(\omega t), \\ \hat{A}_z(r, z, t) &= A_z^c(r, z, t) \cos(\omega t) + A_z^s(r, z, t) \sin(\omega t),\end{aligned}\quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi^c(r, z, t) &= F^{cc}(r/L) \cos(z/L - \Omega t) + \\ &+ F^{cs}(r/L) \sin(z/L - \Omega t), \\ \varphi^s(r, z, t) &= F^{sc}(r/L) \cos(z/L - \Omega t) + \\ &+ F^{ss}(r/L) \sin(z/L - \Omega t), \\ A_z^c(r, z, t) &= \frac{\varepsilon \mu L}{c} \left[G^{cc}(r/L) \cos(z/L - \Omega t) + \right. \\ &+ G^{cs}(r/L) \sin(z/L - \Omega t) \left. \right], \\ A_z^s(r, z, t) &= \frac{\varepsilon \mu L}{c} \left[G^{sc}(r/L) \cos(z/L - \Omega t) + \right. \\ &+ G^{ss}(r/L) \sin(z/L - \Omega t) \left. \right]\end{aligned}\quad (44)$$

с некоторыми пока не определенными функциями

$$F^{cc}(s), F^{cs}(s), F^{sc}(s), F^{ss}(s), G^{cc}(s), G^{cs}(s), G^{sc}(s), G^{ss}(s).$$

Для того чтобы высокочастотное электромагнитное поле (43) существовало, должна удовлетворяться система уравнений (10). Калибровочное условие $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ позволяет исключить из (44) функции $G^{cc}(s), G^{cs}(s), G^{sc}(s), G^{ss}(s)$:

$$\begin{aligned}G^{cc}(s) &= \Omega \cdot F^{cc}(s) + \omega \cdot F^{ss}(s); \\ G^{ss}(s) &= \omega \cdot F^{cc}(s) + \Omega \cdot F^{ss}(s); \\ G^{cs}(s) &= \Omega \cdot F^{cs}(s) - \omega \cdot F^{sc}(s); \\ G^{sc}(s) &= -\omega \cdot F^{cs}(s) + \Omega \cdot F^{sc}(s).\end{aligned}\quad (45)$$

Оставшиеся уравнения (10) порождают дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d^2 F^{cc}(s)}{ds^2} &= -\frac{1}{s} \frac{dF^{cc}(s)}{ds} + \left(1 - \frac{\varepsilon \mu (\omega^2 + \Omega^2) L^2}{c^2} \right) F^{cc}(s) - \frac{2\varepsilon \mu \Omega \omega L^2}{c^2} F^{ss}(s); \\ \frac{d^2 F^{ss}(s)}{ds^2} &= -\frac{1}{s} \frac{dF^{ss}(s)}{ds} + \left(1 - \frac{\varepsilon \mu (\omega^2 + \Omega^2) L^2}{c^2} \right) F^{ss}(s) - \frac{2\varepsilon \mu \Omega \omega L^2}{c^2} F^{cc}(s); \\ \frac{d^2 F^{cs}(s)}{ds^2} &= -\frac{1}{s} \frac{dF^{cs}(s)}{ds} + \left(1 - \frac{\varepsilon \mu (\omega^2 + \Omega^2) L^2}{c^2} \right) F^{cs}(s) + \frac{2\varepsilon \mu \Omega \omega L^2}{c^2} F^{sc}(s); \\ \frac{d^2 F^{sc}(s)}{ds^2} &= -\frac{1}{s} \frac{dF^{sc}(s)}{ds} + \left(1 - \frac{\varepsilon \mu (\omega^2 + \Omega^2) L^2}{c^2} \right) F^{sc}(s) + \frac{2\varepsilon \mu \Omega \omega L^2}{c^2} F^{cs}(s).\end{aligned}\quad (46)$$

Система (46) распадается на два уравнения для функций $F^{cc}(s), F^{ss}(s)$ и на два уравнения для функций $F^{cs}(s), F^{sc}(s)$. Предыдущие результаты подсказывают, что стоит проверить возможность существования решений (46) в виде суперпозиции модифицированных функций Бесселя нулевого порядка с неопределенными показателями:

$$\begin{aligned}F^{cc}(s) &= \alpha_{cc} I_0(\alpha \cdot s) + \beta_{cc} I_0(\beta \cdot s); \\ F^{ss}(s) &= \alpha_{ss} I_0(\alpha \cdot s) + \beta_{ss} I_0(\beta \cdot s); \\ F^{cs}(s) &= \alpha_{cs} I_0(\alpha \cdot s) + \beta_{cs} I_0(\beta \cdot s); \\ F^{sc}(s) &= \alpha_{sc} I_0(\alpha \cdot s) + \beta_{sc} I_0(\beta \cdot s).\end{aligned}\quad (47)$$

Подставив (47) в (46) легко установить, что единственные подходящие показатели для функций Бесселя это $\alpha = \sqrt{1 - (\varepsilon \mu (\omega - \Omega)^2 L^2 / c^2)} = \lambda_-$ и $\beta = \sqrt{1 - (\varepsilon \mu (\omega + \Omega)^2 L^2 / c^2)} = \lambda_+$, а решением системы являются функции

$$\begin{aligned}F^{cc}(s) &= \alpha_{cc} I_0(\lambda_- s) + \beta_{cc} I_0(\lambda_+ s); \\ F^{ss}(s) &= -\alpha_{cc} I_0(\lambda_- s) + \beta_{cc} I_0(\lambda_+ s); \\ F^{cs}(s) &= \alpha_{cs} I_0(\lambda_- s) + \beta_{cs} I_0(\lambda_+ s); \\ F^{sc}(s) &= \alpha_{cs} I_0(\lambda_- s) - \beta_{cs} I_0(\lambda_+ s)\end{aligned}\quad (48)$$

с произвольными константами $\alpha_{cc}, \beta_{cc}, \alpha_{cs}, \beta_{cs}$.

