

УДК 537.533

© И. Ф. Спивак-Лавров, Г. А. Доскеев, Т. Ж. Тлеубаева

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ОСЕВОЙ И ТРАНСАКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Предложен метод расчета осесимметричных и трансаксиальных полей, основанный на разбиении потенциала на два слагаемых. Основное слагаемое является гармонической функцией двух переменных $\eta = \ln(\rho/\rho_0)$ и z , удовлетворяющей заданным граничным условиям. Гармоническая составляющая потенциала находится аналитически с помощью методов теории функций комплексной переменной. Второе слагаемое является решением неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями Дирихле и может быть найдено численно с необходимой точностью.

Кл. сл.: осесимметричные линзы, осесимметричные зеркала, трансаксиальные линзы, трансаксиальные зеркала, гармонические функции двух переменных

ВВЕДЕНИЕ

Обычно электростатические поля трансаксиальных и осесимметричных корпускулярно-оптических систем описываются в цилиндрической системе координат ρ, ψ, z . Уравнение Лапласа для потенциала φ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

В частном случае, когда потенциал φ зависит только от переменных ρ, ψ , можно ввести безразмерную переменную

$$\eta = \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

где ρ_0 — некоторая характерная длина (обычно радиус цилиндрической поверхности). В переменных η, ψ потенциал $\varphi(\eta, \psi)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (3)$$

Потенциал $\varphi(\eta, \psi)$ является гармонической функцией переменных η, ψ , и для его нахождения может быть использован весь арсенал теории функций комплексной переменной (ТФКП).

В случае трансаксиальных и осесимметричных систем потенциал электростатического поля φ за-

висит только от переменных ρ, z и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

В монографии [1] рассмотрены различные аналитические методы решения уравнения (4) для расчета трансаксиальных и осесимметричных полей. Как известно, Ю.К. Голиков был приверженцем и знатоком аналитических методов. Особенно ему нравился способ Саулиты, позволяющий восстановить пространственное распределение потенциала по его распределению в средней плоскости $z=0$ трансаксиальной системы или на оси симметрии z осесимметричных систем.

Наиболее общим методом решения граничных задач для уравнения (4) является стандартный метод разделения переменных [2]. При этом потенциал представляется в виде рядов функций Бесселя. Однако эти ряды обычно плохо сходятся и неудобны для проведения численного расчета траекторий частиц (см., например, [3]).

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА

Если в уравнении (4) перейти к безразмерным переменным $\eta, \zeta = z/\rho_0$, используя замену (2), то получим следующее уравнение для потенциала $\varphi(\eta, \zeta)$:

$$e^{-2\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в области $\rho \cong \rho_0$ переменная $\eta \cong 0$ и потенциал $\varphi(\eta, \zeta)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Будем искать потенциал $\varphi(\eta, \zeta)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi(\eta, \zeta) = \varphi^{(0)}(\eta, \zeta) + \varphi^{(1)}(\eta, \zeta). \quad (6)$$

Здесь $\varphi^{(0)}(\eta, \zeta)$ — гармонический потенциал, удовлетворяющий двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (7)$$

и заданным граничным условиям. С помощью методов ТФКП он может быть найден в замкнутом виде. Тогда второе слагаемое $\varphi^{(1)}(\eta, \zeta)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле и является решением следующего неоднородного уравнения:

$$e^{-2\eta} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = (1 - e^{-2\eta}) \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \eta^2}. \quad (8)$$

В большинстве случаев уже слагаемое $\varphi^{(0)}(\eta, \zeta)$ является достаточно хорошим приближением для расчета потенциала. Это связано с тем, что большие значения производная $\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \zeta^2}$ в правой части (8) принимает в области, где $\eta \cong 0$. В этой области $\varphi^{(1)}(\eta, \zeta)$ приближенно удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (9)$$

которое при нулевых граничных условиях Дирихле на замкнутой границе имеет тождественно нулевое решение.

РАСЧЕТ ПОЛЯ ДВУХЭЛЕКТРОДНОЙ ТРАНСАКСИАЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Простейшая иммерсионная трансаксиальная линза схематически изображена на рис. 1, где показана также декартова система координат x, y, z . Трансаксиальная линза представляет собой две параллельные пластины, разрезанные прямым круговым цилиндром радиуса R , ось которого совпадает с осью z [4].

