

УДК 534.29; 534.138

© Б. П. Шарфарен

АНАЛИЗ РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЮ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ. 1. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ И СЛУЧАЙ МАЛЫХ ВОЛНОВЫХ РАЗМЕРОВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Работа посвящена обзору публикаций, относящихся к расчету радиационного давления звука в идеальных жидкостях и в случае малых волновых размеров пограничного слоя вокруг включения. Выделены и проанализированы основные работы, посвященные этому вопросу. Проанализированы выражения для радиационного давления, рассчитанные по Рэлею и Ланжевону—Бриллюэну. Показано, что при расчетах с точностью до величин второго порядка малости эти два метода дают тождественный результат. Показано, что в случае вязкой жидкости нельзя произвольно выбирать границы интегрирования в методе расчета радиационных сил по Ланжевону—Бриллюэну.

Кл. сл.: радиационное давление, тензор плотности потока импульса, амплитуда рассеяния, вязкая жидкость, идеальная жидкость

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных радиационному давлению звука. Среди них выделяются работы, существенно изменяющие "область определения" и эффективность существующей теории (последняя двигалась по пути усложнения от идеальных до реальных жидкостей, от простых к сложным первичным полям и включениям). Зачастую прикладникам бывает затруднительным выбор базовых работ из большого числа существующих в указанной области.

В рамках исходных предположений за основу брались различные основополагающие выражения, по которым, собственно, вычислялось радиационное давление. Открытым остается вопрос области их эквивалентности с точки зрения задаваемой точности. Нередко возникают случаи, когда нет согласия между авторами по отдельным принципиальным вопросам обсуждаемой тематики. Кроме того, вследствие обширного количества работ в указанной области целесообразно разбить изложение на две части в зависимости от вида окружающей включения жидкости: рассмотреть отдельно случаи идеальной и реальной жидкостей. Отсюда постановка проблемы.

В части 1 предлагаемой данной обзорной статьи рассматриваются наиболее важные, основополагающие работы, посвященные случаю, когда *включение* полностью или совместно с тонким пограничным слоем окружено идеальной жидкостью, что позволяет рассматривать задачу расчета

радиационного давления с единых позиций как решение линейной задачи рассеяния. Приводятся общие определения. Рассматриваются различные базовые выражения для расчета радиационного давления с целью доказательства их совпадения или, напротив, несовпадения.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Как известно, радиационное давление звука (РД) определено следующим образом [1]: "Давление звукового излучения (радиационное давление звука, давление звука) — среднее по времени избыточное давление на препятствие, помещенное в звуковое поле. Давление звукового излучения определяется импульсом, передаваемым волной в единицу времени на единицу площади препятствия...". Как это часто бывало в акустике, первым начал изучать это явление в 1902 г. Рэлей [2], рассматривая радиационное давление при нормальном падении плоской волны на полностью отражающую плоскую поверхность. Прозрачное физическое истолкование РД на плоскость раздела дано в [3, с. 219]: "Радиационное давление $\bar{p}$ определяется как *нормальная* компонента импульса, теряемого в единицу времени звуковой волной (отношенная к единице площади границы)".

Приведем еще одно определение [4, с. 178–179]: "Радиационные силы в системе координат Эйлера — постоянные силы, действующие на поверхность или объем, фиксированный относительно неподвижного пространства. Радиационные силы в лагранжевой системе координат — постоян-

ные силы, действующие на поверхность или объем, совершающий колебания. Точное значение радиационного давления, вообще говоря, различно в эйлеровой и лагранжевой системах. В лагранжевых координатах радиационное давление — среднее по времени значение звукового давления на поверхности, совершающей колебания в звуковом поле. Это радиационное давление часто называют рэлеевским радиационным давлением. В эйлеровых координатах изменение импульса звуковой волны, вызывающее действие силы на некоторый объем, где меняется импульс, как было показано Бриллюэном [5], определяется как скалярное произведение тензора плотности потока импульса на единичный вектор нормали к поверхности... Мы в дальнейшем это радиационное давление будем называть давлением по Ланжевону—Бриллюэну". Приведем полезную теорему [4, с. 180–181].