Решение (48) будет *общим* решением системы (46), удовлетворяющим требованию регулярности в точке $s=0$: требование регулярности влечет за собой равенства $dF^{cc}(0)/ds=0$, $dF^{ss}(0)/ds=0$, $dF^{cs}(0)/ds=0$, $dF^{sc}(0)/ds=0$ для начальных условий, а функции (48) этим условиям удовлетворяют и, кроме того, при надлежащем выборе свободных констант обеспечивают выполнение произвольных. (По-видимому, полное общее решение для (46) можно получить, если подключить к игре парные модифицированные функции Бесселя нулевого порядка $Y_0(i\beta s)$ и $Y_0(i\beta s)$, но проверка этого факта не является нашей задачей.)

Рассмотрим теперь поведение псевдопотенциала для полученного электромагнитного поля. Вычислив по формуле (40) соответствующее выражение, получим следующую формулу для псевдопотенциала на оси системы, т. е. при $r=0$:

$$\bar{U}_0(z, t) = \left(\frac{q}{4m\omega^2 L^2} \right) \left[\hat{U}_0 + \hat{U}_{\sin} \sin(2z/L - 2\Omega t) + \hat{U}_{\cos} \cos(2z/L - 2\Omega t) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \hat{U}_0 &= (\alpha_{cc}^2 + \alpha_{cs}^2)(1 - \rho_A + \rho_A^2) + \\ &+ (\beta_{cc}^2 + \beta_{cs}^2)(1 - \rho_B + \rho_B^2) - 2\rho(\alpha_{cc}\beta_{cs} - \alpha_{cs}\beta_{cc}) - \\ &- 2(\rho - \rho_A\rho_B)(\alpha_{cc}\beta_{cc} + \alpha_{cs}\beta_{cs}), \\ \hat{U}_{\sin} &= (\beta_{cc}^2 - \beta_{cs}^2)\rho_B - (\alpha_{cc}^2 - \alpha_{cs}^2)\rho_A - \\ &- 2\beta_{cc}\beta_{cs}\rho_B(1 - \rho_B) - 2\alpha_{cc}\alpha_{cs}\rho_A(1 - \rho_A) + \\ &+ 2(\alpha_{cs}\beta_{cc} + \alpha_{cc}\beta_{cs})(1 - \rho + \rho_A\rho_B) - \\ &- (\alpha_{cc}\beta_{cc} - \alpha_{cs}\beta_{cs})(\rho_B - \rho_A), \\ \hat{U}_{\cos} &= (\beta_{cc}^2 - \beta_{cs}^2)\rho_B(1 - \rho_B) + \\ &+ (\alpha_{cc}^2 - \alpha_{cs}^2)\rho_A(1 - \rho_A) + 2\beta_{cc}\beta_{cs}\rho_B - \\ &- 2\alpha_{cc}\alpha_{cs}\rho_A - (\alpha_{cs}\beta_{cc} + \alpha_{cc}\beta_{cs})(\rho_B - \rho_A) - \\ &- 2(\alpha_{cc}\beta_{cc} - \alpha_{cs}\beta_{cs})(1 - \rho + \rho_A\rho_B) \end{aligned}$$

(здесь введены обозначения $\rho = \varepsilon\mu\omega^2 L^2 / c^2$, $\rho_A = \varepsilon\mu\omega(\omega - \Omega)L^2 / c^2$, $\rho_B = \varepsilon\mu\omega(\omega + \Omega)L^2 / c^2$).

Можно заметить, что с формальной точки зрения при любом выборе констант α_{cc} , β_{cc} , α_{cs} , β_{cs} наблюдается некоторое подобие архимедова эффекта — а именно, синусоидальная псевдопотенциальная волна, бегущая на фоне постоянного уровня псевдопотенциала. Однако оптимальный осевой профиль волны псевдопотенциала $\bar{U}_0(z, t)$, соответствующий формуле (42), можно получить

только для конкретных наборов значений α_{cc} , β_{cc} , α_{cs} , β_{cs} (что, в частности, влечет за собой подстройку формы напряжений на электродах в зависимости от значений частот ω и Ω).

Один из возможных вариантов, обеспечивающих оптимальный осевой профиль волны псевдопотенциала, реализуется при выборе

$$\alpha_{cc} = \beta_{cc} = \frac{1}{2} U_0 \frac{1}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2}}, \quad \alpha_{cs} = \beta_{cs} = 0.$$

Итоговое высокочастотное электромагнитное поле описывается формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(r, z, t) &= + \frac{U_0}{2} \times \\ &\times \left[\frac{I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) + I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right)}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2}} \right] \times \\ &\times \cos \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \cos(\omega t) + \frac{U_0}{2} \times \\ &\times \left[\frac{I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) - I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right)}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2}} \right] \times \\ &\times \sin \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \sin(\omega t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_z(r, z, t) &= - \frac{U_0}{2} \frac{(\varepsilon\mu\omega L/c)}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2}} \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) - \right. \\ &- \left. \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right) I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) \right] \times \\ &\times \cos \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \cos(\omega t) - \\ &- \frac{U_0}{2} \frac{(\varepsilon\mu\omega L/c)}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right) I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1 - \rho \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \right) \right] \times \\ \times \sin \left(\frac{z}{L} - \Omega t \right) \sin(\omega t).$$

Возможны и другие комбинации коэффициентов α_{cc} , β_{cc} , α_{cs} , β_{cs} , обеспечивающие оптимальный осевой профиль волны псевдопотенциала. Следует отметить, что значения α_{cc} , β_{cc} , α_{cs} , β_{cs} , соответствующие формуле (31), оптимальными не являются.

7. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В [12] показано, что наряду с осесимметричными высокочастотными электрическими полями вида $U_0 \cdot I_0(r/L) \cos(z/L - \Omega t) \cos(\omega t + \varphi)$, обладающими архимедовыми свойствами, целесообразно также использовать и мультипольные высокочастотные электрические поля с аналогичной структурой. При квазистатическом приближении высокочастотного электрического поля эти поля описываются электрическими потенциалами вида

$$U_n \cdot 2^n n! \cdot \cos(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L - \Omega t) \cos(\omega t + \varphi),$$

$$U_n \cdot 2^n n! \cdot \sin(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L - \Omega t) \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\theta = \arctg(y/x)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $I_n(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка. (Двумерные полиномиальные мультипольные поля n -го порядка порождаются формулами $r^n \cos(n\theta)$ и $r^n \sin(n\theta)$, но поскольку $2^n n! I_n(r/L) \approx (r/L)^n + \dots$, то $2^n n! I_n(r/L)/(r/L)^n$ будет регулярной функцией, стремящейся вблизи оси к единице, и рассматриваемые потенциалы действительно ведут себя в окрестности оси как соответствующие мультиполи.)

Подобно осесимметричному случаю, мультипольные высокочастотные электрические поля с архимедовыми свойствами конструируются как суперпозиции мультипольных бегущих волн — электрических потенциалов вида

$$U_n \cos(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L) \cos(\omega \pm \Omega)t,$$

$$U_n \cos(n\theta) I_n(r/L) \sin(z/L) \cos(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \sin(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L) \cos(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \sin(n\theta) I_n(r/L) \sin(z/L) \cos(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \cos(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L) \sin(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \cos(n\theta) I_n(r/L) \sin(z/L) \sin(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \sin(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L) \sin(\omega \pm \Omega)t, \\ U_n \sin(n\theta) I_n(r/L) \sin(z/L) \sin(\omega \pm \Omega)t.$$

Легко проверить прямой подстановкой, что такие квазистатические электрические потенциалы удовлетворяют трехмерному уравнению Лапласа.

Имеются точные решения уравнений Максвелла, соответствующие этим квазистатическим электрическим полям. Так, квазистатическому высокочастотному электрическому потенциалу

$$U_n \cdot 2^n n! \cdot \cos(n\theta) I_n(r/L) \cos(z/L) \cos \omega t$$

соответствуют электромагнитные потенциалы

$$\varphi = U_n \frac{1}{\lambda^2} 2^n n! \cdot \cos(n\theta) I_n(\lambda r/L) \cos(z/L) \cos \omega t,$$

$$A_x = A_y = 0,$$

$$A_z = U_n \frac{\varepsilon \mu \omega L}{\lambda^2 c} \cdot 2^n n! \cdot \cos(n\theta) I_n(\lambda r/L) \sin(z/L) \sin \omega t,$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon \mu \omega^2 L^2 / c^2}$ (электромагнитные потенциалы нормированы так, чтобы осевая компонента напряженности электрического поля вблизи оси совпадала с напряженностью электрического поля у квазистатического прототипа). Аналогичным образом строятся максвелловские аналоги для остальных квазистатических электрических полей типа бегущей волны.

Комбинируя полученные электромагнитные потенциалы по той же схеме, по которой из квазистатических высокочастотных электрических полей типа бегущей волны образуются высокочастотные электрические поля с архимедовыми свойствами, можно сконструировать точные аналитические решения уравнений Максвелла — аналоги архимедовых высокочастотных электрических полей мультипольного типа. Технически эта процедура полностью аналогична операциям, проделанным выше для осесимметричных электромагнитных потенциалов. Практического значения в настоящий момент максвелловские электромагнитные поля с архимедовыми свойствами, по всей видимости, не имеют.

