

УДК 537.534.7: 621.319.7

© А. С. Бердников

МЕНЯЮЩИЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ УСРЕДНЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.

Ч. 3. ВРЕМЕННЫЕ СИГНАЛЫ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫЕ "МЕДЛЕННЫМ" И "БЫСТРЫМ" ВРЕМЕНАМИ

Данная работа посвящена анализу временных сигналов, изменения которых характеризуются "медленными" и "быстрыми" временами. Получена универсальная схема параметризации временных сигналов, спектр которых распадается на далеко расположенные и узкие участки с ненулевыми значениями спектральной функции. Рассмотрены различные технические приемы реализации подобных сигналов.

Кл. сл.: масс-спектрометрические приборы, радиочастотные приборы, эффективный потенциал, высокочастотные электрические поля, радиочастотные электрические поля, временные сигналы

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе этого цикла [1] была получена общая формула для медленноменяющегося эффективного потенциала высокочастотного электрического поля, характеризованного "медленным" и "быстрым" временами изменения электрического поля. А именно, пусть высокочастотное электрическое поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y, z, t) + \sum_{(k)} \left(\mathbf{E}_k^{(c)}(x, y, z, t) \cos \omega_k t + \mathbf{E}_k^{(s)}(x, y, z, t) \sin \omega_k t \right), \quad (1)$$

где компоненты высокочастотного электрического поля $\mathbf{E}_0(x, y, z, t)$, $\mathbf{E}_k^{(c)}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{E}_k^{(s)}(x, y, z, t)$ являются "медленными" функциями времени, а ω_k — "быстрыми" и "далеко разнесенными" частотами. Тогда усредненное движение заряженной частицы с массой m и зарядом e в таком высокочастотном электрическом поле описывается уравнениями, которые совпадают с уравнениями движения обычной заряженной частицы, осуществляющегося в некотором "эффективном" силовом поле — а именно в фиктивном электрическом поле с потенциалом $U_0(x, y, z, t) + \bar{U}(x, y, z, t)$, где $U_0(x, y, z, t)$ — это "медленный" электрический потенциал, соответствующий низкочастотной компоненте электрического поля $\mathbf{E}_0(x, y, z, t)$, а $\bar{U}(x, y, z, t)$ — это "медленный" эффективный по-

тенциал, который выражается через "медленные" амплитуды быстрых гармоник электрического поля, как

$$\bar{U}(x, y, z, t) = e \sum_{(k)} \left(\left| \mathbf{E}_k^{(c)}(x, y, z, t) \right|^2 + \left| \mathbf{E}_k^{(s)}(x, y, z, t) \right|^2 \right) / (4m\omega_k^2).$$

Эта формула является обобщением известной классической формулы эффективного потенциала для высокочастотных электрических полей, представимых в виде суммы высокочастотных гармоник с постоянными (но зависящими от точки пространства) амплитудами. Подробности изложены в предыдущей работе цикла [1].

Целью настоящей работы является анализ временных сигналов, которые позволяют создавать высокочастотные электрические поля, описываемые параметризацией вида (1). Будет показано, что временные сигналы, характеризующиеся "медленным" и "быстрым" временами изменения, практически всегда могут быть представлены в форме

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{(k)} \left(f_k^{(c)}(t) \cos \omega_k t + f_k^{(s)}(t) \sin \omega_k t \right),$$

где $f_0(t)$, $f_k^{(c)}(t)$ и $f_k^{(s)}(t)$ — "медленные" функции времени, а ω_k — "быстрые" и "далеко разнесенные" частоты. А именно, любой временной сигнал, спектр которого распадается на отдельные достаточно узкие и достаточно далеко разнесенные участки с ненулевыми значениями

спектральной функции, может быть представлен в таком виде. В работе также рассматриваются некоторые технические приемы, с помощью которых могут быть легко созданы временные сигналы, относящиеся к указанному классу.

1. СВЯЗЬ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ

Без ограничения общности можно считать, что высокочастотные электрические поля, используемые в устройстве, получаются путем применения временной модуляции к статическим электрическим полям. А именно, если $\mathbf{E}(x, y, z)$ — это электрическое поле в точках пространства с координатами (x, y, z) , образующееся, когда к электроду или электродам устройства приложены некоторые постоянные напряжения, то в результате изменения указанных напряжений во времени в соответствии с законом $f(t)$, где $f(t)$ — это заданная быстроосциллирующая функция времени t , в объеме устройства образуется высокочастотное электрическое поле $\mathbf{E}(x, y, z)f(t)$. Соответственно, если имеется несколько групп электродов (группа может состоять из одного-единственного электрода), каждой группе электродов при подаче на них постоянного во времени напряжения соответствует свое возникающее в объеме устройства статическое электрическое поле $\mathbf{E}_k(x, y, z)$, и имеется подходящий набор высокочастотных функций $f_k(t)$, то результирующее высокочастотное электрическое поле, которое возникает, если на электроды k -й группы вместо постоянных напряжений подать напряжения, меняющиеся во времени по закону $f_k(t)$, будет иметь вид $\sum \mathbf{E}_k(x, y, z)f_k(t)$ (принцип суперпозиции электрических полей, являющийся следствием линейности уравнения Лапласа).

Поэтому если временные сигналы, описывающие изменение во времени электрических напряжений, прикладываемых к электродам, имеют вид $f_k(t) = f_{k0}(t) + \sum_j f_{jk}^{(c)}(t)\cos\omega_j t + f_{jk}^{(s)}(t)\sin\omega_j t$, где $f_{j0}(t)$, $f_{jk}^{(c)}(t)$ и $f_{jk}^{(s)}(t)$ — "медленные" функции времени, а ω_j — "быстрые" и "далеко разнесенные" частоты, то высокочастотные электрические поля, создаваемые в области движения заряженных частиц, имеют требуемый нам вид:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \sum_{(k)} \mathbf{E}_k(x, y, z) f_k(t) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(k)} \mathbf{E}_k(x, y, z) \times \\ &\quad \times \left(f_{k0}(t) + \sum_j \left(f_{jk}^{(c)}(t) \cos\omega_j t + f_{jk}^{(s)}(t) \sin\omega_j t \right) \right) = \\ &= \sum_{(k)} \left(\mathbf{E}_k(x, y, z) f_{k0}(t) \right) + \\ &\quad + \sum_{(j)} \cos\omega_j t \sum_{(k)} \left(\mathbf{E}_k(x, y, z) f_{jk}^{(c)}(t) \right) + \\ &\quad + \sum_{(j)} \sin\omega_j t \sum_{(k)} \left(\mathbf{E}_k(x, y, z) f_{jk}^{(s)}(t) \right) = \\ &= \mathbf{E}^{(0)}(x, y, z, t) + \sum_{(j)} \left(\mathbf{E}_j^{(c)}(x, y, z, t) \cos\omega_j t + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}_j^{(s)}(x, y, z, t) \sin\omega_j t \right). \end{aligned}$$

Неявно использованное, но важное предположение состоит в том, что набор частот ω_j является одним и тем же для всех сигналов, использованных для создания высокочастотного электрического поля. Для некоторых сигналов $f_k(t)$ некоторые частоты ω_j могут отсутствовать, однако для наших целей важно, чтобы среди частот ω_j не было "близких" частот.