Начало декартовой системы координат находится в средней плоскости линзы $z=0$, V_1 и V_2 — потенциалы электродов, d — расстояние между пластинами. Зазор между электродами считается бесконечно узким. Вдали от краев пластин электростатический потенциал φ зависит только от переменных $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z . Вводя безразмерные переменные η и ζ :

$$\begin{cases} \eta = \ln \frac{\rho}{R}, \\ \zeta = \frac{z}{R}, \end{cases} \quad (10)$$

получим уравнение для потенциала (5). Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям в рассматриваемой трансаксиальной линзе, представим в виде:

$$\varphi(\eta, \zeta) = \frac{V_1 + V_2}{2} + F(\eta, \zeta), \quad (11)$$

где функция $F(\eta, \zeta)$ удовлетворяет следующим граничным условиям в полосе $\zeta = \pm \zeta_0 = \pm \frac{d}{2R}$:

$$F(\eta, \pm \zeta_0) = \begin{cases} V & \text{для } \eta > 0, \\ -V & \text{для } \eta < 0. \end{cases} \quad (12)$$

В последней формуле $V = \frac{V_1 - V_2}{2}$.

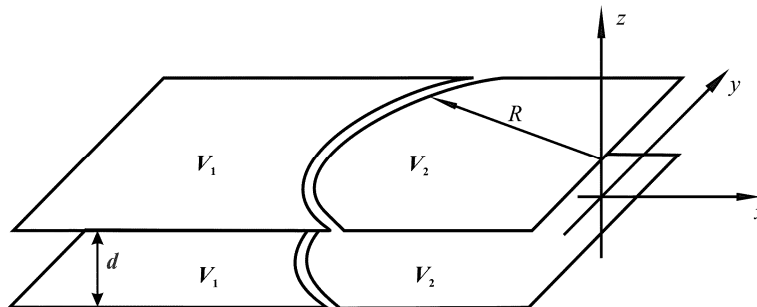


Рис. 1. Схематическое изображение трансаксиальной линзы

Решение уравнения (5) для функции $F(\eta, \zeta)$ представим в виде

$$F(\eta, \zeta) = F^{(0)}(\eta, \zeta) + F^{(1)}(\eta, \zeta). \quad (13)$$

Здесь $F^{(0)}(\eta, \zeta)$ гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям (12):

$$F^{(0)}(\eta, \zeta) = -V + \frac{2V}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{1-u}{v} + \operatorname{arctg} \frac{1+u}{v} \right), \quad (14)$$

где

$$\begin{cases} u = \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2\zeta_0}\right) \sin \frac{\pi\zeta}{2\zeta_0}, \\ v = \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2\zeta_0}\right) \cos \frac{\pi\zeta}{2\zeta_0}, \end{cases} \quad (15)$$

а слагаемое $F^{(1)}(\eta, \zeta)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$e^{-2\eta} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \zeta^2} = (1 - e^{-2\eta}) \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \eta^2} \quad (16)$$

и нулевым граничным условиям в полосе $\zeta = \pm \zeta_0$.

Уравнение (16) будем решать численно, перейдя от уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $F_k^{(1)}(\zeta) \equiv F^{(1)}(\eta_k, \zeta)$:

$$\frac{d^2 F_k^{(1)}}{d\zeta^2} = (1 - e^{-2\eta_k}) \left(\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \eta^2} \right)_k - e^{-2\eta_k} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} \right)_k. \quad (17)$$

Здесь $k = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, переменная η принимает дискретные значения $\eta_k = kh$ индекс "k" у частных производных означает, что эти производные берутся при значении $\eta = \eta_k$, причем

$$\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} \right)_k = \frac{F_{k+2}^{(1)} - 2F_k^{(1)} + F_{k-2}^{(1)}}{4h^2}, \quad (18)$$

где h — шаг дискретности по η . Приведем также выражение для частной производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя формулы (15), (16), найдем производные, входящие в (19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial v^2} = \\ &= -\frac{4V}{\pi} v \left\{ \frac{1-u}{[v^2 + (1-u)^2]^2} + \frac{1+u}{[v^2 + (1+u)^2]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial u \partial v} &= \\ &= \frac{2V}{\pi} \left\{ \frac{v^2 - (1-u)^2}{[v^2 + (1-u)^2]^2} - \frac{v^2 - (1+u)^2}{[v^2 + (1+u)^2]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\pi}{2\zeta_0} \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2\zeta_0}\right) \sin \frac{\pi\zeta}{2\zeta_0}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\pi}{2\zeta_0} \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2\zeta_0}\right) \cos \frac{\pi\zeta}{2\zeta_0}. \end{cases} \quad (22)$$

Систему уравнений (17) можно проинтегрировать численно, задавая нулевые начальные условия на прямой $\zeta = -\zeta_0$:

$$F_k^{(1)}(-\zeta_0) = 0, \quad \left(\frac{dF_k^{(1)}}{d\zeta} \right)_{\zeta = -\zeta_0} = 0. \quad (23)$$

Отметим, что $F_0^{(1)}(\zeta) \equiv 0$.

