

УДК 531.32: 534.29

© Б. П. Шарфарец, Н. Н. Князьков

О СРЕДНЕЙ СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВКЛЮЧЕНИЯ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Подчеркнута схожесть понятий средней силы, принятого в электродинамике (давление света) и в акустике (радиационное давление), а также силы вибрации (струна) и средней силы воздействия на системы с сосредоточенными параметрами, движущиеся в быстропеременных полях. На примере движения частиц в быстропеременных полях показана идентичность определения средних сил в такой системе и радиационного давления в акустике. Кроме того, на простом примере показана возможность транспортировки частиц в точках минимума потенциала в акустическом поле по аналогии с описанной ранее подобной возможностью в системах с сосредоточенными параметрами.

Кл. сл.: давление света, радиационное давление, струна, системы с сосредоточенными параметрами, бегущая плоская волна, стоячая волна, включение

ВВЕДЕНИЕ

Публиковавшиеся ранее авторами работы [1–5] и др. были посвящены силовому воздействию звука на частицы, взвешенные в жидкости. Такое силовое воздействие в акустике носит название давления звукового излучения или традиционное — радиационного давления, под которым понимается среднее по времени избыточное давление на препятствие в звуковом поле, определяемое импульсом, передаваемым волной в единицу времени на единицу площади препятствию [6, с. 553]. Акустики обнаружили и описали (Лорд Рэлей и др.) радиационное давление, вслед за тем как было обнаружено (Кеплер) и описано (Максвелл) давление света, или в общем давление электромагнитного излучения.

Согласно [6, с. 533], "давление света (давление электромагнитного излучения) — (среднее) давление, оказываемое светом на отражающие и поглощающие тела ... одно из пондеромоторных действий света, связанное с передачей импульса электромагнитного поля веществу".

Следует отметить, что в результате разработанные в обеих этих областях теории среднего давления оказались идентичными по конечному виду выражений для радиационного давления и давления света. Так, когда первичное поле, представляющее собой бегущую плоскую волну, нормально падает на границу раздела двух однородных сред, выражение для среднего давления $\bar{P}$ на гра-

ницу раздела записывается как [6, с. 533, 7]

$$\bar{P} = \bar{E}_1 + \bar{E}'_1 - \bar{E}_2. \quad (1)$$

Здесь $\bar{E}_1$, $\bar{E}'_1$ и $\bar{E}_2$ соответственно средние плотности энергии в падающей, отраженной и прошедшей волнах. Таким образом, среднее давление на границу в акустическом и электромагнитном случаях равно разности средних плотностей энергии в контактирующих средах.

Когда рассчитывается соответствующее среднее давление на ограниченных включениях, то в акустике для этого через тензор плотности потока импульса, а в электродинамике через тензор энергии-импульса электромагнитного поля рассчитывается средний поток импульса за единицу времени через охватывающую включение поверхность.

В вибрационных процессах также наблюдаются силы весьма похожие на силы радиационного давления в акустике. Так, например, колеблющаяся струна воздействует с некоторой отличной от нуля продольной средней силой на находящиеся на ней неоднородные включения (см. [8–12] и др.). Таким образом, давление вибраций (на струне) — средняя продольная сила, действующая на неоднородное включение на струне в поле различных первичных волн.

При рассмотрении выражения (1) применительно к колебаниям струны соответствующее выражение для продольных средних сил несколько отличается [12]:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}(\bar{E}_1 + \bar{E}_1' - \bar{E}_2). \quad (2)$$

Здесь смысл обозначений сохранился. Как видно, в случае струны появляется корректирующий множитель $1/2$.