Для радиационных сил по Ланжевону—Бриллюэну справедливо следующее утверждение. Если импульс волны меняется в некотором замкнутом объеме V_1 , ограниченном поверхностью S_1 , то радиационная сила на поверхность S_2 , ограничивающая объем V_2 , внутри которого находится объем V_1 равна радиационной силе, действующей на поверхность S_1 , если импульс не меняется в объеме $V' = V_2 - V_1$.

Эта теорема важна своими следствиями для оценки РД на частицы в идеальной, либо вязкой жидкостях. В идеальной жидкости импульс меняется на неоднородностях, но не меняется в объемах, где их нет. Поэтому для определения РД, действующего на включение, достаточно определить РД, действующее на любой объем, включающий неоднородность при условии, что в нем нет других неоднородностей. В этом случае, согласно приведенной теореме, эта сила является инвариантом и равна РД на включение. Согласно [3], поток импульса (в случае отсутствия неоднородных включений) представляет собой обратимый перенос импульса, связанный просто с механическим передвижением различных участков жидкости из одного места в другое и с действующими в жидкости силами давления.

Приведем выражения для тензора плотности потока импульса: в случае идеальной жидкости

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad (1)$$

и в случае вязкой жидкости

$$\Pi'_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - T'_{ik} = \Pi_{ik} - T'_{ik} = -T'_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (2)$$

Тензор

$$T'_{ik} = -p\delta_{ik} + T'_{ik} \quad (3)$$

называют тензором напряжений, а тензор

$$T'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (4)$$

называют тензором вязких напряжений.¹⁾ Здесь v_i , $i = \overline{1,3}$ — составляющие вектора колебательной скорости; η , ζ — коэффициенты вязкости; ρ — плотность; p — акустическое давление.

Закон сохранения импульса для идеальной жидкости в дифференциальной форме имеет вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik}. \quad (5)$$

Для вязкой жидкости в (5) необходимо вместо Π_{ik} подставить тензор плотности потока импульса вязкой жидкости Π'_{ik} .

При обсуждении вопроса расчета средних сил, с которыми воздействуют акустические поля на ограниченные препятствия, предпочтительнее говорить не о РД, а о суммарной силе воздействия на препятствие, которую называют силой радиационного давления (СРД). Под этой суммарной средней силой будет пониматься средний суммарный импульс, передаваемый волной в единицу времени препятствию. Физическое истолкование СРД на частицу (шарик) дано в [3, с. 255]: "Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарик импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне".

Другое дело — случай вязкой жидкости. Согласно [3]: "Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью". Отсюда ясно, что предыдущая теорема в случае вязкой жидкости несправедлива, т. к. в окружающем частицу объеме также теряется импульс (этот сам окружающий объем представляет собой неоднородность). Поэтому СРД, действующая на произвольный объем, содержащий включение, не равна СРД, действующей на само включение. Качественное доказательство этого факта дано в Приложении.

Вследствие довольно длительной истории изучения природы радиационного давления на различные включения и препятствия существует достаточно много базовых и частных выражений для

¹⁾ При принятии допущения о линейной зависимости между тензорами напряжения и деформации, справедливого при условии, что отношение характерной скорости к характерной длине много больше тензора деформации, — условие т. н. ньютоновой жидкости [3].

его расчета. Следует различать выражения, используемые в случаях идеальной и реальной жидкостей.