РАСЧЕТ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАКРЫТЫМИ ТОРЦАМИ

В качестве примера расчета поля осесимметричной системы рассмотрим цилиндрический зеркальный анализатор с закрытыми торцами (ЦЗАЗТ), предложенный в работе [3]. Схематически система электродов такого анализатора представлена на рис. 2. Здесь R_1, R_2 — радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей соответственно, l — расстояние между торцевыми электродами. Будем считать, что потенциал торцов и внутреннего цилиндра равен $V_0 = 1$, а потенциал внешнего цилиндра равен V .

Введем безразмерные переменные η и ζ согласно (10), где

$$R = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (24)$$

В переменных η и ζ потенциал $\phi(\zeta, \eta)$ удовлетворяет граничным условиям в симметричном

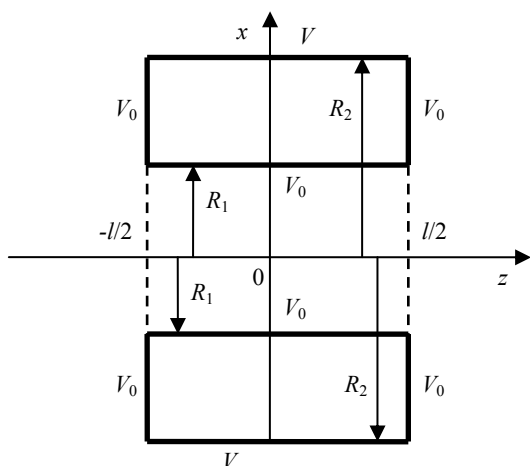


Рис. 2. Изображение проекции электродов ЦЗАЗТ на плоскость xz сопутствующей декартовой системы координат

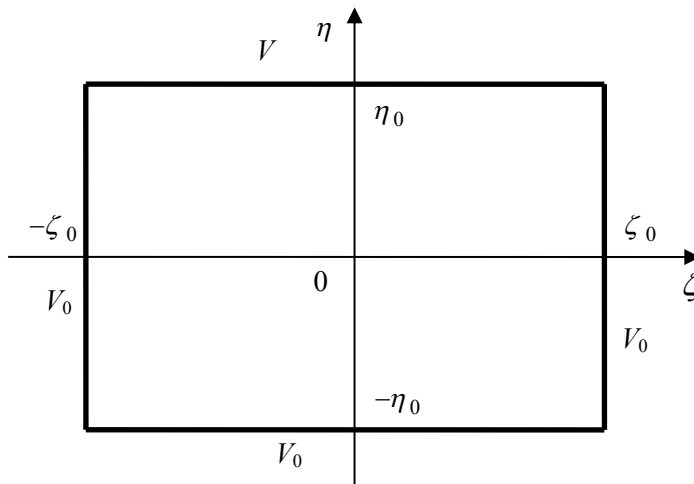


Рис. 3. Граничная задача в $\zeta \eta$ -плоскости

прямоугольнике, представленном на рис. 3. Потенциал верхнего электрода $\eta = \eta_0$ равен V , а остальные электроды имеют потенциал $V_0 = 1$. Величины η_0 и ζ_0 на рисунке определяются выражениями:

$$\eta_0 = \ln \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \quad \zeta_0 = \frac{l}{2R}. \quad (25)$$

Отобразим этот прямоугольник на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $w = u + iv$, используя конформное преобразование [5]:

$$\zeta + i\eta = i\eta_0 + C \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\frac{w^2}{a^2})}}. \quad (26)$$

Здесь точки w -плоскости ± 1 соответствуют вершинам $\pm \zeta_0 + i\eta_0$, а точки $\pm a$ — вершинам $\pm \zeta_0 - i\eta_0$. Для определения постоянных нужно вычислить следующие интегралы:

$$C J_1 = C \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{u^2}{a^2})}} = \zeta_0, \quad (27)$$

$$-i C J_2 = -i C \int_1^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\frac{u^2}{a^2})}} = -i 2\eta_0. \quad (28)$$