ПРИЛОЖЕНИЕ

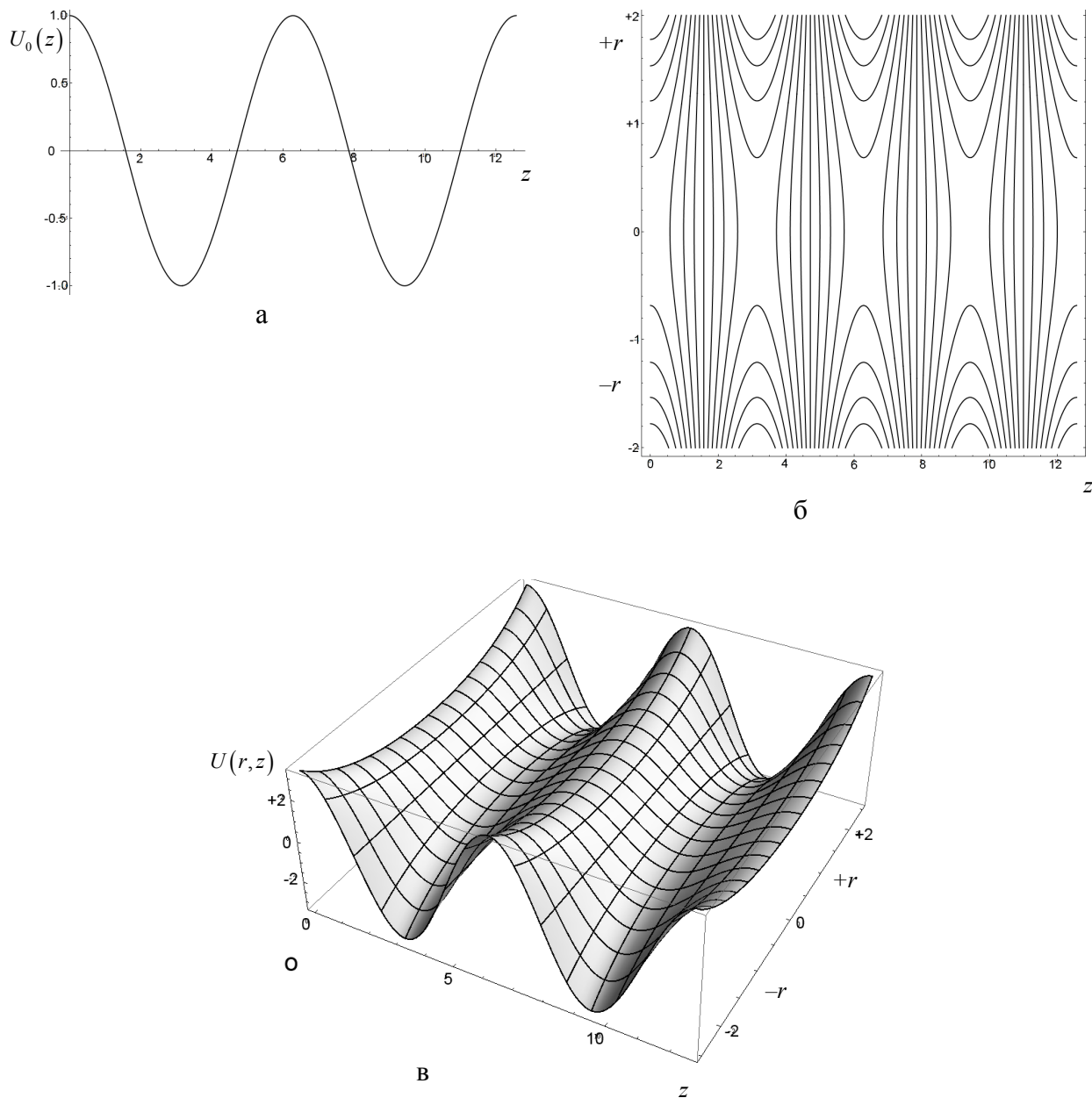


Рис. П1. Осесимметричное электростатическое поле с синусоидальным поведением потенциала вдоль оси OZ .

а — график безразмерного потенциала $u_0(z) = \cos(z)$ на оси OZ ; б — эквипотенциальные линии безразмерного осесимметричного потенциала $u(r, z) = \cos(z)I_0(r)$; в — трехмерный график безразмерного осесимметричного потенциала $u(r, z) = \cos(z)I_0(r)$

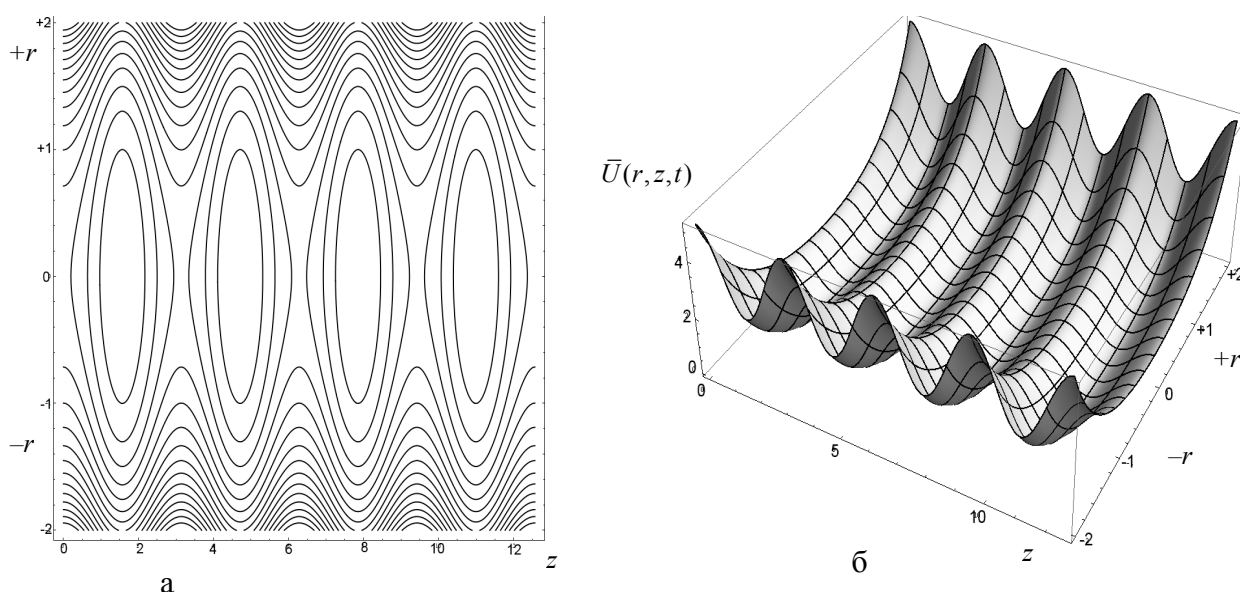


Рис. П2. Псевдопотенциал $\bar{U}(r, z, t)$ архимедова высокочастотного электрического поля $U(r, z, t) = U_0 \cos(z/L - t/T) I_0(r/L) \cos(\omega t)$.