В связи с этим отметим тот факт, что, несмотря на схожесть уравнения колебания струны и уравнения колебания жидкости при распространении плоской бегущей волны вдоль какой-либо оси координат (и уравнение Гельмгольца, и волновое уравнение для жидкости становятся одномерными и неразличимыми от уравнений струны), тем не менее между ними сохраняется существенная разница. Связано это с тем, что в случае жидкости скорость изменения импульса единицы объема (что влияет в конечном итоге и на средние силы) равна

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

а в случае струны в силу независимости плотности струны от времени

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

что эквивалентно несжимаемости жидкости. Здесь ρ — плотность жидкости либо плотность струны; $\mathbf{v}$ — вектор колебательной скорости жидкости; v — поперечная скорость струны.

Формально колебания струны рассматриваются как колебания системы с распределенными параметрами, однако различные определения скорости изменения импульса и различия, например, выражений (1) и (2) позволяют говорить о том, что в некотором смысле струна как система с распределенными параметрами находится ближе к системам с сосредоточенными параметрами, чем акустическая среда.

Отметим, что рассматривавшиеся выше эффекты средних сил, создаваемых различными полями, являются величинами второго порядка по отношению к параметрам полей в силу того, что средние силы в первом порядке равны нулю.

Между тем существует множество работ, посвященных системам с сосредоточенными параметрами, находящимся в быстропеременных полях, где фактически решения ищутся методом усреднения [13], т. е. находятся средние силы, действующие на частицы с конечной массой. Впервые метод был предложен П. Л. Капицей и описан, например, в [13, 14]. В [14] этим методом решены задачи о колебании маятника при продольном и поперечном высокочастотном перемещении точки подвеса. Множество работ посвящено применению метода усреднения при движении заряжен-

ных частиц в быстропеременных электрических полях (примеры см. в [13], там же приведена библиография по этой тематике). Укажем из последних работ на эту тему цикл публикаций в данном журнале [15–19].

СВЯЗЬ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА С РАДИАЦИОННЫМ ДАВЛЕНИЕМ В СЛУЧАЕ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Как уже говорилось выше, в линейных системах с гармоническим возбуждением средние по времени силы равны нулю. Поэтому уравнение системы с сосредоточенными параметрами, в которой образуются средние силы, должно быть нелинейным.

Для получения более прозрачной аналогии радиационного давления для акустического случая и теории эффективного потенциала несколько видоизменим вывод последнего, изложенный в [13, 14]. Пусть ставится задача для системы с сосредоточенными параметрами следующего вида

$$m \ddot{\xi} = F(\xi) \cos \omega t. \quad (3)$$

Здесь ξ — смещение частицы; $F(\xi)$ — амплитуда гармонической силы, воздействующей на частицу с частотой ω . Как видно, задача (3) является в общем случае зависимости $F(\xi)$ нелинейной (амплитуда силы зависит от смещения). Будем решать задачу (3) методом последовательных приближений. Положим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad (4)$$

не заботясь пока о сходимости решения. Имеем далее, полагая функцию $F(\xi)$ медленно меняющейся функцией,

$$F(\xi) \approx F(0) + \xi \left. \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0}. \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (3), имеем для ξ_1 и ξ_2 следующие уравнения:

$$m \ddot{\xi}_1 = F(0) \cos \omega t, \quad (6)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = \xi_1 \left. \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \cos \omega t. \quad (7)$$

Для ξ_1 из (6) имеем

$$\xi_1 = -\frac{1}{m\omega^2} F(0) \cos \omega t. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем уравнение для ξ_2

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_2 &= -\frac{1}{m\omega^2} \left(F(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0} \cos^2 \omega t = \\ &= -\frac{1}{2m\omega^2} \left(\frac{dF^2(\xi)}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0} \cos^2 \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

Усредняя (9) по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем окончательно

$$m\overline{\ddot{\xi}_2} = -\frac{1}{4m\omega^2} \left(\frac{dF^2(\xi)}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0}. \quad (10)$$

Слева в (10) стоит значение средней силы, действующей на частицу массой m в быстропеременном поле.*)

Отметим, что приведенный выше вывод действующей на частицу средней силы идеологически идентичен схеме вычисления радиационного давления в акустическом случае (см., например, [20]), а именно:

- нелинейная задача решается с точностью до приближений второго порядка;
- задача для приближения первого порядка является линейной, и поэтому усредненная скорость изменения импульса равна нулю;
- решение задачи для приближения второго порядка строится на основе полученного решения для приближения первого порядка;
- усредненная скорость изменения импульса для приближения второго порядка отлична от ну-

*) В оригинальном изложении [13, 14] функция F зависит от суммы двух переменных $F(x) = F(X + \xi)$, где $X = X(\varepsilon t)$ — медленно меняющаяся функция времени ($\varepsilon \ll 1$ — малая константа), которая мало отличается от решения при $F = 0$, а $\xi = \xi(t)$ — быстроосциллирующая малая добавка, обусловленная влиянием силы F . Тогда уравнение для усредненного решения X принимает вид (усреднение идет по быстрому времени t)

$$m\ddot{X} = -\frac{dV}{dX} - \frac{1}{4m\omega^2} \frac{dF^2(X)}{dX}.$$

Здесь $V(X)$ — исходный низкочастотный потенциал. Как видно из последнего выражения, медленно меняющийся во времени эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}} = V(X(\varepsilon t)) + \frac{1}{4m\omega^2} F^2(X(\varepsilon t))$$

уже предполагает подвижность во времени его локальных минимумов.

ля, и с ее помощью рассчитывается собственно радиационное давление на включения.

Таким образом, при указанных выше условиях средняя сила, действующая на частицу в быстропеременных полях с амплитудой, зависящей от координат, определяется совершенно идентично определению радиационного давления в акустическом случае.

Отметим, что частицы концентрируются в локальных минимумах эффективного потенциала, как в механическом случае [13], так и потенциала силы радиационного давления в акустическом случае [21].

Еще один пример родственности понятий радиационного давления в акустическом случае и средней силы в случае движения частиц в быстропеременных полях заключается в возможности транспортировки частиц. Например, в работах [15–19] показано, что при помощи специально организованной зависимости электрического поля от времени и пространства происходит транспортировка частиц, концентрирующихся в минимумах эффективного потенциала. Покажем на простом примере, как можно организовать транспортировку частиц с помощью радиационного давления в акустическом случае.

Известно, что в акустическом случае, когда частицы помещены в поле первичной стоячей гармонической волны, они концентрируются либо в пучностях, либо в узлах этой стоячей волны в зависимости от соотношений акустических свойств окружающей жидкости и частиц. Если заставить перемещаться в пространстве стоячую волну, то вместе с ней будут перемещаться и частицы. Покажем, как это сделать, на простом примере.

Пусть в однородной жидкости слева направо распространяется плоская бегущая волна $e^{i(k_0x - \omega_0t)}$ частотой ω_0 , а справа налево распространяется плоская волна с небольшим приращением частоты $\omega = \omega_0 + \delta_\omega$, $\delta_\omega \ll \omega_0$. Выражение для этой бегущей волны имеет вид

$$e^{-i(kx + \omega t)} = e^{-i((k_0 + \delta_k)x + (\omega_0 + \delta_\omega)t)}.$$

Здесь $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ — волновое число в невозмущенном случае; c — скорость звука в жидкости. Разумеется, сдвиг частоты должен быть настолько мал, чтобы возмущение амплитуд рассеяния частиц было небольшим, что в свою очередь не приводит к заметным возмущениям величины радиационного давления.

Суммируя плоские волны, имеем

$$e^{i(k_0x - \omega_0t)} + e^{-i((k_0 + \delta_k)x + (\omega_0 + \delta_\omega)t)} = \\ = 2 \cos\left(k_0x + \frac{\delta_k x}{2} + \frac{\delta_\omega t}{2}\right) e^{-i\omega_0t}.$$

Учитывая очевидное соотношение $\delta_k = \frac{\delta_\omega}{c}$, получаем окончательно выражение для действительной записи результирующей волны

$$2 \cos(k_0x + \delta_\omega t) \cos \omega_0 t,$$

что представляет собой стоячую волну, с медленно дрейфующей во времени фазой $\delta_\omega t$ и гармонически колеблющуюся с частотой ω_0 . Это в конечном счете приводит к дрейфу частиц, сконцентрированных в узлах (пучностях).