Придадим конкретный математический смысл, что будет пониматься далее под "медленными" и "быстрыми" временами. Пусть имеются верхняя граница "медленных" частот δ и нижняя граница "быстрых" частот Δ . Очевидным образом предполагается, что $\Delta \gg \delta$. Функция $h(t)$ называется "медленной", если ее спектр равен нулю (или пренебрежимо мал) вне интервала частот $\omega \in (-\delta, +\delta)$. Функция $H(t)$ называется "быстрой", если ее спектр равен нулю (или пренебрежимо мал) на интервале частот $\omega \in (-\Delta, +\Delta)$. То есть функция $H(t)$ содержит только высокочастотные компоненты и не содержит низкочастотных, а функция $h(t)$ содержит только низкочастотные компоненты и не содержит высокочастотных. Указанные ограничения на спектр функций влекут за собой справедливые "в среднем" неравенства:

$$|dh(t)/dt|^2 / |h(t)|^2 \leq \delta^2 \quad \text{и} \quad |dH(t)/dt|^2 / |H(t)|^2 \geq \Delta^2.$$

Интервалы частот $\omega \in (-\delta, +\delta)$ и $\omega \in (-\infty, -\Delta) \cup (+\Delta, +\infty)$ для низкочастотных и для высокочастотных компонентов не пересекаются и достаточно далеко разнесены друг от друга.

Класс "медленных" функций образует линейное пространство (тождественный ноль — тоже "медленная" функция). Более того, произведение

двух "медленных" функций также является "медленной" функцией, но с более слабым показателем "медленности": после преобразования Фурье произведение функций превращается в свертку спектров, так что спектр произведения двух "медленных" функций будет равен нулю вне интервала частот $\omega \in (-2\delta, +2\delta)$. Соответственно спектр произведения N "медленных" функций будет равен нулю вне интервала частот $\omega \in (-N\delta, +N\delta)$.

Класс "быстрых" функций, как они были определены выше, нуждается, однако, в уточнении. Такие функции не образуют линейное пространство (отсутствует ноль), а сумма или произведение двух "быстрых" функций может содержать в неявном виде "медленное" время: например,

$$\begin{aligned}\cos(\omega - \delta)t + \cos(\omega + \delta)t &= 2\cos\delta t \cos\omega t, \\ \cos(\omega - \delta)t \cdot \cos(\omega + \delta)t &= (1/2)\cos 2\delta t - (1/2)\cos 2\omega t.\end{aligned}$$

Произведение "медленной" функции и "быстрой" функции является с формальной точки зрения "быстрой" функцией: в силу превращения произведения в свертку спектров, спектр произведения равен нулю на интервале частот $\omega \in (-(\Delta - \delta), +(\Delta - \delta))$ — однако выделение "медленных" временных зависимостей на фоне "быстрых" как раз и является нашей задачей.

В результате в качестве "быстрых" функций мы будем рассматривать гораздо более узкий класс функций — а именно набор гармоник $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$ с фиксированным набором частот ω_k , к которому для полноты базиса добавлена "медленная" функция 1. Частоты ω_k будут предполагаться "быстрыми" ($|\omega_k| \geq \Delta$) и "далеко разнесенными" ($\forall m \neq n: |\omega_m - \omega_n| \geq \Delta$). Такие функции очевидным образом образуют требуемое нам линейное пространство. При этом в центре нашего внимания будут находиться "быстро-медленные" функции, допускающие представление в виде

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{(k)} f_k^{(c)}(t) \cos\omega_k t + f_k^{(s)}(t) \sin\omega_k t,$$

где $f_0(t)$, $f_k^{(c)}(t)$ и $f_k^{(s)}(t)$ — "медленные" функции времени, а $\cos\omega_k$ и $\sin\omega_k$ — "быстрые" гармоники.

Как следует из предыдущей работы [1], посвященной выводу общей формулы для меняющегося во времени псевдопотенциала, условие, что частоты ω_k являются далеко разнесенными ($\forall m \neq n: |\omega_m - \omega_n| \geq \Delta$), является существенным. Для того чтобы произведение двух быстрых гармоник снова принадлежало искомому линейному пространству быстрых гармоник, необходимо,

чтобы наряду с частотами ω_m и ω_n набор частот ω_k содержал также все возможные суммарные и разностные частоты вида $\omega_m \pm \omega_n$. Чтобы удовлетворить этому условию, мы можем дополнить исходный набор частот новыми частотами, включив в него суммарные и разностные частоты. Предполагается, что расширенный набор частот по-прежнему удовлетворяет условию $|\omega_k| \geq \Delta$, однако при наличии несоизмеримых частот и при повторении указанного шага достаточное число раз это условие может нарушиться.

Наиболее безопасным в этом смысле является набор кратных быстрых гармоник $\omega_k = k\Omega$ ($\Omega \geq \Delta$), который изначально содержит в себе все возможные суммарные и разностные частоты и при этом удовлетворяет условию, что все частоты являются далеко разнесенными ($\forall m \neq n: |\omega_m - \omega_n| \geq \Omega \geq \Delta$) и быстрыми ($|\omega_k| \geq \Omega \geq \Delta$). Легко также показать, что подобные наборы частот являются единственными, если требуется удовлетворить условиям: а) содержать все возможные суммарные и разностные частоты, б) содержать только быстрые частоты $|\omega_k| \geq \Delta$. Тем не менее, если добавление суммарных и разностных частот ограничивается несколькими шагами, в процессе которых сохраняется в силе условие $|\omega_{m \pm n}| \geq \Delta$, вполне допустимо рассматривать наборы частот ω_k , которые не являются кратными. Условие, что исходные быстрые частоты ω_k являются далеко разнесенными ($\forall m \neq n: |\omega_m - \omega_n| \geq \Delta$), гарантирует, что по крайней мере после первого шага частоты останутся быстрыми.