Интегралы J_1, J_2 в выражениях (27), (28) являются эллиптическими. Их значения находились численно, причем в δ -окрестности особых точек $\pm 1, \pm a$ интегралы вычислялись аналитически, что позволило получить точность расчета не хуже, чем δ^2 :

$$J_1 = \int_0^{1-\delta} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{u^2}{a^2})}} + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\frac{1}{a^2})}}, \quad (29)$$

$$J_2 = \int_{1+\delta}^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\frac{u^2}{a^2})}} + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\frac{1}{a^2})}} + \frac{\delta}{\sqrt{a(a^2-1)(1+\frac{1}{a})}}. \quad (30)$$

В таблице для различных значений параметра a приведены вычисленные значения интегралов J_1, J_2 , а также их отношение, равное

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\zeta_0}{2\eta_0}. \quad (31)$$

Распределение гармонического потенциала в w -плоскости определяется выражением:

$$F^{(0)}(u, v) = 1 + \frac{V-1}{\pi} \left(\arctg \frac{1-u}{v} + \arctg \frac{1+u}{v} \right). \quad (32)$$

Значения интегралов J_1 , J_2 в зависимости от величины параметра a

a	J_1	J_2	J_1/J_2
1.1	2.318616	1.639984	1.413805
1.2	2.064762	1.712320	1.205827
1.5	1.807818	1.900835	0.951065
2.0	1.684159	2.153757	0.781963
3.0	1.615925	2.5262828	0.639645

Для нахождения гармонической части потенциала $\varphi^{(0)}(\zeta, \eta)$, определяющей поле ЦЗАЗТ, необходимо в выражении (32) перейти от переменных u, v к переменным ζ, η с помощью конформного преобразования (26). Поправка $\varphi^{(1)}(\zeta, \eta)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям в прямоугольнике, представленном на рис. 3, и может быть найдена путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод расчета поля, позволяющий находить простые замкнутые аналитические выражения для пространственного распределения потенциала в трансаксиальных и осесимметричных линзах и зеркалах. В качестве примера получены аналитические выражения для потенциала двухэлектродной трансаксиальной линзы и осесимметричной зеркальной системы. Хотя полученные выражения для потенциала являются приближенными, они с хорошей точностью отражают основные особенности поля рассмотренных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
3. Овсянникова Л.П., Фишкова Т.Я. Цилиндрический зеркальный энергоанализатор с закрытыми торцами // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 10. С. 174–177.
4. Doskeyev G.A., Spivak-Lavrov I.F. Method of the calculation of the transaxial lens' field // Eurasian Physical Technical Journal. 2008. V. 5, N 1(9). P. 50–52.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актюбе, Казахстан

Контакты: Спивак-Лавров Игорь Феликсович, spivakif@rambler.ru

Материал поступил в редакцию 21.01.2014

METHOD FOR CALCULATING ELECTROSTATIC FIELDS WITH AXIAL AND TRANSAXIAL SYMMETRY

I. F. Spivak-Lavrov, G. A. Doskeyev, T. J. Tleubaeva

Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov, Kazakhstan

Method of calculation electrostatic fields with axial and transaxial symmetry based on the decomposition potential into two terms. The main component is a harmonic function of two variables $\eta = \ln(\rho/\rho_0)$ and z ,

satisfying the given boundary conditions. Harmonic component of the potential is analytically using methods TFCV. The second term is the solution of the inhomogeneous equation with homogeneous Dirichlet boundary conditions and can be found numerically with the required accuracy.

Keywords: axisymmetric lenses, axisymmetric mirror transaxial lenses, mirrors transaxial, harmonic functions of two variables

REFERENCES

1. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. Teoriya sinteza elektrostatičeskikh energoanalizatorov. SPb.: Izd-vo Politehnicheskogo un-ta, 2010. 409 s. (in Russian).
2. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1977. 736 s. (in Russian).
3. Ovsyannikova L.P., Fishkova T.Ya. Tsilindricheskiy zerkalnyy energoanalizator s zakrytymi tortsami // ZhTF. 1994. T. 64, № 10. S. 174–177. (in Russian).
4. Doskeyev G.A., Spivak-Lavrov I.F. Method of the calculation of the transaxial lens' field // Eurasian Physical Technical Journal. 2008. V. 5, N 1(9). P. 50–52.
5. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1973. 736 s. (in Russian).