

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассматривается модификация метода номинальной траектории, используемого при оценивании нелинейных динамических систем. Сущность метода заключается в аппроксимации нелинейной динамической системы линейной системой того же порядка, что и исходная нелинейная, и представлении номинальной траектории аппроксимацией решения детерминированной части дифференциального уравнения экспоненциальным рядом.

Кл. сл.: функция, аппроксимация, номинальная траектория, моделирование, динамическая система, сигнал, процесс, алгоритм, матрица, представления, фильтрация

ВВЕДЕНИЕ

При обработке информации и результатов измерений, оптимизации стохастических динамических систем (ДС), решении задач оптимальной обработки сигналов (фильтрация, обнаружение, различение) возникает необходимость оценивания вектора состояния и параметров ДС.

Оцениванием в математической статистике принято называть обработку данных измерений (наблюдений) с целью уменьшить влияние случайных факторов (ошибок). Еще в начале XIX века зародился один из основных методов оценивания математической статистики — метод наименьших квадратов (МНК), тесно связанный с именем Гаусса. Этот метод, теория которого получила значительное развитие в трудах А.А. Маркова и последующих исследованиях, полностью сохранил свое значение и в настоящее время.

Рассмотрим общую формулировку задачи оценивания.

Пусть $x(t)$ — случайный процесс, непосредственное наблюдение которого невозможно. Чтобы получить информацию о процессе $x(t)$ проводят наблюдение за процессом $z(t)$, функционально связанным с процессом $x(t)$. На интервале времени $[t_0, \tau]$, имеющем переменный верхний предел τ , формируется выборка измерений $\mathbf{Z}$. Задача оценивания состоит в том, чтобы построить функционал $\hat{x}(\mathbf{Z})$, определяющий единственное значение $\hat{x}$ (точечное оценивание), либо оператор $\Omega_{\hat{x}} = \Omega_{\hat{x}}(\mathbf{Z})$, определяющий множество значений $\hat{x}$ (интервальное оценивание). По значениям $\hat{x}$ или $\Omega_{\hat{x}}$ возможно судить с некоторой достоверностью об истинном значении процесса

$x(t)$ на момент времени t . Совокупность математических операций, выполненных в порядке, определяемом функционалом $\hat{x}(\mathbf{Z})$ или оператором $\Omega_{\hat{x}}(\mathbf{Z})$, будем называть алгоритмом оценивания.

Основными исходными данными, которые используются при математической постановке задачи оценивания, являются:

- * математическая модель, описывающая оцениваемые и наблюдаемые (измеряемые) параметры;
- * априорная и измерительная информация;
- * критерий оптимизации;
- * дополнительные ограничения, накладываемые на алгоритм оценивания вектора $x(t)$, для обеспечения его практической реализуемости.

Эти данные, отражая объективные закономерности, описывающие оцениваемые и наблюдаемые параметры, в то же время несут в себе элементы субъективности, связанные с полнотой учета априорной информации, выбором критерия оптимизации и ограничений, упрощающих реализацию алгоритма в ЭВМ.

Численное решение уравнений нелинейной фильтрации в задачах практики также невозможно, т. к. для этого требуется много времени и решать их необходимо каждый раз после получения результата наблюдений. Кроме того, практическое применение теории оптимальной фильтрации имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислить в реальном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Действительно, теория оптимальной фильтрации дает оптимальные оценки в каждый момент t по результатам наблюдений, полученных к этому моменту, без использования последующих результа-

тов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием и их вычисление приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t , для оценивания состояния системы в момент t . Поэтому для статистической обработки данных после окончания наблюдений, целесообразно применять другие методы. Необходимость обрабатывать результаты наблюдений в реальном масштабе времени непосредственно в процессе эксперимента привела к появлению ряда приближенных методов оптимальной фильтрации, называемых обычно методами субоптимальной фильтрации.

Наиболее распространенные общие приемы получения субоптимальных алгоритмов оценивания сводятся к следующему:

- * разложение нелинейных функций в ряд Тейлора в окрестности оценки как некоторого невозмущенного состояния;
- * применение различных видов аппроксимации;

- * разложение по моментам, кумулянтам или квазимomentам;
- * применение гауссовского приближения для распределения вероятностей;
- * представление в виде функциональных рядов апостериорной функции плотности вероятности;
- * эллипсоидальная аппроксимация апостериорного распределения;
- * замена оценки функции на функцию оценки;
- * замена среднего по множеству средним по времени.