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ "БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ" СИГНАЛОВ

В центре нашего внимания будут находиться "быстро-медленные" функции времени, которые представимы в виде

$$f(t) = p_0(t) + \sum_{(k)} (p_k(t) \cos\omega_k t + q_k(t) \sin\omega_k t), \quad (2)$$

где $p_k(t)$ и $q_k(t)$ — медленные функции, а ω_k — фиксированный набор быстрых и далеко разнесенных частот. Эти функции характеризуются одновременно двумя характерными масштабами времени — "медленным" и "быстрым". Такие функции образуют линейное пространство, а произведение этих функций принадлежит к подобному же классу, но с ослабленным параметром "медленности" ($\delta' = 2\delta$) и с расширенным набором частот ω_k ($\omega'_k = \{\omega_k \cup \omega_{m \pm n} = \omega_m \pm \omega_n\}$).

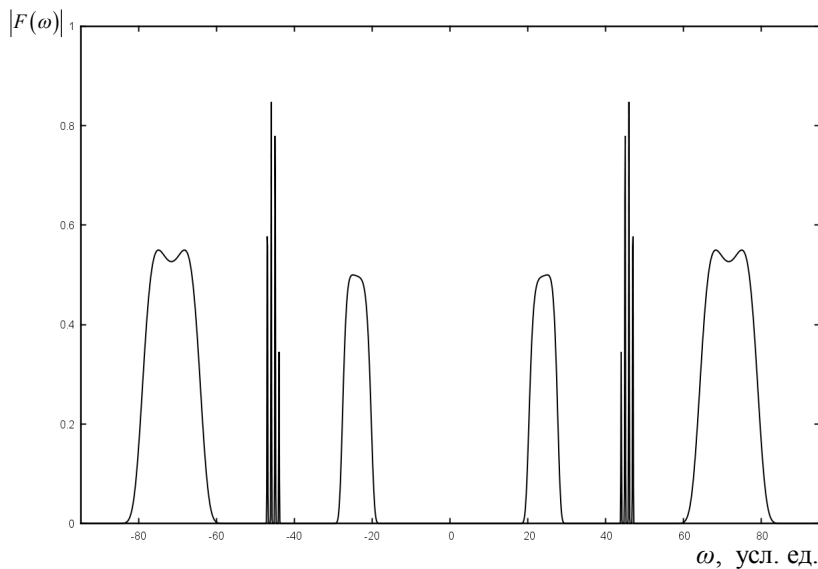


Рис. 1. Спектр временного сигнала, допускающего разбиение на "медленные" и "быстрые" частоты

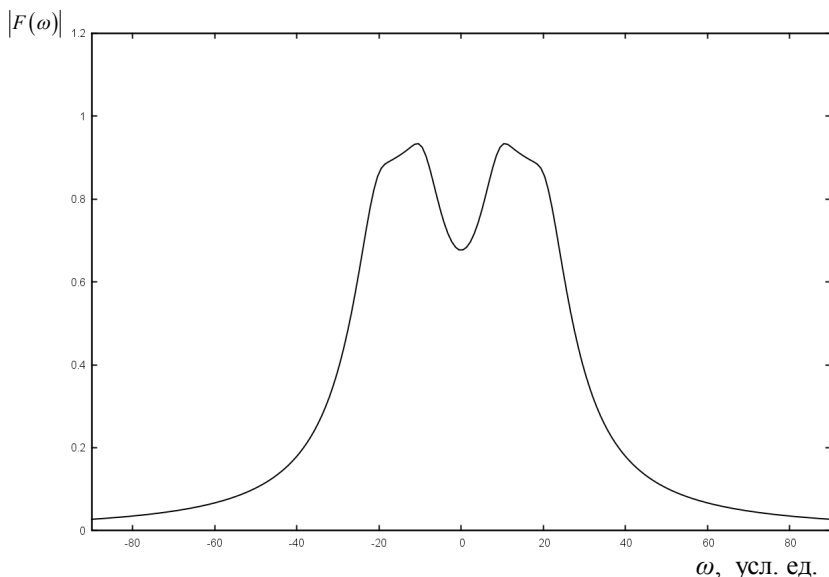


Рис. 2. Спектр временного сигнала, не допускающего разбиение на "медленные" и "быстрые" частоты

Физически данный класс функций представляет собой функции времени, спектр которых отличен от нуля на далеко разнесенных и узких интервалах $\omega \in (\omega_k - \delta, \omega_k + \delta)$ с фиксированными центрами ω_k и равен нулю (или пренебрежимо мал) для всех остальных частот. В этом разделе будет показано, что функции времени $f(t)$, у которых спектр обладает указанным свойством, действительно всегда могут быть приведены к виду (2).

Как известно [2–6], любая разумная функция $f(t)$ может быть представлена в виде интеграла Фурье $f(t) = \int F(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega$, где $F(\omega)$ — комплекснозначный спектр временного сигнала $f(t)$. Без ограничения общности можно считать,

что значение $\int |F(\omega)|^2 d\omega$ конечно и что функция $f(t)$ нормирована таким образом, чтобы выполнялось условие $\int |F(\omega)|^2 d\omega = 1$. Мы будем рассматривать только такие сигналы, у которых спектральная функция $F(\omega)$ представляет собой функцию определенного типа, схематично показанного на рис. 1: график спектральной функции распадается на достаточно далеко разнесенные друг от друга и достаточно короткие интервалы, вне которых спектральная функция может считаться равной нулю. Если же график спектральной функции сигнала $f(t)$ имеет, например, такой вид, как на рис. 2, применение общей теории проблематично и поиск правильной формы для эф-

фективного потенциала (если он существует в указанном ранее физическом смысле) требует, по-видимому, отдельного подхода.

Итак, пусть спектральная функция $F(\omega)$ относится к требуемому типу функций. Разобьем график спектральной функции (точнее, график квадрата модуля $|F(\omega)|^2$) на непересекающиеся интервалы $(\omega_n^* - \delta, \omega_n^* + \delta)$ длины 2δ и с центрами в точках ω_n^* . Вне этих интервалов функция $|F(\omega)|^2$ настолько мала, что $\int |F(\omega)|^2 d\omega < \mu^2$, где μ — выбранный нами порог спектра (здесь интегрирование ведется по той части оси частот, которая осталась вне выделенных нами интервалов). Указанное разбиение оси частот на интервалы должно удовлетворять ограничениям, соответствующим разбиению характерных частот на "медленные" и "быстрые": $|\omega_n^*| \geq \Delta$, $|\omega_n^* - \omega_m^*| \geq \Delta$, $\Delta \gg \delta$.