ВЫВОДЫ

В работе подчеркнута схожесть понятия средней силы, принятого в электродинамике (давление света) и в акустике (радиационное давление), а также силы вибрации (струна) и средней силы воздействия на системы с сосредоточенными параметрами, движущиеся в быстропеременных полях. На примере движения частиц в быстропеременных полях показана идентичность определения средних сил в такой системе и радиационного давления в акустике. Кроме того, на примере показана возможность транспортировки частиц в точках минимума потенциала в акустическом поле по аналогии с описанной ранее подобной возможностью в системах с сосредоточенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
2. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421, № 2. С. 186–189.
3. Князьков Н.Н., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Радиационное давление на сферу в смешанном поле бегущей и стоячей плоских волн // ДАН. 2009. Т. 424, № 6. С. 751–754.
4. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление на включение с заданной амплитудой рассеяния в произвольном внешнем поле // Акустический журнал. 2009. Т. 55, № 2. С. 147–152.

5. Шарфарец Б.П., Князьков Н.Н., Курочкин В.Е. Радиационное давление на сферу с потерями в квазистоячей плоской волне // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 2. С. 179–183.
6. Физическая энциклопедия. Т. 1 / Гл. редактор А.М. Прохоров М.: Советская энциклопедия, 1988. 704 с.
7. Давление электромагнитного излучения. URL: (<http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%D1%8D%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D0%B8%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F>).
8. Rayleigh F. On the pressure of vibrations // Philosophical magazine. 1902. V. 3, Ser. 6. P. 338–346.
9. Николаи Е. К вопросу о давлении вибраций // Записки Петербургского политехнического института. 1912. XVIII. С. 49–60.
10. Nicolai E. On a dynamical illustration of the pressure of radiation // Philosophical magazine. 1925. V. 49, Ser. 6. P. 171–177.
11. Данилов С.Д., Миронов М.А. Одномерное моделирование средних сил в акустике // Акустический журнал. 1984. Т. 30, № 3. С. 306–309.
12. Шарфарец Б.П. Радиационное давление на неоднородное включение в поле бегущей плоской волны на бесконечной струне // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 3. С. 118–124.
13. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Серия "Теоретическая физика". М.: Физматлит, 2004. 220 с.
15. Бердников А.С. Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 1 // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 2. С. 77–89.
16. Бердников А.С. Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 2 // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 3. С. 83–96.
17. Бердников А.С. Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 3 // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 75–85.
18. Бердников А.С. Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 4 // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 86–102.
19. Бердников А.С. Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 5 // Научное приборостроение. 2012. Т. 22, № 2. С. 105–111.
20. Doiakov A.A. Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid // Proceedings of the Royal Society of London: A. 1994. V. 447. P. 447–466.
21. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург*

Материал поступил в редакцию 25.12.2012

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович,*
sharb@mail.ru

ON THE AVERAGE FORCE INFLUENCING THE INCLUSIONS IN SYSTEMS WITH THE DISTRIBUTED AND THE CONCENTRATED PARAMETERS

B. P. Sharfarets, N. N. Knyaz'kov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

Similarity of concepts of the average force, accepted in electrodynamics (pressure of light) and in acoustics (radiating pressure), and also forces of vibrations (string) and average force of the influence on systems with the concentrated parameters, moving in quickly changing fields is stressed. On movement of particles in quickly changing fields, as an example, the identity of definition of average forces in such system and radiating pressure in acoustics is shown. Besides, on a simple example possibility of transportation of particles in points of minimum of potential in an acoustic field by analogy with previously described similar possibility is shown in systems with the concentrated parameters.

Keywords: light pressure, radiation pressure, string, lumped systems, progressive plane wave, standing wave, inclusion