В результате вместо интегрирования интегродифференциальных уравнений следует интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов разложения — вероятностных моментов, квазимomentов, кумулянтов, коэффициентов функциональных рядов при непрерывном процессе — или проводить вычисления по рекуррентным формулам для тех коэффициентов при дискретном процессе. На рис. 1 рассмотрены основные приемы получения субоптимальных алгоритмов оценивания.

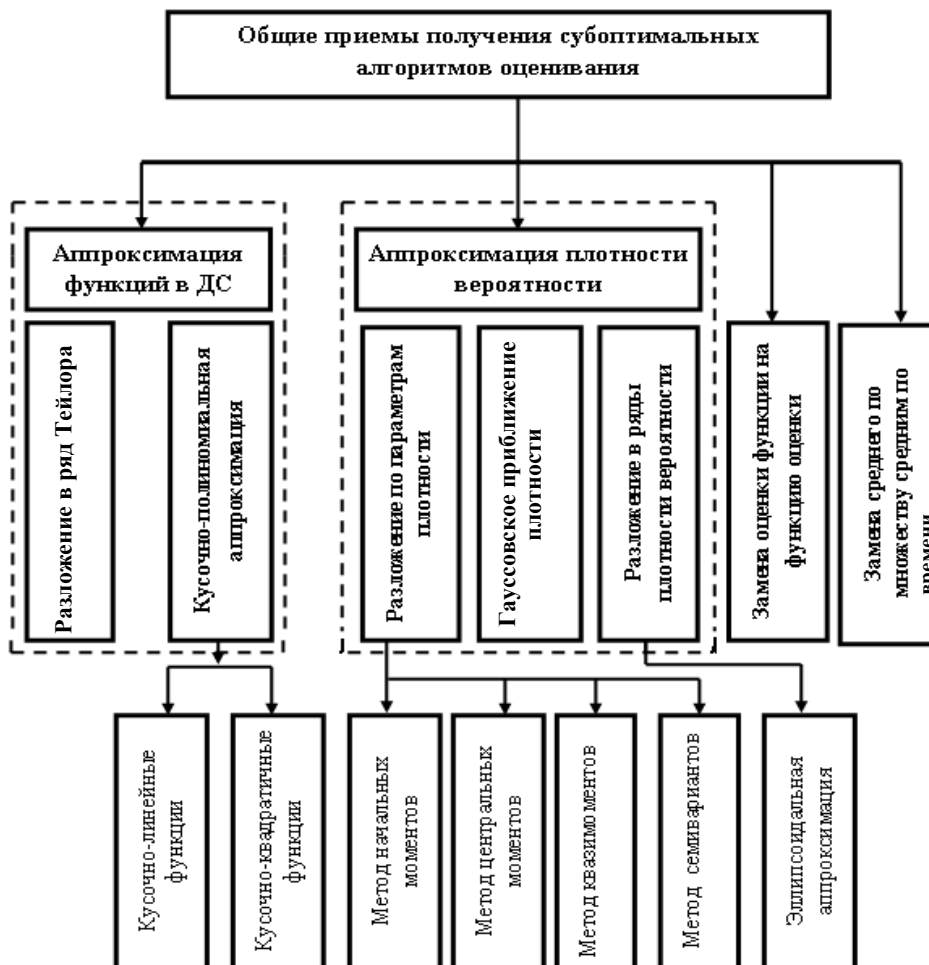


Рис. 1. Основные приемы получения субоптимальных методов оценивания состояния ДС

В целом анализ литературных источников позволяет выделить следующие основные типы приближенных алгоритмов оценивания состояния нелинейных стохастических динамических систем (СДС) [1–7]:

- * расширенный фильтр Калмана—Бьюси;
- * гауссовы фильтры первого и второго порядков;
- * фильтры первого и второго порядков;
- * усеченный и модифицированный фильтры второго порядка;
- * условно-оптимальные фильтры;
- * фильтры, основанные на кусочно-полиномиальной аппроксимации нелинейных функций, входящих в модель системы;
- * алгоритмы оценивания с эмпирическими средними;
- * нелинейные фильтры с априорно обусловленными данными;
- * фильтры, линеаризованные в окрестности номинальной траектории состояния динамической системы;
- * расширенные линеаризованные фильтры;
- * итерационно-последовательные фильтры.

Алгоритмы нелинейной фильтрации отличаются также характером исполнения: непрерывные, непрерывно-дискретные и дискретные.

Кроме того, в зависимости от размерности пространства состояния различают фильтры скалярные и векторно-матричные.