Как и параметр μ , параметры δ и Δ выбираются сообразно рассматриваемой физической задаче. Если в спектре сигнала $f(t)$ присутствуют низкочастотные компоненты, т. е. если $|F(\omega)|^2$ существенно больше нуля на каком-то интервале $\omega \in (-\delta, +\delta)$, окружающего точку $\omega = 0$, из сигнала $f(t)$ необходимо предварительно вычесть низкочастотные составляющие, которые образуют "медленную" компоненту сигнала $p_0(t)$. Далее считается, что компонента $p_0(t)$ уже выделена и что в окрестности $\omega \in (-\delta, +\delta)$ спектр $|F(\omega)|^2$ равен нулю.

Рассмотрим некоторый интервал $\omega \in (\omega_n^* - \delta, \omega_n^* + \delta)$ и парный ему интервал $\omega \in (-\omega_n^* - \delta, -\omega_n^* + \delta)$. Построим функцию $F_n^*(\omega)$, которая совпадает с функцией $F(\omega)$ на этих двух интервалах и равна нулю вне этих интервалов. Функция $F_n^*(\omega)$ распадается на сумму двух функций: функции $F_n^a(\omega)$, не равной нулю только на интервале $\omega \in (\omega_n^* - \delta, \omega_n^* + \delta)$, и функции $F_n^b(\omega)$, не равной нулю только на интервале $\omega \in (-\omega_n^* - \delta, -\omega_n^* + \delta)$.

Комплекснозначная спектральная функция $F(\omega)$, порожденная вещественным временным сигналом, удовлетворяет условию самосопряженности, поэтому для ее симметричного фрагмента $F_n^*(\omega)$ также справедливы равенства $\text{Re } F_n^*(-\omega) =$

$= \text{Re } F_n^*(\omega)$ и $\text{Im } F_n^*(-\omega) = -\text{Im } F_n^*(\omega)$. Рассмотрим функции $F_n^a(\omega - \omega_n^*) = G_n(\omega) + iH_n(\omega)$ и $F_n^b(-\omega + \omega_n^*) = G_n(\omega) - iH_n(\omega)$, в которых соответствующий интервал спектральной функции сдвинут к началу координат (представление функций $F_n^a(\omega)$ и $F_n^b(\omega)$ в такой форме следует из приведенного выше условия самосопряженности для функции $F_n^*(\omega)$). Получившиеся комплекснозначные функции $F_n^a(\omega - \omega_n^*) = G_n(\omega) + iH_n(\omega)$ и $F_n^b(\omega + \omega_n^*) = G_n(-\omega) - iH_n(-\omega)$ очевидным образом равны нулю вне интервала $\omega \in (-\delta, +\delta)$. Однако относительно них, вообще говоря, нельзя утверждать, что они являются самосопряженными и соответствуют каким-то вещественным временным сигналам.

Однако если спектральная функция $G_n(\omega) + iH_n(\omega)$ соответствует комплекснозначному временному сигналу $p_n(t) - iq_n(t)$, то спектральная функция $G_n(-\omega) - iH_n(-\omega)$ соответствует сопряженному комплекснозначному временному сигналу $p_n(t) + iq_n(t)$. Это равенство легко получить, если ввести в рассмотрение $p_n(t)$ — вещественный временной сигнал, который соответствует самосопряженной спектральной функции $(G_n(\omega) + G_n(-\omega))/2 + i(H_n(\omega) - H_n(-\omega))/2$, и $q_n(t)$ — вещественный временной сигнал, который соответствует самосопряженной спектральной функции $-(H_n(\omega) + H_n(-\omega))/2 + i(G_n(\omega) - G_n(-\omega))/2$. Легко проверить из такого определения сигналов $p_n(t)$ и $q_n(t)$, что комплекснозначному сигналу $p_n(t) - iq_n(t)$ соответствует спектр $G_n(\omega) + iH_n(\omega)$, а комплекснозначному сигналу $p_n(t) + iq_n(t)$ соответствует спектр $G_n(-\omega) - iH_n(-\omega)$.

Функция $F_n^a(\omega)$ отличается от $F_n^a(\omega - \omega_n^*) = G_n(\omega) + iH_n(\omega)$ сдвигом по оси частот на $+\omega_n^*$, что отвечает в области временных сигналов умножению на $\exp(+i\omega_n^*t)$. Функция $F_n^b(\omega)$ отличается от $F_n^b(\omega + \omega_n^*) = G_n(-\omega) - iH_n(-\omega)$ сдвигом по оси частот на $-\omega_n^*$, что отвечает в области временных сигналов умножению на $\exp(-i\omega_n^*t)$. В результате суммирования указанных преобразова-

ний получаем, что спектральная функция $F_n^*(\omega) = F_n^a(\omega) + F_n^b(\omega)$ имеет прототипом вещественный временной сигнал

$$\begin{aligned} f(t) &= (p_n(t) - iq_n(t)) \exp(+i\omega_n^* t) + \\ &+ (p_n(t) + iq_n(t)) \exp(-i\omega_n^* t) = \\ &= 2p_n(t) \cos(\omega_n^* t) + 2q_n(t) \sin(\omega_n^* t), \end{aligned}$$

где, как легко заметить, функции $2p_n(t)$ и $2q_n(t)$ являются "медленными" в указанном выше смысле: их спектры целиком лежат в интервале частот $\omega \in (-\delta, +\delta)$.

Повторяя указанную операцию для всех остальных симметричных интервалов, на которых спектральная функция не равна нулю, получим представление исходного сигнала $f(t)$ в форме $f(t) = \sum p_n(t) \cos(\omega_n^* t) + q_n(t) \sin(\omega_n^* t) + \dots$, где многоточием в скобках заменен "выброшенный" остаток спектральной функции, являющийся пренебрежимо малым в силу условия отсечки $\int |F(\omega)|^2 d\omega < \mu^2$.