а — эквипотенциальные линии псевдопотенциала $\bar{U}(r, z, t)$ в плоскости rz для фиксированного момента времени; б — трехмерный график псевдопотенциала $\bar{U}(r, z, t)$ для фиксированного момента времени (графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах)

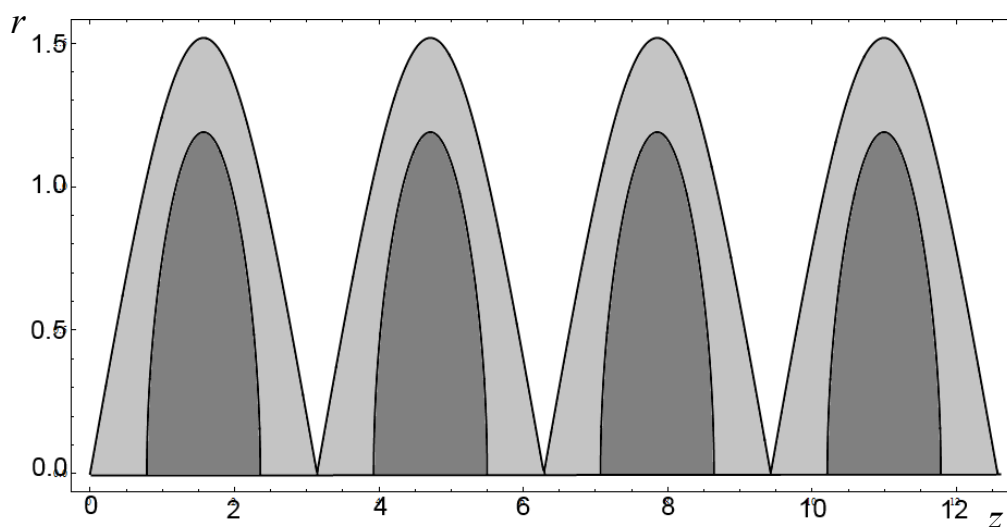


Рис. П3. Границы трехмерных областей захвата заряженных частиц, построенные на основе псевдопотенциальной модели движения с псевдопотенциалом (4).

Внешний уровень соответствует границе $\bar{U}(r, z, t) = qU_0^2 / (4m\omega^2 L^2)$ — максимально возможной глубине синусоидальной волны псевдопотенциала. Внутренний уровень соответствует границе $\bar{U}(r, z, t) = \frac{1}{2} qU_0^2 / (4m\omega^2 L^2)$ — уровню синусоидальной волны, ограниченной точками перегиба синусоидального профиля на оси устройства (т. е. точками, соответствующими максимальной возвращающей силе, направленной к центру псевдопотенциальной ямы). Графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах $z' = z/L$, $r' = r/L$ для фиксированно-

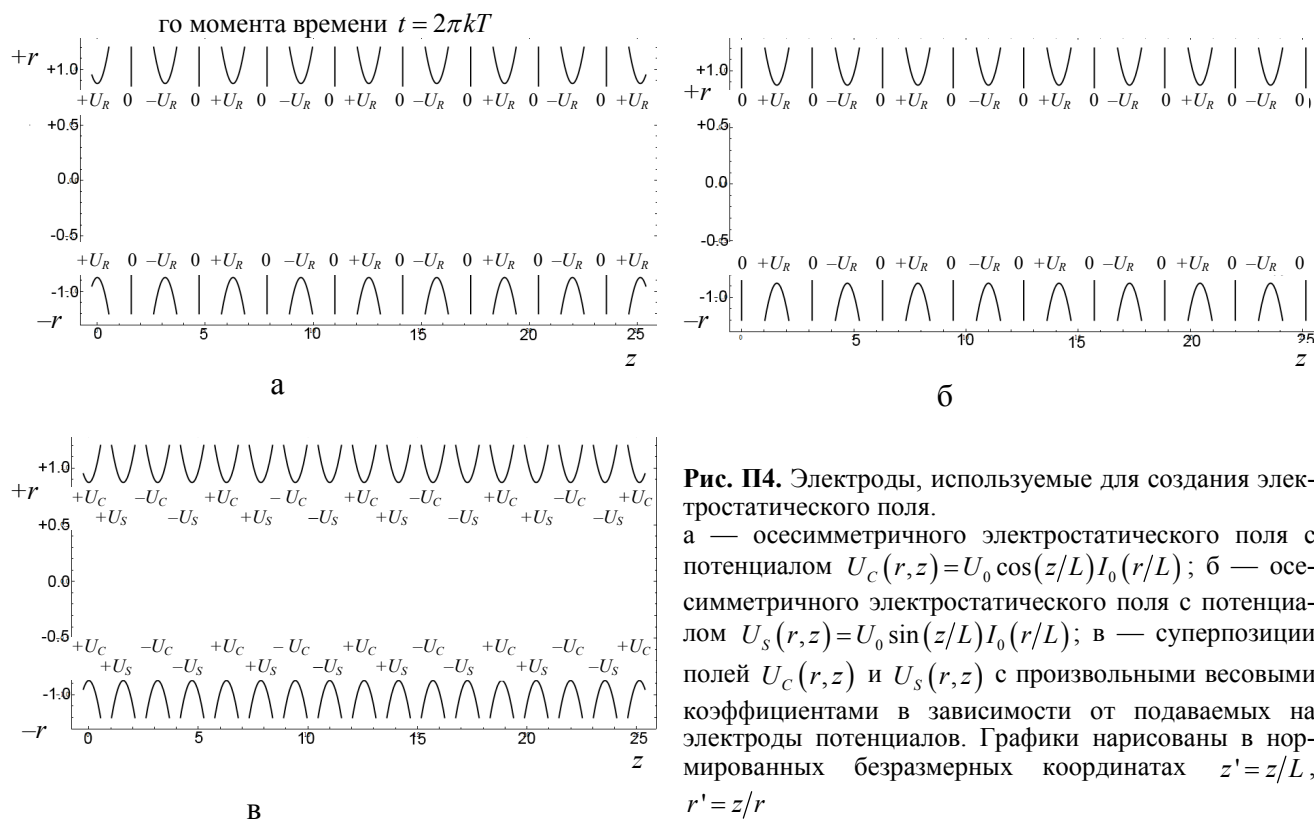


Рис. П4. Electrodes, используемые для создания электростатического поля.