Перечисленные выше методы дают принципиальную возможность получить приближение к оптимальной оценке с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок N учитываемых моментов, кумулянтов (семивариантов) или квазимоментов, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке. Однако число уравнений, определяющих параметры априорного распределения, быстро растет с увеличением числа учитываемых параметров (к примеру, для четырехмерного вектора состояний, число уравнений примерно пропорционально кубу числа учитываемых моментов). Вследствие этого изложенные приближенные методы решения уравнений оптимальной фильтрации практически реализуемы только при невысокой размерности расширенного вектора состояния системы, включающего все переменные состояния и неизвестные параметры. Между тем число подлежащих оцениванию неизвестных параметров во многих задачах практики оказывается больше 100. Для таких задач практически реализуем только метод нормальной аппроксимации апостериорного распределения. Однако наиболее радикальное сокращение числа уравнений для параметров апостериорного распределения дает метод эллиптической аппроксимации.

Число уравнений для параметров апостериорного распределения, к которым приводит этот метод, лишь на $0.5N - 1$ превышает число уравнений метода нормальной аппроксимации, практически не имея при этом ограничения на вид апостериорной вероятности.

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим еще один подход к аппроксимации нелинейных динамических систем линейными. Отличие его заключается в аппроксимации нелинейной динамической системы линейной системой того же порядка, что и исходная нелинейная. По существу, это метод номинальных траекторий, отличающийся тем, что номинальная траектория является аппроксимацией решения детерминированной части дифференциального уравнения экспоненциальным рядом.

Рассмотрим общий случай матрично-векторной нелинейной стохастической динамической системы, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_0(t), \end{cases} \quad (1)$$

с корреляционными матрицами шума наблюдения и шума формирования и начальными условиями, следующего вида:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_0(t)\mathbf{n}_0^T(t-\tau) \rangle &= \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \\ \langle \mathbf{n}_1(t)\mathbf{n}_1^T(t-\tau) \rangle &= \frac{N_1}{2} \delta(\tau), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — состояние динамической системы, наблюдаемый процесс на выходе ДС; $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{g}(\cdot)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ — векторные функции; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция; $\mathbf{n}_0(t)$ — шум наблюдения; $\mathbf{n}_1(t)$ — формирующий шум; N_0 , N_1 — спектральные плотности шума наблюдения и формирующего шума.

Наряду с динамической системой (1), рассмотрим детерминированную систему, определяемую правой частью (1)

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}), \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{\mathbf{x}}(t)$ — номинальная траектория (состояние

ДС в отсутствие шумов); $\bar{z}(t)$ — наблюдения в отсутствие шумов наблюдения.

Если предположить, что шум $n_1(t)$ достаточно мал, то решение первого уравнения системы (2) будет определять так называемую номинальную траекторию, которую можно использовать при линейаризации стохастической системы (1). Полагая выполнимость условий малости, разложим нелинейные функции, входящие в (1), в функциональный ряд Тейлора относительно номинальной траектории и ограничимся при этом только линейными членами ряда:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{df}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) + \left[g(\bar{x}) + \frac{dg}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) \right] n_1(t), \\ z(t) = H(\bar{x}) + \frac{dH}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) + n_0(t) \end{cases} \quad (3)$$

или 1-е уравнение системы (3) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{df}{d\bar{x}}x - \frac{df}{d\bar{x}}\bar{x} + \left[g(\bar{x}) + \frac{dg}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) \right] n_1(t).$$

С учетом того, что корреляционная матрица шума формирования достаточно мала, после несложных преобразований можно записать

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{d\bar{x}}x + f(\bar{x}) - \bar{x} + g(\bar{x})n_1(t), \\ z(t) = \frac{dH}{d\bar{x}}x + H(\bar{x}) - \bar{x} + n_0(t). \end{cases} \quad (4)$$

Вводя обозначения $A = \frac{df}{d\bar{x}}$, $h = \frac{dH}{d\bar{x}}$, $B = f(\bar{x}) - \bar{x}$, $D = H(\bar{x}) - \bar{x}$, $G = g(\bar{x})$, приходим к стандартной записи линейной стохастической ДС:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(\bar{x})x + B(\bar{x}) + G(\bar{x})n_1(t), \\ z(t) = h(\bar{x})x + D(\bar{x}) + n_0(t). \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая, что представление нелинейной стохастической системы в виде линейной имеет смысл только при условии знания номинальной траектории, т. е. решения первого уравнения (2), обозначим $\bar{x} = F(t)$. Отметим, что матрицы A, h и вектора B, D являются функциями времени, поэтому представление (5) есть математическая модель нестационарной линейной динамической системы.