Систематическое изучение СРД на ограниченные препятствия (включения) началось с работы Кинга [6], в которой рассматривается случай свободного жесткого шарика в поле плоских бегущей и стоячей волн. Базовое уравнение для расчета СРД следовало из второго закона Ньютона для сосредоточенной частицы:

$$\int_S \delta p \mathbf{n} ds = -\ddot{\xi} M. \quad (6)$$

Здесь ξ — вектор смещения шарика; $M = \frac{1}{3}\pi a^3 \rho_1$ — масса шарика радиусом a и плотностью ρ_1 ; s — неподвижная граница шарика; $\delta p = p - p_0$ — избыточное давление

$$\delta p = p - p_0 = \rho_0 \dot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \rho_0 v^2. \quad (7)$$

Здесь $v = |\mathbf{v}|$ — модуль колебательной скорости $\mathbf{v} = -\nabla \phi$; ϕ — потенциал колебательной скорости. Избыточное давление в [6] берется с точностью до второго порядка малости. Далее ищется средняя по времени величина стоящего слева в (6) интеграла, что и составляет искомую СРД.

В работах [4, 7] выражение для избыточного давления с точностью до второго порядка малости выглядит несколько иначе, а именно

$$\begin{aligned} \delta p &= p - p_0 = \\ &= p' + p'' + \dots = \rho_0 \dot{\phi}_1 + \rho_0 \dot{\phi}_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь приняты обозначения: $p = p_0 + p' + p'' + \dots$; p_0 — стационарное давление; p' , p'' , ... — избыточное (акустическое) давление соответственно первого, второго и т. д. порядков малости; $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}''$, ... — колебательные скорости первого, второго и т. д. порядков малости; $\mathbf{v}' = -\nabla \phi_1$, $\mathbf{v}'' = -\nabla \phi_2$, ...; ϕ_i — соответствующие потенциалы скорости, $i = 1, 2, \dots$. Выражения (7) и (8) отличаются на величину третьего порядка малости.

Второй работой после [6] по расчету СРД на включения достаточно общего вида по праву необходимо считать работу [3]. Ниже полностью приводится решение задачи 4, § 58 работы [3, с. 255], опубликованное, по-видимому, впервые именно в этой фундаментальной работе по общей теории механики сплошных сред в 1944 г.

Определить среднюю силу, действующую на твердый шарик, рассеивающий плоскую звуковую волну ($\lambda \gg R$).

Решение. Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарiku импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне. Из падающей волны рассеивается поток энергии, равный $\sigma c \bar{E}_0$, где $\bar{E}_0$ — плотность энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c , т. е. равен $\sigma \bar{E}_0$ (здесь σ — сечение рассеяния шарика, верхняя черта — символ осреднения). В рассеянной волне поток импульса в телесном угле $d\Omega$ равен $\bar{E}_p r^2 d\Omega = \bar{E}_0 d\sigma$. Проектируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это направление) и интегрируя по всем углам, получаем $\bar{E}_0 \int \cos \theta d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$\bar{E}_0 \int (1 - \cos \theta) d\sigma. \quad (9)$$

Рассмотрим далее алгоритм вычисления СРД в работе [7]. Здесь типичный случай вычисления СРД по Рэлею: СРД ищется как среднее значение интеграла по времени $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \left\langle - \int_{S(t)} \delta p \mathbf{n} ds \right\rangle, \quad (10)$$

где $S(t)$ — подвижная граница сжимаемого жидкого шарика с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 ; предполагается, что скорость перемещения границы одного порядка с величиной $|\mathbf{v}'|$; δp — избыточное давление из (8); ω — круговая частота колебаний. После подстановки (8) в (10) и учета только слагаемых не выше второй степени малости в [7] получено:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} \rangle &= \left\langle - \int_{S(t)} \delta p \mathbf{n} ds \right\rangle = \\ &= \left\langle - \int_{S(t)} \rho_0 \dot{\phi}_1 \mathbf{n} ds \right\rangle + \left\langle - \int_{S_0} \rho_0 \dot{\phi}_2 \mathbf{n} ds \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 \mathbf{n} ds \right\rangle + \left\langle - \int_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\phi}_1^2 \mathbf{n} ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ρ_0 — стационарное значение плотности окружающей жидкости, c — скорость звука в ней.