а — осесимметричного электростатического поля с потенциалом $U_c(r, z) = U_0 \cos(z/L) I_0(r/L)$; **б** — осесимметричного электростатического поля с потенциалом $U_s(r, z) = U_0 \sin(z/L) I_0(r/L)$; **в** — суперпозиции полей $U_c(r, z)$ и $U_s(r, z)$ с произвольными весовыми коэффициентами в зависимости от подаваемых на электроды потенциалов. Графики нарисованы в нормированных безразмерных координатах $z' = z/L$, $r' = z/r$

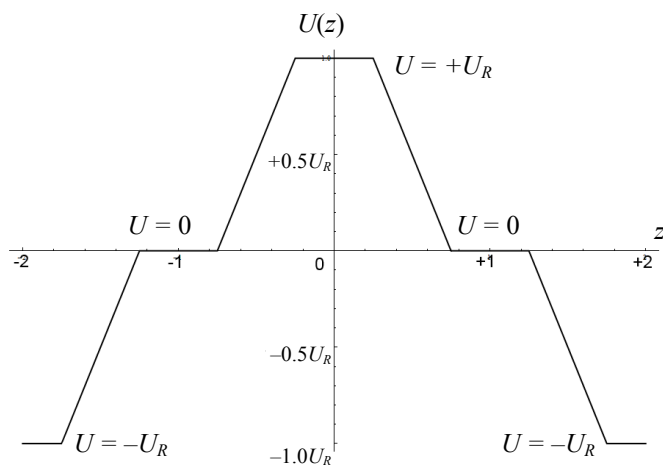


Рис. П5. Грубая модель распределения потенциала вдоль горизонтальной линии $r = R$, проходящей у края отверстий кольцевых электродов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердников А.С. Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 2. С. 121–132.
2. Бердников А.С. Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц: общая формула // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 3. С. 83–96.
3. Бердников А.С. Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц: временные сигналы, характеризующие "медленным" и "быстрым" временами // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 75–85.
4. Бердников А.С. Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц: приборы и устройства // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 86–102.
5. Бердников А.С. Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц: комментарии к общей формуле для меняющихся во времени псевдопотенциалов // Научное приборостроение. 2012. Т. 22, № 2. С. 105–111.
6. Андреева А.Д., Бердников А.С. Устройства для манипулирования заряженными частицами на основе принципа архимедова винта // Сборник тезисов докладов IV Всероссийской конференции и V съезда Всероссийского масс-спектрометрического общества "Масс-спектрометрия и ее прикладные проблемы" (Москва, 5–9 сентября 2011 г.). 2011. С. 137.
7. Андреева А.Д., Бердников А.С. Масс-спектрометрические устройства на основе радиочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами // Масс-спектрометрия. 2011. Т. 8, № 4. С. 293–296.
8. Andreyeva A.D., Berdnikov A.S. Mass spectrometric devices with archimedean radio frequency electric fields // Journal of Analytical Chemistry. 2012. V. 67, N 13. P. 1034–1037.
9. Бердников А.С., Андреева А.Д. Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент РФ на полезную модель RU 113611 (дата приоритета/подачи заявки: 05.05.2011).
10. Бердников А.С., Андреева А.Д. Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент РФ RU 2465679 от 2012 (дата приоритета/подачи заявки: 05.05.2011).
11. Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R. Device for manipulating charged particles. Патентная заявка WO 2012/150351 (приоритет 05.05.2011, дата подачи заявки 04.05.2012).
12. Бердников А.С. Управление транспортировкой заряженных частиц высокочастотными электрическими полями с квазидискретным спектром. Автореф. и дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 2014.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика (сер. "Теоретическая физика", т. I). М.: Физматгиз, 1958. 206 с. (С. 119–121).
14. Миллер М.А. Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях. Автореф. и дис. ... д-ра физ.-мат. наук. 1960.
15. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
16. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers (Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, v. 157). 2009. Elsevier. 677 p.
17. Чирков А.Г. Асимптотическая теория взаимодействия заряженных частиц и квантовых систем с внешними электромагнитными полями. Автореф. и дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 2001.
18. Чирков А.Г. Асимптотическая теория взаимодействия заряженных частиц и квантовых систем с внешними электромагнитными полями. Санкт-Петербург: СПбГТУ. 256 с.
19. Tolmachev A.V., Kim T., Udseth H.R. et al. Characterization of an improved electrodynamical ion funnel interface for electrospray ionization mass spectrometry // International Journal of Mass Spectrometry. 2000. V. 203. P. 31–47.
20. Бердников А.С., Галль Н.Р. Радиочастотные транспортирующие ловушки с периодическими электродами без паразитных областей захвата // Масс-спектрометрия. 2013. Т. 4, № 4. С. 224–230.
21. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. 1979. М.: Наука. 832 с.
22. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 798 с.
23. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. 2: трансцендентные функции (2-е изд.). М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы (Физматгиз), 1963. 516 с.
24. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
25. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы (Физматгиз), 1963. 104 с.
26. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электричество и магнетизм (сер. "Фейнмановские лекции по физике", т. 5). М.: Мир, 1977. 347 с.
27. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электродинамика (сер. "Фейнмановские лекции по физике", т. 6). М.: Мир, 1977. 300 с.
28. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1948. 540 с.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля (сер. "Теоретическая физика", т. II). М.: Физматлит, 2006. 533 с.
30. Википедия, статья "Уравнения Максвелла". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла).
31. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 424 с.
32. Википедия, статья "Теорема разложения Гельмгольца". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_разложения_Гельмгольца).
33. Википедия, статья "Калибровка векторного потен-