Как было указано выше, метод номинальной траектории применим при условии достаточной малости корреляционной матрицы формирующего шума и корреляционной матрицы, характеризующей начальную неопределенность динамической системы:

$$P_0 = \langle [x_0 - \bar{x}_0][x_0 - \bar{x}_0]^T \rangle.$$

Далее аппроксимируем полученное решение детерминированной составляющей ДС $F(t)$ экспоненциальным рядом:

$$\bar{x}(t) \approx x_A(t) = \exp(rt)CT, \quad (6)$$

где

$$\exp(rt) = \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n t} \end{bmatrix} \quad \text{— матричная экспонента;}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0^1 & C_1^1 & \dots & C_{n-1}^1 \\ C_0^2 & C_1^2 & \dots & C_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^n & C_1^n & \dots & C_{n-1}^n \end{bmatrix} \quad \text{— матрица постоянных интегрирования;}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad \text{— временная матрица.}$$

Аппроксимацию можно проводить по одному из выбранных критериев. В частности, воспользуемся критерием среднеквадратической ошибки отклонения многочлена $x_A(t)$ от функции $\bar{x}(t)$

$$E = \int_0^T [F(t) - \exp(rt)CT]^2 dt. \quad (7)$$

Минимизация критерия по варьируемым параметрам r, C обеспечит наилучшее приближение в заданном классе функций (вещественные экспоненты):

$$\min_{r, C} \left\{ \int_0^T [F(t) - \exp(rt)CT]^2 dt \right\}. \quad (8)$$

Технология отыскания значений постоянных интегрирования и корня характеристического уравнения сводится к стандартной процедуре решения системы $(n+1)n$ алгебраических уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial C_{i,j}} = 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Таким образом, систему дифференциальных уравнений с учетом приближения (6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x_A)x + B(x_A) + G(x_A)n_1(t), \\ z(t) = h(x_A)x + D(x_A) + n_0(t). \end{cases} \quad (9)$$

Для получения представления линеаризованной стохастической системы продифференцируем выражение (6) по t :

$$\frac{d[\exp(rt)CT]}{dt} = r \cdot \exp(rt)CT + \exp(rt)CT', \quad (10)$$

где $T' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & \dots & nt^{n-1} \end{bmatrix}^T$.

С учетом выражения (6), уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = r\bar{x} + \exp(rt)CT'. \quad (11)$$

Из последнего соотношения, выражения (6) и системы уравнений (9) получаем линеаризованное представление стохастической системы для случая, когда номинальная траектория аппроксимируется экспоненциальным вещественным рядом (решение линейного дифференциального уравнения n -го порядка):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [r\bar{x} + \exp(rt)CT']x + G(\bar{x})n_1(t), \\ z(t) = h(\bar{x})x + D(\bar{x}) + n_0(t). \end{cases} \quad (12)$$

Учитывая что матрица r диагональная и поэтому коммутативная, выражение (12) можно окончательно записать в форме

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \exp(rt)C[rT + T']x + G(\bar{x})n_1(t), \\ z(t) = h(\bar{x})x + D(\bar{x}) + n_0(t). \end{cases} \quad (13)$$

Дифференциальное уравнение (13) имеет решение, определяемое формулой Коши:

$$x(t, t_0) = F(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t F(t, \tau)G(\tau)n_1(\tau)d\tau, \quad (14)$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица, являющаяся решением соответствующей однородной системы

$$\frac{dF}{dt} = \exp(rt)C[rT + T']F \quad (15)$$

с начальным условием $F(t_0, t_0) = I$, I — единичная матрица.

Предлагаемый метод представления номинальной траектории в виде экспоненциального ряда как решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка является более предпоч-

тительным в сравнении с известным по причинам, которые определяются конструктивными свойствами реализующих фильтров.

1. Структура фильтра получается неизменной, и определяется стандартным видом экспоненциального ряда, находящегося в правой части уравнения фильтрации. Его конкретизация под реальную модель динамической системы осуществляется путем вычисления постоянных интегрирования и корней характеристических уравнений.

2. Фильтр работает в реальном масштабе времени, поэтому большое значение приобретают вычислительные и емкостные затраты, осуществляемые в процессе фильтрации. Т. к. предлагаемая структура фильтра содержит только операции сложения, умножения и вычисления степени r стандартной экспоненты $\exp(t)$, которая может быть определена заранее, то ясно, что если исходная номинальная траектория имеет достаточно сложный вид, преимущество предлагаемого подхода будет очевидным.

3. При комбинировании предлагаемого подхода с секционированием интервала наблюдения нет необходимости изменять структуру фильтра, т. к. при этом можно варьировать только постоянные интегрирования C и значения корней r характеристических уравнений.