Выбор в указанной процедуре центральной частоты ω_n^* и представление прототипа для спектральной функции $F_n^*(\omega)$ в виде $p_n(t) \cos(\omega_n^* t) + q_n(t) \sin(\omega_n^* t)$ не являются, однако, пока что однозначными. Переход от частоты ω_n^* к частоте $\omega_n = \omega_n^* + \delta_n$ соответствует преобразованию

$$\begin{aligned} &(p_n(t) \cos \delta_n t - q_n(t) \sin \delta_n t) \cos \omega_n t + \\ &+ (p_n(t) \sin \delta_n t + q_n(t) \cos \delta_n t) \sin \omega_n t. \end{aligned}$$

Как легко видеть, новые функции $\tilde{p}_n(t) = p_n(t) \cos \delta_n t - q_n(t) \sin \delta_n t$ и $\tilde{q}_n(t) = p_n(t) \sin \delta_n t + q_n(t) \cos \delta_n t$ — тоже "медленные", если δ_n мало. Поправка δ_n , вычисляемая, например, по взвешенной формуле

$$\delta_n = \int (G_n^2(\omega) + H_n^2(\omega)) \omega d\omega / \int (G_n^2(\omega) + H_n^2(\omega)) d\omega,$$

делает эти вычисления инвариантными относительно сдвига центральной точки ω_n^* и приводит к такому представлению сигнала $f(t)$, в котором функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ в некотором смысле самые "медленные" из всех возможных. Иногда требуется поправка δ_n , обеспечивающая инвариантный выбор центральной частоты ω_n^* одновременно для нескольких сигналов $f_j(t)$ (это может оказаться необходимым, если интервалы-носители для спек-

тров временных сигналов $f_j(t)$ перекрываются или слишком близки, а центральные частоты для этих сигналов должны быть одинаковыми). В этом случае поправку δ_n можно вычислять, например, как среднее арифметическое поправок

$$\delta_{nj} = \int (G_{nj}^2(\omega) + H_{nj}^2(\omega)) \omega d\omega / \int (G_{nj}^2(\omega) + H_{nj}^2(\omega)) d\omega,$$

где базовая частота ω_n^* , естественно, выбрана одной и той же для каждого сигнала $f_j(t)$. Точная формула для вычисления поправки δ_n не является столь уж существенной, пока она остается малой относительно характерного значения "медленной" частоты δ , поскольку эффективный потенциал описывает усредненное движение заряженной частицы лишь с точностью до поправочных членов порядка δ/Δ .

Отметим, что с точки зрения вычисления эффективного потенциала это расхождение между новым и старым представлениями при переходе к сдвинутым центральным частотам не очень существенно. Легко заметить, что

$$\begin{aligned} (p_n(t))^2 + (q_n(t))^2 &\equiv (\tilde{p}_n(t))^2 + (\tilde{q}_n(t))^2 \quad \text{и} \\ p_n(t)p_{n'}(t) + q_n(t)q_{n'}(t) &\equiv \tilde{p}_n(t)\tilde{p}_{n'}(t) + \tilde{q}_n(t)\tilde{q}_{n'}(t), \end{aligned}$$

когда центральная частота ω_n для сигналов $p_n(t) \cos(\omega_n t) + q_n(t) \sin(\omega_n t)$ и $p_{n'}(t) \cos(\omega_n t) + q_{n'}(t) \sin(\omega_n t)$ смещается на одну и ту же величину δ_n . Поэтому значение эффективного потенциала

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, z, t) &= \\ &= e \sum \left(|\mathbf{E}_n^{(c)}(x, y, z, t)|^2 + |\mathbf{E}_n^{(s)}(x, y, z, t)|^2 \right) / (4m\omega_n^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(c)}(x, y, z, t) &= \sum_{(k)} \mathbf{E}_k(x, y, z) p_n^{(k)}(t), \\ \mathbf{E}_n^{(s)}(x, y, z, t) &= \sum_{(k)} \mathbf{E}_k(x, y, z) q_n^{(k)}(t), \end{aligned}$$

а функции $p_n^{(k)}(t)$ и $q_n^{(k)}(t)$ соответствуют разным сигналам, но одной и той же центральной частоте ω_n , не слишком сильно меняется при переходе к сдвинутым центральным частотам $\omega_n^* = \omega_n + \delta_n$: числители остаются неизменными, а для знаменателей выполнено соотношение $1/(\omega_n)^2 \approx 1/(\omega_n + \delta_n)^2$ в силу предполагаемого нами условия $\delta_n \ll \omega_n$. В силу этого неоднозначность выбора поправки δ_n для центральной частоты ω_n ме-

няет представление временного сигнала $f(t)$ в виде канонической тригонометрической суммы, но практически не меняет значение медленноменяющегося во времени эффективного потенциала, вычисляемого на основе полученной тригонометрической суммы.

3. СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ "БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ" ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ

Для создания в объеме масс-спектрометрического устройства требуемого высокочастотного электрического поля могут использоваться электрические напряжения разных типов. Наиболее простым способом, как следует из представления временного сигнала в форме $\sum p_n(t) \cos \omega_n t + q_n(t) \sin \omega_n t$, является "медленная" амплитудная модуляция синусоидальных высокочастотных сигналов $\cos \omega_n t$ и $\sin \omega_n t$:

$$\begin{aligned} A(t) \cos(\omega t + \varphi) &\equiv \\ &\equiv (A(t) \cos \varphi) \cos \omega t - (A(t) \sin \varphi) \sin \omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(t) \sin(\omega t + \varphi) &\equiv \\ &\equiv (A(t) \cos \varphi) \sin \omega t + (A(t) \sin \varphi) \cos \omega t, \end{aligned}$$

и "быстро-медленная" параметризация временного сигнала оказывается выполненной, если $A(t)$ — "медленная" функция.

Вместо амплитудной модуляции высокочастотных напряжений можно использовать фазово-модулированные высокочастотные напряжения, частотно-модулированные высокочастотные напряжения, цуги высокочастотных напряжений, надлежащим образом синхронизированных во времени (очевидно, что цуги высокочастотных сигналов являются частным, но практически наиболее просто реализуемым случаем амплитудной модуляции), а также суперпозицию высокочастотных колебаний с небольшими сдвигами частоты. Для фазово-модулированных и частотно-модулированных напряжений соответствующие преобразования выглядят, как:

$$\cos(\omega t + \varphi(t)) = (\cos \varphi(t)) \cos \omega t - (\sin \varphi(t)) \sin \omega t,$$

$$\sin(\omega t + \varphi(t)) = (\cos \varphi(t)) \sin \omega t + (\sin \varphi(t)) \cos \omega t,$$

$$\begin{aligned} \cos((\omega + \nu(t))t) &= (\cos(\nu(t))) \cos \omega t - \\ &- (\sin(\nu(t))) \sin \omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin((\omega + \nu(t))t) &= (\cos(\nu(t))) \sin \omega t + \\ &+ (\sin(\nu(t))) \cos \omega t, \end{aligned}$$

где "медленными" функциями должны быть функции $\cos \varphi(t)$, $\sin \varphi(t)$, $\cos(\nu(t))$ и $\sin(\nu(t))$. Интересным случаем является суперпозиция гармоник со сдвигами частоты (амплитуды гармоник могут при этом оставаться постоянными во времени), когда сдвиги частоты много меньше самой частоты:

$$\begin{aligned} \sum a_j(t) \cos(\omega + \sigma_j)t &= (\sum a_j(t) \cos(\sigma_j t)) \cos \omega t - \\ &- (\sum a_j(t) \sin(\sigma_j t)) \sin \omega t, \\ \sum b_j(t) \sin(\omega + \sigma_j)t &= (\sum b_j(t) \cos(\sigma_j t)) \sin \omega t + \\ &+ (\sum b_j(t) \sin(\sigma_j t)) \cos \omega t, \end{aligned}$$

где "медленными" должны быть функции $a_j(t)$, $b_j(t)$, $\cos(\sigma_j t)$ и $\sin(\sigma_j t)$, а сами сдвиги частот σ_j , вообще говоря, могут зависеть от времени.