- циала". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Калибровка_векторного_потенциала).
34. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1968. 720 с.
 35. Википедия, статья "Цилиндрическая система координат". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Цилиндрическая_система_координат).
 36. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. 445 с.
 37. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.-Л.: Гос. технико-теоретическое издательство, 1934. 360 с.
 38. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и частных производных. М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы (ГИТТЛ), 1948. 432 с.
 39. Программа для символьных вычислений *Mathematica* 9.0. URL: (<http://www.wolfram.com>).
 40. Шаниро И.С. К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физических наук. 1972. Т. 108, вып. 2. С. 320–333.
 41. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. Классические теории. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 511 с.
 42. Болотовский Б.М. Оливер Хевисайд. М.: Наука, 1985. 260 с. (С. 43–44).

*Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург*

Контакты: Бердников Александр Сергеевич,
asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 8.01.2014

HIGH FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELDS WITH 'ARCHIMEDEAN' PROPERTIES WHICH ARE CALCULATED TAKEN MAXWELL'S TERMS INTO ACCOUNT

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

The paper considers the Maxwell's corrections as applied to high frequency electric fields used for 'Archimedean' conveying of charged particles. It is shown that there are the exact analytical solutions of the Maxwell's equations which can be used for the Archimedean conveying of charged particles. The said electromagnetic fields implement the analytically ideal Archimedean conveying of charged particles even when the Maxwell's terms are essential in the output electromagnetic field and these terms influence strongly the movement of the charged particles.

Keywords: electromagnetic fields, Maxwell equations, charged particles in high frequency electromagnetic fields

REFERENCES

1. Berdnikov A.S. Menyayushchiysya vo vremeni psevdopotentsial i yego primeneniye k opisaniyu usrednennogo dvizheniya zaryazhennykh chastits // Nauchnoye priborostroyeniye. 2011. T. 21, № 2. S. 121–132 (in Russian).
2. Berdnikov A.S. Menyayushchiysya vo vremeni psevdopotentsial i yego primeneniye k opisaniyu usrednennogo dvizheniya zaryazhennykh chastits: obshchaya formula // Nauchnoye priborostroyeniye. 2011. T. 21, № 3. S. 83–96 (in Russian).
3. Berdnikov A.S. Menyayushchiysya vo vremeni psevdopotentsial i yego primeneniye k opisaniyu usrednennogo dvizheniya zaryazhennykh chastits: vremennyye signaly, kharakterizuyemyye "medlennym" i "bystryim" vremenami // Nauchnoye priborostroyeniye. 2011. T. 21, № 4. S. 75–85 (in Russian).
4. Berdnikov A.S. Menyayushchiysya vo vremeni psevdopotentsial i yego primeneniye k opisaniyu usrednennogo dvizheniya zaryazhennykh chastits: pribory i ustroystva // Nauchnoye priborostroyeniye. 2011. T. 21, № 4. S. 86–102 (in Russian).
5. Berdnikov A.S. Menyayushchiysya vo vremeni psevdopotentsial i yego primeneniye k opisaniyu usrednennogo dvizheniya zaryazhennykh chastits:

- kommentarii k obshchey formule dlya menyayushchikhsya vo vremeni psevdopotentsialov // Nauchnoye priborostroyeniye. 2012. T. 22, № 2. S. 105–111 (in Russian).
6. *Andreyeva A.D., Berdnikov A.S.* Ustroystva dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami na osnove printsipa arkhimedova vinta // Sbornik tezisev dokladov IV Vserossiyskoy konferentsii i V syezda Vserossiyskogo mass-spektrometricheskogo obshchestva "Mass-spektrometriya i yeye prikladnyye problemy" (Moskva, 05–09 sentyabrya 2011 g.). 2011. S. 137 (in Russian).
 7. *Andreyeva A.D., Berdnikov A.S.* Mass-spektrometricheskiye ustroystva na osnove radiochastotnykh elektricheskikh poley s arkhimedovymi svoystvami // Mass-spektrometriya. 2011. T. 8, № 4. S. 293–296 (in Russian).
 8. *Andreyeva A.D., Berdnikov A.S.* Mass spectrometric devices with archimedean radio frequency electric fields // Journal of Analytical Chemistry. 2012. V. 67, N 13. P. 1034–1037.
 9. *Berdnikov A.S., Andreyeva A.D.* Ustroystvo dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami. Patent RF na poleznuyu model RU 113611 (data prioriteta/podachi zayavki: 05.05.2011) (in Russian).
 10. *Berdnikov A.S., Andreyeva A.D.* Ustroystvo dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami. Patent RF RU 2465679 ot 2012 (data prioriteta/podachi zayavki: 05.05.2011) (in Russian).
 11. *Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R.* Device for manipulating charged particles. Patentnaya zayavka WO 2012/150351 (prioritet 05.05.2011, data podachi zayavki 04.05.2012). (in Russian).
 12. *Berdnikov A.S.* Upravleniye transportirovkoj zaryazhennykh chastits vysokochastotnymi elektricheskimi polyami s kvazidiskretnym spektrom. Avto-ref. i dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk. Sankt-Peterburg, 2014 (in Russian).
 13. *Landau L.D., Lifshits Ye.M.* Mekhanika (ser. "Teoreticheskaya fizika", t. I). M.: Fizmatgiz, 1958. 206 s. (S. 119–121) (in Russian).
 14. *Miller M.A.* Dvizheniye zaryazhennykh chastits v vysokochastotnykh elektromagnitnykh polyakh. Avto-ref. i dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk. 1960 (in Russian).
 15. *Zaslavskiy G.M., Sagdeyev R.Z.* Vvedeniye v nelineynuyu fiziku: ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa. M.: Nauka, 1988. 368 s. (in Russian).
 16. *Yavor M.I.* Optics of charged particle analyzers (Ser. Advances of Imaging and Electron Physics, v. 157). 2009. Elsevier. 677 p.
 17. *Chirkov A.G.* Asimptoticheskaya teoriya vzaimodeystviya zaryazhennykh chastits i kvantovykh sistem s vneshnimi elektromagnitnymi polyami. Avto-ref. i dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk. Sankt-Peterburg, 2001 (in Russian).
 18. *Chirkov A.G.* Asimptoticheskaya teoriya vzaimodeystviya zaryazhennykh chastits i kvantovykh sistem s vneshnimi elektromagnitnymi polyami. Sankt-Peterburg: SPbGTU. 256 s. (in Russian).
 19. *Tolmachev A.V., Kim T., Udseth H.R. et al.* Characterization of an improved electrodynamic ion funnel interface for electrospray ionization mass spectrometry // International Journal of Mass Spectrometry. 2000. V. 203. P. 31–47.
 20. *Berdnikov A.S., Gall N.R.* Radiochastotnyye transportiruyushchiye lovushki s periodicheskimi elektrodami bez parazitnykh oblastey zakhvata // Mass-spektrometriya. 2013. T. 4, № 4. S. 224–230 (in Russian).
 21. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsialnym funktsiyam. 1979. M.: Nauka. 832 s. (in Russian).
 22. *Vatson G.N.* Teoriya besselevykh funktsiy. M.: Izd-vo inostrannoy literatury, 1949. 798 s. (in Russian).
 23. *Uittek E.T., Watson Dzh.N.* Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: transtsendentnyye funktsii (2-e izd.). M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury (Fizmatgiz), 1963. 516 s. (in Russian).
 24. *Beytmen G., Erdeyi A.* Vysshieye transtsendentnyye funktsii. Tom 2: funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnyye mnogochleny. M.: Nauka, 1966. 296 s. (in Russian).
 25. *Kampe de Ferye Zh., Kempbell R., Peto G., Fogel T.* Funktsii matematicheskoy fiziki. Spravochnoye rukovodstvo. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury (Fizmatgiz), 1963. 104 s. (in Russian).
 26. *Feynman R., Leyton R., Sands M.* Elektrichestvo i magnetizm (ser. "Feynmanovskiye lektsii po fizike", t. 5). M.: Mir, 1977. 347 s. (in Russian).
 27. *Feynman R., Leyton R., Sands M.* Elektrodinamika (ser. "Feynmanovskiye lektsii po fizike", t. 6). M.: Mir, 1977. 300 s. (in Russian).
 28. *Stretton Dzh. A.* Teoriya elektromagnetizma. M.-L.: OGIZ-GITTL, 1948. 540 s. (in Russian).
 29. *Landau L.D., Lifshits Ye.M.* Teoriya polya (ser. "Teoreticheskaya fizika", t. II). M.: Fizmatlit, 2006. 533 s. (in Russian).
 30. Vikipediya, statya "Uravneniya Maksvella". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Uravneniya_Maksvella).
 31. *Kochin N.E.* Vektornoye ischisleniye i nachala tenzornogo ischisleniya. M.: Nauka, 1965. 424 s. (in Russian).
 32. Vikipediya, statya "Teorema razlozheniya Gelmgoltsa". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Teorema_razlozheniya_Gelmgoltsa).
 33. Vikipediya, statya "Kalibrovka vektornogo potentsiala". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Kalibrovka_vektornogo_potentsiala).
 34. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: opredeleniya, teoremy, formuly. M.: Nauka, 1968. 720 s. (in Russian).
 35. Vikipediya, statya "Tsilindricheskaya sistema koordinat". URL: (http://ru.wikipedia.org/wiki/Tsilindricheskaya_sistema_koordinat).
 36. *Trikomi F.* Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh. M.: Izd-vo inostrannoy literatury, 1957. 445 s. (in Russian).
 37. *Gyunter N.M.* Integrirovaniye uravneniy pervogo porядka v chastnykh proizvodnykh. M.-L.: Gos. tekhniko-teoreticheskoye izdatelstvo, 1934. 360 s. (in Russian).
 38. *Finikov S.P.* Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii. Teoriya sovместimo-sti sistem differentsialnykh uravneniy v polnykh differentsialakh i chastnykh proizvodnykh. M.-L.: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury (GITTL), 1948. 432 s. (in Russian).

- Russian).
39. Programma dlya simbolnykh vychisleniy Mathematica 9.0. URL: (<http://www.wolfram.com>).
40. *Shapiro I.S.* K istorii otkrytiya uravneniy Mak-svella // *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 1972. T. 108, vyp. 2. S. 320–333 (in Russian).
41. *Uitteker E.* Istoriya teorii efira i elektrichestva. Klassicheskiye teorii. Moskva-Izhevsk: RKhD, 2001. 511 s. (in Russian).
42. *Bolotovskiy B.M.* Oliver Khevisayd. M.: Nauka, 1985. 260 s. (S. 43–44) (in Russian).