Ясно, что условия применимости предлагаемого подхода полностью соответствуют условию применимости метода номинальных траекторий, а именно: малость корреляционной матрицы формирующего шума $n_1(t)$ и корреляционной матрицы, характеризующей начальную неопределенность

$$P_0 = \langle [x_0 - \bar{x}_0][x_0 - \bar{x}_0]^T \rangle.$$

Таким образом, предложенный метод аппроксимации стохастической нелинейной динамической системы нельзя рассматривать в отрыве от алгоритма фильтрации и технического средства, его реализующего. Именно в таком контексте и надо понимать новизну предлагаемого представления. Сама по себе такая аппроксимация в отрыве от ее целевого предназначения не имеет никаких особых достоинств по сравнению с классическим методом номинальных (опорных) траекторий.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Для иллюстрации применения предложенного метода аппроксимации рассмотрим динамическую систему, описываемую скалярными стоха-

стическими уравнениями состояния и наблюдения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + n_1(t), \\ z(t) = H(x) + n_0(t). \end{cases} \quad (16)$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему детерминированных уравнений, определяющих номинальную траекторию:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}), \\ z(t) = h(\bar{x}). \end{cases} \quad (17)$$

Тогда уравнения наблюдения и состояния, записанные относительно номинальной траектории, могут быть представлены (путем разложения в ряд Тэйлора функций, входящих в (16), в окрестности номинальной траектории и ограничения линейными членами) в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{df}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) + n_1(t), \\ z(t) = h(\bar{x}) + \frac{dh}{d\bar{x}}(x - \bar{x}) + n_0(t). \end{cases}$$

Предположим, что решение линейной системы, аппроксимирующей исходную нелинейную ДС, имеет вид

$$\bar{x}(t) = F(t).$$

Далее аппроксимируем полученное решение детерминированной составляющей ДС экспоненциальным рядом

$$\bar{x}(t) \approx x_A(t) = e^{rt} \sum_{i=0}^n C_i t^i.$$

Для оценки качества аппроксимации используется среднеквадратичный критерий

$$\min_{r,C} E = \min_{r,C} \int_0^T \left[F(t) - e^{rt} \sum_{i=0}^{n-1} C_i t^i \right]^2 dt.$$

Технология отыскания значений постоянных интегрирования и корня характеристического уравнения сводится к стандартной процедуре решения системы $(n+1)$ алгебраических уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial C_i} = 0.$$

Предположим, что для обеспечения необходимой точности достаточно ограничиться тремя членами экспоненциального ряда:

$$x_A(t) = e^{rt} [F(0) + C_0 t + C_1 t^2]. \quad (18)$$

Производная от этого выражения равна

$$\frac{dx_A}{dt} = r e^{rt} [F(0) + C_0 t + C_1 t^2] + e^{rt} (C_0 + 2C_1 t). \quad (19)$$

Учитывая выражение (18), второе уравнение можно записать в следующей линеаризованной форме:

$$\frac{dx_A}{dt} = r x_A + b(t), \quad b(t) = e^{rt} (C_0 + 2C_1 t). \quad (20)$$

Для моделирования стохастической нелинейной системы в правую часть (20) необходимо добавить формирующий член

$$\frac{dx}{dt} = [r x_A + b(t)] x + \sqrt{0.5N} n(t). \quad (21)$$

Таким образом, особенность приближения состоит в наличии зависящего от времени коэффициента $(r x_A + b(t))$, который определяет аппроксимирующую систему как линейную нестационарную. Выше рассматривался метод, основанный на применении линейной векторной системы с постоянными коэффициентами. По формальным признакам такая аппроксимация совпадает с приближением функции прямолинейным отрезком (но в данном случае с переменным свободным членом).

Уравнение состояния является стохастическим и описывает некоторый процесс, имеющий вполне определенную плотность вероятности. Известно, что между уравнением состояния и дифференциальным уравнением, описывающим эволюцию плотности вероятности (локальной и переходной) существует взаимосвязь. В некоторых случаях эта взаимосвязь является взаимно-однозначной [1]. Для уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t)n_1(t) \quad (22)$$

соотношения, связывающие функции $f(x)$ и $g(t)$, с коэффициентами сноса и диффузии, входящими в уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова, определяются формулами

$$K_1(x) = f(x) + \frac{N_0}{4} g'_x(x)g(x), \quad K_2(t) = \frac{N_0}{2} g^2(t). \quad (23)$$

Таким образом, располагая стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка, можно однозначно вычислить коэффициенты сноса $K_1(x)$ и диффузии $K_2(x)$, а затем составить уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК). Можно решить и обратную задачу: по