Из указанных формул следует, в частности, что одна и та же функция может быть реализована несколькими разными методами. Так, временной сигнал $\cos \delta t \cdot \cos \omega t$ может рассматриваться как высокочастотный сигнал $\cos \omega t$, амплитудно-модулированный по закону $\cos \delta t$, либо как суперпозиция $(1/2) \cos(\omega + \delta)t + (1/2) \cos(\omega - \delta)t$ двух гармонических сигналов с постоянными амплитудами и близкими частотами. Техническая реализация сигнала будет разной, хотя математически мы получим тождественно равные функции времени.

Использование в качестве базового высокочастотного напряжения, которое подвергается амплитудной модуляции, фазовой модуляции, частотной модуляции и так далее, именно гармонического напряжения, меняющегося по закону $\cos(\omega t + \varphi)$, не является обязательным. Периодические, но не гармонические сигналы $f_k(t)$ однозначно определяются своим рядом Фурье $f(t) = \sum (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$. Если к сигналу в целом или к его отдельным гармоникам применяется амплитудная модуляция, частотная модуляция, фазовая модуляция, сдвиг отдельных частот при условии, что сдвиги частот много меньше базовой частоты ω , мы легко получаем высокочастотный сигнал с требуемыми свойствами, т. е. удовлетворяющий общей форме представления "быстро-медленных" сигналов в виде разложения по высокочастотным гармоникам, как $f(t) = p_0(t) + \sum p_k(t) \cos \omega_k t + q_k(t) \sin \omega_k t$. Суперпозиция указанных преобразований негармонических периодических сигналов также не представляет трудно-

стей. Тем самым в качестве управляющих сигналов с равным успехом могут использоваться периодические негармонические высокочастотные напряжения, и/или высокочастотные напряжения, содержащие в своем частотном спектре две или более частоты, и/или высокочастотные напряжения, содержащие в своем частотном спектре бесконечный набор частот, и/или импульсные высокочастотные напряжения.

Наконец, вместо аналоговых сигналов можно использовать импульсные сигналы, синтезируемые цифровым способом с помощью компьютера, микропроцессора или программируемого импульсного устройства. В этом случае как амплитуда каждого импульса, так и момент старта и момент окончания каждого импульса могут рассчитываться индивидуально, что позволяет разнообразить класс используемых сигналов до пределов, ограниченных только фантазией разработчика масс-спектрометрического устройства.

На рис. 3 приведены различные способы получения требуемых высокочастотных напряжений: а) амплитудная модуляция высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью функции $\sin(t/T)$; б) амплитудная модуляция высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью функции $\sin^2(t/T) = (1 - \cos(2t/T))/2$; в) амплитудная модуляция высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью функции $(1 - \gamma t/T) \sin(t/T)$; г) сумма четырех высокочастотных напряжений с разными частотами $\sin((\omega + 1/T)t) - \sin((\omega - 1/T)t) + \cos((\omega + 1/T)t) + \cos((\omega - 1/T)t)$, сдвинутая по фазе на $\pi/4$; д) суперпозиция фазово-модулированных высокочастотных напряжений, которая задается формулой $\cos(\omega t + \cos(t/T)) + \cos(\omega t - \cos(t/T)) - \cos(\omega t)$; е) суперпозиция фазово-модулированных высокочастотных напряжений, которая задается формулой $\cos(\omega t + \sin(\cos(t/T))) + \cos(\omega t - \sin(\cos(t/T))) - 1.3 \cos(\omega t)$; ж) частотная модуляция высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью функции $\sin(t/T)/(t/T)$; з) частотная модуляция высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью осциллирующей функции; и) прямоугольные цуги высокочастотных напряжений; к) профилированные цуги высокочастотных напряжений с растущим и спадающим фронтами.

Требуемые электрические напряжения, прикладываемые к электродам, могут создаваться

и другими техническими приемами — поведение эффективного потенциала создаваемого высокочастотного электрического поля является определяющим фактором для функционирования масс-спектрометрического устройства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в качестве базового представления для временных сигналов, характеризующихся быстрыми и медленными характерными временами, используется параметризация вида (2), где $p_0(t)$, $p_k(t)$ и $q_k(t)$ — медленные функции времени, а ω_k — быстрые и далеко разнесенные частоты. Такая параметризация обязана своим появлением специальной трактовке высокочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами, подсказанной М.Ю. Судаковым в процессе обсуждения данной проблематики (см. [7]).

На начальном этапе исследования построения теории медленно меняющегося эффективного потенциала (апрель 2010 г.) для описания временных сигналов, характеризующихся "быстрыми" и "медленными" характерными временами, вместо "медленных амплитуд" использовались "медленные фазовые добавки". А именно, в этом случае временные сигналы представляются в виде

$$f(t) = \sum C_{nm} \cos(\omega_n t + \delta_{nm}(t)),$$

$$f(t) = \sum D_{nm} \sin(\omega_n t + \vartheta_{nm}(t))$$

или даже

$$f(t) = \sum C_{nm} \cos(\omega_n t + \delta_{nm}(t)) + D_{nm} \sin(\omega_n t + \vartheta_{nm}(t)),$$

где "медленные" фазовые корректоры $\delta_{nm}(t)$ и $\vartheta_{nm}(t)$ применяются к "быстрым" чисто косинусоидальным или синусоидальным гармоникам $\cos \omega_n t$ и $\sin \omega_n t$, частоты ω_n являются "быстрыми" и "далеко разнесенными", а коэффициенты C_{nm} или D_{nm} не зависят от времени. Наличие индекса m подчеркивает, что возможно использование суперпозиции временных сигналов с одинаковыми базовыми частотами ω_n , но разными фазовыми корректорами $\delta_{nm}(t)$ и $\vartheta_{nm}(t)$. Например, при создании высокочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами в большинстве случаев оказывается достаточным использовать суперпозицию нескольких сигналов с одной и той же базовой частотой $\omega_n = \omega = \text{const}$, но с разными фазовыми добавками $\delta_{nm}(t)$ и $\vartheta_{nm}(t)$.