уравнению ФПК найти дифференциальное уравнение случайного процесса. Если ограничиться стохастическим уравнением (22), то такое представление будет единственным

$$g(x) = \sqrt{K_2(x)}, \quad f(x) = K_2(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial K_2}{\partial x}. \quad (24)$$

Последние соотношения позволяют составить стохастическое уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = K_2(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial K_2}{\partial x} + \sqrt{K_2(x)} n_0(t). \quad (25)$$

Стационарная плотность вероятности определяется выражением

$$p_{st}(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp \left[2 \int_{x_1}^x \frac{K_1(v)}{K_2(v)} dv \right]. \quad (26)$$

Для линейных процессов их плотность вероятности является гауссовской. Поэтому метод номинальных траекторий в принципе является разновидностью метода гауссовской аппроксимации. Так как предлагаемый метод линеаризации не выводит за рамки локальной гауссовской аппроксимации нелинейной системы, то, естественно, плотность вероятности будет нормальной с коэффициентами сноса и диффузии, определяемыми спецификой предложенной аппроксимации.

Используем выражения (23) и (26) для получения отношений, адаптированных к предложенному методу линеаризации исходной нелинейной стохастической системы:

$$K_1(x) = rx + e^{rt} \sum_{i=0}^{n-1} C_i t^i, \quad K_2(t) = \frac{N_0}{2} g^2(t). \quad (27)$$

Тогда стационарная плотность вероятности будет иметь вид

$$p_{st}(x) = \frac{2C}{N_0 g^2(t)} \exp \left[\frac{2 \left(r + e^{rt} \sum_{i=0}^{n-1} C_i t^i \right) (x - x_0)^2}{N_0 g^2(t)} \right]. \quad (28)$$

Для аппроксимации нелинейной системы на всем интервале наблюдения необходимо определить временные отрезки, в пределах которых с допустимой степенью точности производится аппроксимация нелинейной функции линейной. Если обозначить ошибку приближения через $E1$, то можно записать

$$E1(T) = \int_0^T \left[F(t) - e^{rt} [F(0) + C_0 t + C_1 t^2] \right]^2 dt. \quad (29)$$

Если задать ошибку равной некоторой величине $E1_p$, то можно определить интервал времени T , при котором будет обеспечиваться соотношение $E1(T) < E1_p$.

Как уже указывалось выше, метод аппроксимации решений существенно отличается от известных тем, что приближение рассматривается не в системе координат $(x, f(x))$, где x рассматривается как аргумент, а в координатах $(t, x(t))$, где $x(t)$ является функцией времени. Последнее позволяет аппроксимацию проводить последовательно во времени, ориентируясь на детерминированную составляющую стохастической линейной системы, а не в зависимости от того, какие значения приобретает функция x в присутствии стохастического члена. На рис. 2 иллюстрируется порядок выбора интервалов аппроксимации. На правом рисунке показано приближение функции $f(x)$ кусочно-

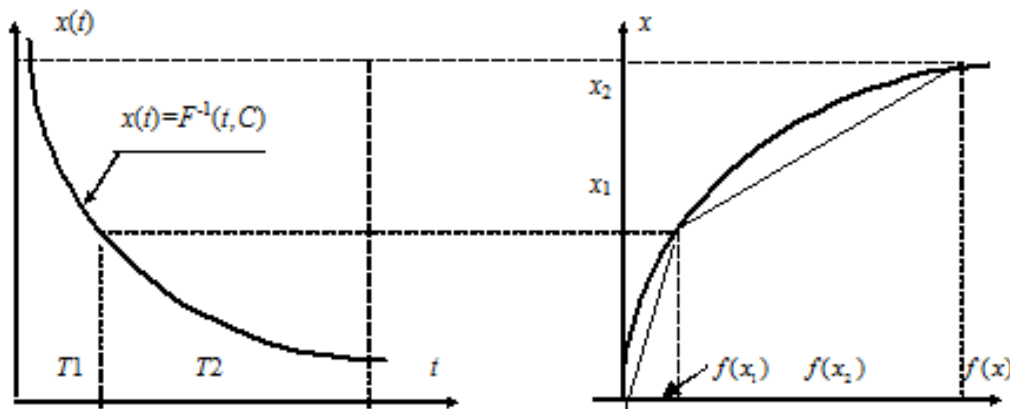


Рис. 2. Иллюстрация выбора интервалов аппроксимации

ломаной функцией. Теория и практика такого приближения известна и достаточно подробно описана в литературе [8–11]. Полагая, что исходя из ошибки аппроксимации определены интервалы $[0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$, по первообразной функции $F^{-1}(t, C)$ находим интервалы времени $[0, T_1]$ и $[T_1, T_2]$: $T_1 = F(x_1, C)$, $T_2 = F(x_2, C)$.

Таким образом, система уравнений, аппроксимирующая заданную нелинейную стохастическую систему, может быть представлена следующими двумя уравнениями, каждое из которых определяется на своем интервале времени:

$$\frac{dx}{dt} = [r_1 x_A + b_1(t)]x + \sqrt{0.5N}n(t), \quad x(0) = x_0, \\ t \in [0, T_1];$$

$$\frac{dx_1}{dt} = [r_2 x_{1A} + b_2(t)]x_1 + \sqrt{0.5N}n(t), \\ x_1(T_1) = x(T_1), \quad t \in [T_1, T_2].$$

Числовое моделирование

В соответствии с вышеизложенным было проведено моделирование. Исходные данные моделирования и результаты анализа экспериментальных данных следующие.

1. Моделируемая стохастическая нелинейная динамическая система определяется математической моделью следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \sqrt{0.5N}n(t), \quad x(0) = -1.$$

2. Решение детерминированной части нелинейной системы, которое определяет номинальную траекторию, описывается выражением

$$x(t) = -\frac{1}{t+1}.$$

Постоянная интегрирования выбрана равной единице $C = 1$.

3. Формирующий шум генерировался с помощью операторов пакета MathCad (в данном случае оператора формирования реализации нормально распределенного шума).

4. При изменении аргумента от 0 до ∞ функция $x(t)$ меняется в пределах $[-1, 0]$. Рассматривая функцию $y = x^2$ на левой полуоси аргумента, разобьем область изменения аргумента x на две $[-1, -0.5]$, $[-0.5, -0.25]$. Временной интервал $[0, 3]$ разбивается на два подынтервала $[0, 1]$ и $[1, 3]$.

5. Интервал дискретизации времени выбирался равным $h = 0.001$. При этом общее число отсчетов

реализации — 3000, что соответствует временному интервалу 3 с.

6. Спектральная плотность при моделировании выбиралась в широких пределах: от 2 до 5000. При значении спектральной плотности, превышающей 5000, наблюдалось расхождение между истинным состоянием нелинейной системы и ее аппроксимацией. Последнее связано с тем, что линейное приближение отклонений от номинальной траектории становится слишком грубым (рис. 2).

7. Корень характеристического уравнения выбирался равным $r = -0.8$.

8. Относительная ошибка аппроксимации вычислялась в соответствии с формулами

$$E0 = E10 + E20,$$

$$E10 = \frac{\int_0^1 \left\{ -\frac{1}{t+1} - e^{rt} [F(0) + C1_0 t + C1_1 t^2] \right\}^2 dt}{\sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{t+1} \right)^2 dt \int_0^1 \left\{ e^{rt} [F(0) + C1_0 t + C1_1 t^2] \right\}^2 dt}},$$

$$E20 = \frac{\int_1^3 \left\{ -\frac{1}{t+1} - e^{rt} [F(0) + C2_0 t + C2_1 t^2] \right\}^2 dt}{\sqrt{\int_1^3 \left(-\frac{1}{t+1} \right)^2 dt \int_1^3 \left\{ e^{rt} [F(0) + C2_0 t + C2_1 t^2] \right\}^2 dt}}.$$

По результатам математического моделирования среднее значение относительной ошибки равно $E0 \approx 5 \cdot 10^{-6}$ (спектральная плотность 5000). Результаты моделирования, представленные на рис. 3, показывают хорошее сходство результатов, полученных по результатам моделирования метода номинальной траектории и метода аппроксимации. В целом из анализа экспериментальных данных следует, что предлагаемый метод аппроксимации номинальной траектории является эффективным и конструктивным для построения систем нелинейной фильтрации, которые удовлетворяют условиям применения метода номинальной траектории.

Необходимо отметить, что практический интерес представляет также аппроксимация номинальной траектории при значении корня характеристического уравнения $r = 0$. При этом будет исключена операция возведения в степень экспоненты, что приведет к уменьшению вычислительных затрат. Естественно, при этом для обеспечения необходимой точности потребуется увеличить число членов степенного ряда. В этом случае, как трудно показать, уравнение, аппроксимирующее