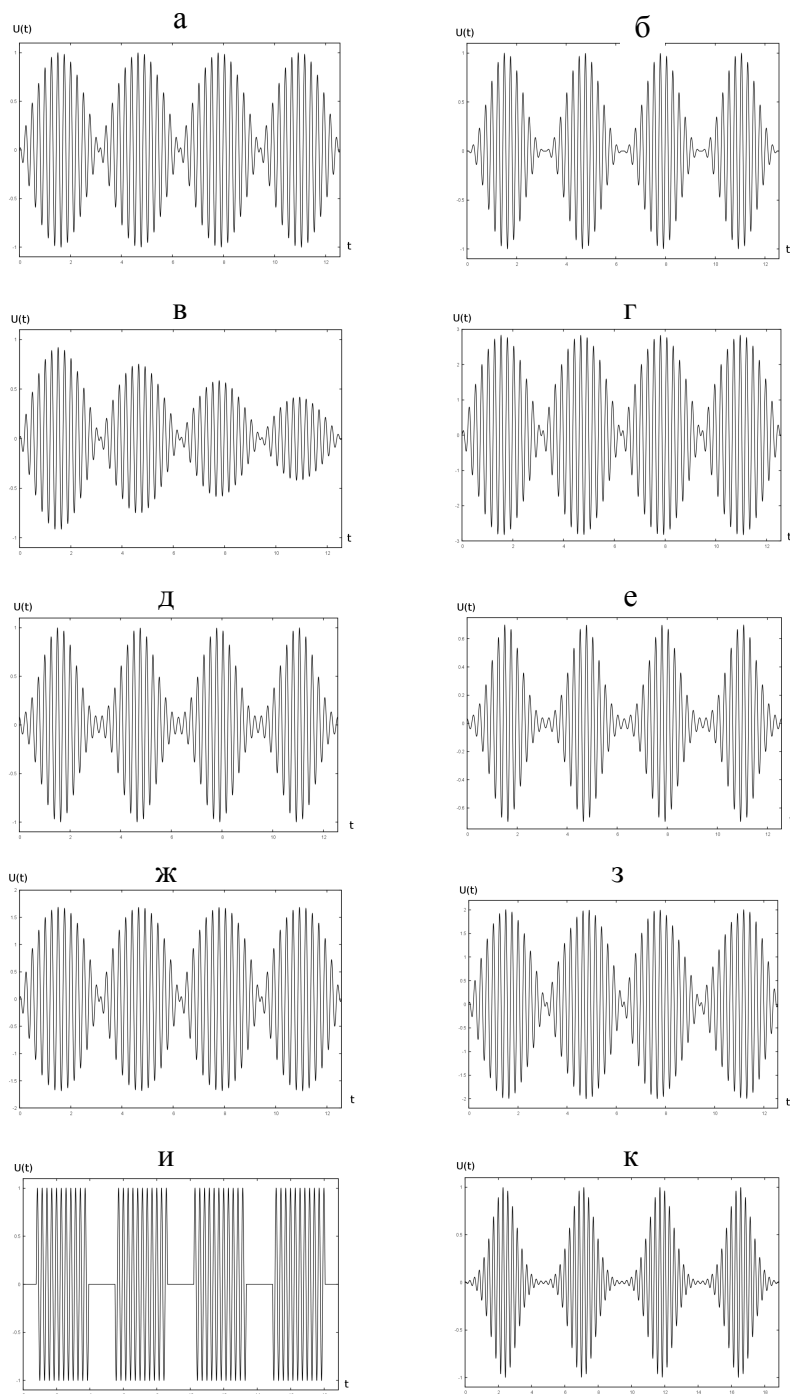


Рис. 3. Образцы эюр высокочастотного напряжения для создания эффективного потенциала.

а — пример высокочастотного напряжения $U(t)$, созданного с помощью амплитудной модуляции напряжения $\cos(\omega t)$ функцией $\sin(t/T)$;

б — ... созданного с помощью амплитудной модуляции напряжения $\cos(\omega t)$ функцией $\sin^2(t/T) = (1 - \cos(2t/T))/2$;

в — ... созданного с помощью амплитудной модуляции напряжения $\cos(\omega t)$ функцией $(1 - \pi/T)\sin(t/T)$;

г — ... созданного как сумма четырех высокочастотных напряжений с разными частотами $\sin((\omega + 1/T)t) - \sin((\omega - 1/T)t) + \cos((\omega + 1/T)t) + \cos((\omega - 1/T)t)$, сдвинутых по фазе на $\pi/4$;

д — ... созданного как суперпозиция фазово-модулированных высокочастотных напряжений, которая задается формулой $\cos(\omega t + \cos(t/T)) + \cos(\omega t - \cos(t/T)) - \cos(\omega t)$;

е — ... созданного как суперпозиция фазово-модулированных высокочастотных напряжений, которая задается формулой $\cos(\omega t + \sin(\cos(t/T))) + \cos(\omega t - \sin(\cos(t/T))) - 1.3\cos(\omega t)$;

ж — ... созданного частотной модуляцией высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью функции $\sin(t/T)/(t/T)$;

з — ... созданного частотной модуляцией высокочастотного напряжения $\cos(\omega t)$ с помощью осциллирующей функции;

и — ... состоящего из прямоугольных цугов высокочастотного синусоидального напряжения;

к — ... состоящего из цугов высокочастотного синусоидального напряжения с нарастающими и спадающими фронтами

По причинам, рассмотренным далее, в настоящий момент такая форма параметризации "быстро-медленных" временных сигналов представляется избыточной и менее удобной, чем параметризация с помощью медленных амплитуд, использованная в настоящей работе.

Сообразно указанной форме представления временных сигналов высокочастотное электрическое поле должно представляться как $\sum \mathbf{E}_{nm}^{(c)}(x, y, z) \cos(\omega_n t + \delta_{nm}(t))$ или как $\sum \mathbf{E}_{nm}^{(s)}(x, y, z) \sin(\omega_n t + \vartheta_{nm}(t))$, где два представления отличаются друг от друга всего лишь сдвигом на $\pi/2$ для медленных фаз. Легко показать, что такой параметризации "быстро-медленного" электрического поля соответствует медленноменяющийся во времени эффективный потенциал $\bar{U}(x, y, z, t)$, вычисляемый как $\bar{U}(x, y, z, t) = q \sum_n \left(\sum_m |\mathbf{E}_{nm}^{(c)}|^2 + 2 \sum_{i>j} \mathbf{E}_{ni}^{(c)} \cdot \mathbf{E}_{nj}^{(c)} \cos(\delta_{ni}(t) - \delta_{nj}(t)) \right) \times (4m\omega_n^2)^{-1}$ или соответственно как $\bar{U}(x, y, z, t) = q \sum_n \left(\sum_m |\mathbf{E}_{nm}^{(s)}|^2 + 2 \sum_{i>j} \mathbf{E}_{ni}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{nj}^{(s)} \cos(\vartheta_{ni}(t) - \vartheta_{nj}(t)) \right) \times (4m\omega_n^2)^{-1}$. В этих выражениях члены $\sum_m |\mathbf{E}_{nm}^{(c)}|^2$ ($\sum_m |\mathbf{E}_{nm}^{(s)}|^2$) соответствуют классическому эффективному потенциалу, а выделенные явно члены вида $2\mathbf{E}_{ni}^{(c)} \cdot \mathbf{E}_{nj}^{(c)} \cos(\delta_{ni}(t) - \delta_{nj}(t))$ или $2\mathbf{E}_{ni}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{nj}^{(s)} \cos(\vartheta_{ni}(t) - \vartheta_{nj}(t))$ обеспечивают архимедовы свойства высокочастотного поля, рассмотренные в [7].

Разложение временного сигнала на гармоники с медленными амплитудами (2) приводит к гораздо более компактной и на первый взгляд более общей форме. Легко видеть, однако, что с математической точки зрения оба способа представления временных сигналов являются эквивалентными. Сделав в формуле $f(t) = \sum (p_n(t) \cos \omega_n t + q_n(t) \sin \omega_n t)$ взаимно-однозначную замену $p_n(t) = 2R_n \cos \delta_n(t)$ и $q_n(t) = 2S_n \sin \vartheta_n(t)$ (где R_n — константа, большая или равная максимуму амплитуды $p_n(t)$, а S_n — константа, большая или равная максимуму амплитуды $q_n(t)$), получим эквивалентную формулу $f(t) = \sum R_n \cos(\omega_n t + \delta_n) + R_n \cos(\omega_n t - \delta_n) - S_n \cos(\omega_n t + \vartheta_n) + S_n \cos(\omega_n t - \vartheta_n)$. Это означает, что для перерасчета временного

сигнала, выраженного через медленные амплитуды, во временной сигнал, выраженный через медленные фазы, оказалось достаточным взять не более двух медленных фаз для каждой медленной амплитуды. Обратное преобразование формы с медленными фазами к форме с медленными амплитудами является тривиальным:

$$\begin{aligned} \sum C_{nm} \cos(\omega_n t + \delta_{nm}(t)) &= \\ = \sum C_{nm} (\cos \delta_{nm} \cos \omega_n t - \sin \delta_{nm} \sin \omega_n t) &= \\ = \sum_n \left[\cos \omega_n t \left(\sum_m C_{nm} \cos \delta_{nm}(t) \right) + \right. & \\ \left. + \sin \omega_n t \left(- \sum_m C_{nm} \sin \delta_{nm}(t) \right) \right] &= \\ = \sum p_n(t) \cos \omega_n t + q_n(t) \sin \omega_n t \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum D_{nm} \sin(\omega_n t + \delta_{nm}(t)) &= \\ = \sum D_{nm} (\cos \vartheta_{nm} \sin \omega_n t + \sin \vartheta_{nm} \cos \omega_n t) &= \\ = \sum_n \left[\cos \omega_n t \left(\sum_m D_{nm} \sin \vartheta_{nm}(t) \right) + \right. & \\ \left. + \sin \omega_n t \left(\sum_m D_{nm} \cos \vartheta_{nm}(t) \right) \right] &= \\ = \sum \tilde{p}_n(t) \cos \omega_n t + \tilde{q}_n(t) \sin \omega_n t. \end{aligned}$$

Несмотря на то что параметризация временного сигнала с помощью медленных фаз позволяет выделить в явном виде архимедовы компоненты меняющегося во времени эффективного потенциала, его очевидным недостатком является то, что представление временного сигнала в виде тригонометрической суммы с медленными фазами не является однозначным. Так, легко видеть, что при показанном выше пересчете медленных амплитуд в медленные фазы имеется слишком большой произвол в возможном выборе множителей R_n и S_n , что приводит к разным медленным фазам $\delta_n(t)$ и $\vartheta_n(t)$ для одного и того же временного сигнала. Если же при пересчете медленных амплитуд в медленные фазы использовать подстановки вида $p_n(t) = 2 \sum R_{nk} \cos \delta_{nk}(t)$ и $q_n(t) = 2 \sum S_{nk} \sin \vartheta_{nk}(t)$, где большая часть функций и коэффициентов являются совершенно произвольными (но "медленными"), то получим на выходе бесконечный набор возможных представлений для одного и того же

сигнала, которые с первого взгляда трудно признать идентичными. Как показано ранее в разделе 2, представление произвольного временного сигнала в форме (2) обладает существенно меньшей степенью произвола и жестко привязано к такой однозначной, объективной и независимой характеристике временного сигнала, как его спектр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердников А.С. // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 3. С. 83–96.
2. Fourier J.B.J. Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822. URL: (<http://books.google.com>).
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
5. Википедия: Преобразование Фурье.

URL: (http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform)

и

(http://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Фурье).

6. Weisstein E.W. Fourier Transform // MathWorld. A Wolfram Web Resource.

URL:

(<http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>).

7. Бердников А.С. // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 2. С. 77–89.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург*

Контакты: Бердников Александр Сергеевич,
asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 20.04.2011.

TIME-DEPENDENT PSEUDOPOTENTIAL AND ITS APPLICATION FOR THE DESCRIPTION OF THE CHARGED PARTICLES AVERAGED MOTION. PART 3. TIME DEPENDENT SIGNALS CHARACTERIZED BY "SLOW" AND "FAST" CHARACTERISTIC TIME

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

The series of publications describes a new method to control the movement of the charged particles by high frequency electric fields. This new class of high frequency electric fields is characterized by pseudopotentials slowly evolving in time. The paper considers the time signals which can be characterized by "slow" and "fast" characteristic times. The universal representation for the signals with the spectra separated into narrow intervals with non-zero spectral function was obtained. Different technical approaches for the generation of such time signals are considered.

Keywords: mass spectrometric devices, radio frequency devices, pseudopotentials, high frequency electric fields, radio frequency electric fields, time signals