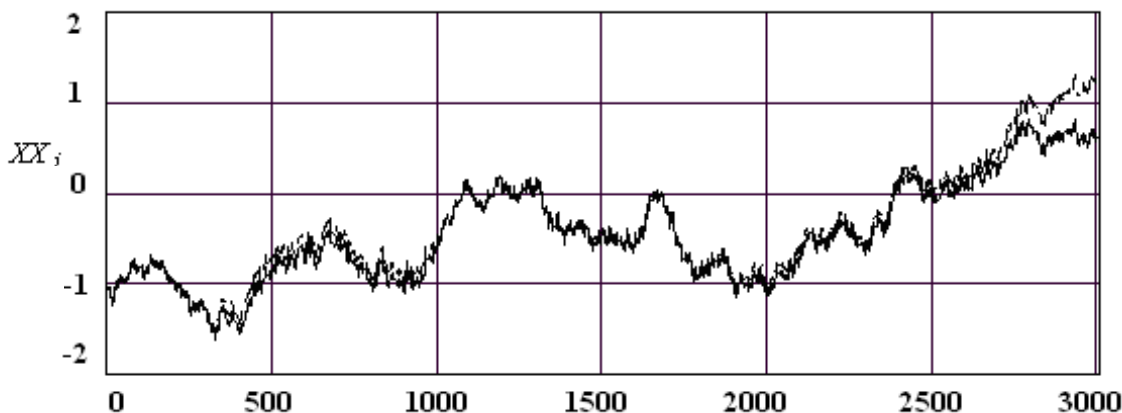


Рис. 3. Моделирование нелинейной системы и ее аппроксимация на интервале $t = [0, 3]$ (3000 отсчетов) при $N = 5000$

исходную нелинейную стохастическую ДС, будет иметь следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{C_1}{C_0} x + b(t), \quad b(t) = -2 \frac{C_1^2}{C_0} t^2 - F(0),$$

$$x(0) = F(0).$$

ВЫВОДЫ

Как результат теоретических исследований и проведенного анализа данных модельного эксперимента по модифицированному методу номинальных траекторий можно сделать следующие выводы.

1. Для аппроксимации нелинейных стохастических систем линейными системами первого порядка предлагается модифицированный метод номинальных траекторий, сущность которого состоит в представлении номинальной траектории в виде взвешенного ряда экспоненциальных функций.

2. Особенность предлагаемого представления нелинейной системы состоит в наличии зависимости от времени свободного члена $b(t)$. Его наличие определяет аппроксимирующую систему как линейную нестационарную.

3. Предлагаемый метод представления номинальной траектории в виде экспоненциального ряда как решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка является более предпочтительным в сравнении с классическим методом номинальной траектории по причинам, которые определяются конструктивными свойствами реализующих фильтров:

- структура фильтра получается неизменной и определяется стандартным видом экспоненциального ряда; для его реализации необходимо оптимизировать постоянные интегрирования и корни характеристического уравнения;

- структура реализующего фильтра содержит только операции сложения, умножения на число и вычисление степени r стандартной экспоненты $\exp(t)$, и поэтому, если исходная номинальная траектория имеет сложный вид, преимущество предлагаемого подхода будет очевидным;

- при использовании секционирования в рамках предлагаемого подхода нет необходимости изменять структуру фильтра, т. к. при этом можно варьировать только постоянные интегрирования C и значения корней r характеристических уравнений.

4. Применимость предлагаемого подхода определяется условиями применимости метода номинальных траекторий — малостью корреляционной матрицы формирующего шума и корреляционной матрицы, характеризующей начальную неопределенность.

Предложенный метод аппроксимации стохастической нелинейной динамической системы, нельзя рассматривать в отрыве от алгоритма фильтрации и технического средства его реализующего. Именно в таком контексте и надо понимать новизну предлагаемого представления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987. 303 с.

2. Красовский А.А. и др. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 711 с.
3. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990. 207 с.
4. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
6. Шлома А.М. Фидуциальный подход к теории фильтрации // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 9. С. 1845.
7. Дашевский М.П. Синтез условно оптимальных фильтров на основе уравнений оптимальной нелинейной фильтрации // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 53–62.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 831 с.
9. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985. 343 с.
10. Алберт Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
11. Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994. 356 с.

**Военно-морской институт радиоэлектроники
им. А.С. Попова, г. Петродворец**

Контакты: Бутырский Евгений Юрьевич,
evgenira88@mail.ru

Материал поступил в редакцию 12.10.2012

METHOD TO APPROXIMATIONS OF THE NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM LINEAR WITH VARIABLE PARAMETER

Eu. Yu. Butyrsky

Popov Higher Naval Academy of Radio Electronics, Petrodvorets

In article is considered modification of the method to nominal path, used under оценивании nonlinear dynamic systems. Essence of the method is concluded in approximations of the nonlinear dynamic system by linear system of the same order, as source nonlinear and presentation to nominal path approximation decisions of the deterministic part of differential equation exponential beside.

Keywords: function, approximation, nominal path, modeling, dynamic system, signal, process, algorithm, matrix, presentations, filtration