Очевидно, что второе слагаемое справа в (11) равно нулю

$$\left\langle - \int_{S_0} \rho_0 \dot{\varphi}_2 \mathbf{n} ds \right\rangle = 0.$$

Приведем отдельно способ вычисления в [7] интеграла $\int_{S(t)} \rho_0 \dot{\varphi}_1 \mathbf{n} ds$ в (11). Для этого рассматривается субстанциональная производная следующего интеграла

$$\frac{d}{dt} \left\langle \int_{S(t)} \rho_0 \varphi_1 \mathbf{n} ds \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \int_{B(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 dv \right\rangle. \quad (12)$$

Поскольку в работе [7] нет подробного вычисления (12), приведем его здесь. Имеет место следующая кинематическая теорема переноса [8]

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} F dv = \int_{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} F dv + \oint_{S(t)} F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (13)$$

В случае если $\mathbf{F}$ — вектор-функция, то последний в (13) поверхностный интеграл записывается так:

$$\oint_{S(t)} \mathbf{F} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

Здесь F — некоторая величина, характеризующая поведение жидкости; произвольный объем $B = B(t)$, состоящий из одних и тех же частиц и движущийся с жидкостью; $S(t)$ — движущаяся граница этого объема; в последнем объемном интеграле — частное дифференцирование по t при фиксированном объеме. Применим к (12) теорему переноса (13). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \rho_0 \varphi_1 \mathbf{n} ds &= \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 dv = \\ &= \int_{B(t)} \rho_0 \nabla \dot{\varphi}_1 dv + \oint_{S(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \\ &= \oint_{S(t)} \rho_0 \dot{\varphi}_1 \mathbf{n} ds + \oint_{S(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 v_n ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ — нормальная компонента колебательной скорости.

Пусть объем $B(t)$ и величина $\nabla \varphi_1$ меняются по гармоническому закону с частотой ω . Тогда функция времени $\int_{B(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 dv$ может содержать гармоники с частотой, кратной основной частоте, $n\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, функция

$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 dv$ содержит гармоники $n\omega$, $n = 1, 2, \dots$

(постоянная составляющая в процессе отсутствует). Поэтому эта функция, будучи осредненной на интервале $[0, T]$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$, равна нулю тождественно

$$\left\langle \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 dv \right\rangle \equiv 0.$$

Из (14) имеем

$$\left\langle \oint_{S(t)} \rho_0 \dot{\varphi}_1 \mathbf{n} ds \right\rangle = - \left\langle \oint_{S(t)} \rho_0 \nabla \varphi_1 v_n ds \right\rangle. \quad (15)$$

А если принять во внимание точность не выше второго порядка малости в стоящем справа интеграле, то окончательно можно записать

$$\begin{aligned} \left\langle \oint_{S(t)} \rho_0 \dot{\varphi}_1 \mathbf{n} ds \right\rangle &= - \left\langle \oint_{S_0} \rho_0 \nabla \varphi_1 v_n ds \right\rangle = \\ &= \left\langle \oint_{S_0} \rho_0 \mathbf{v}' v'_n ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Окончательно выражение (11) с учетом (16) равно (сохраняя второй порядок малости, принимаем нормальную составляющую скорости приблизительно равной нормальной составляющей скорости в первом приближении $v_n \approx v'_n$)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} \rangle &= \left\langle - \int_{S(t)} \delta p \mathbf{n} ds \right\rangle = - \left\langle \oint_{S_0} \rho_0 \mathbf{v}' v'_n ds \right\rangle + \\ &+ \left\langle \oint_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 \mathbf{n} ds \right\rangle - \left\langle \oint_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\varphi}_1^2 \mathbf{n} ds \right\rangle = \\ &= - \oint_{S_0} \rho_0 \overline{\mathbf{v}' v'_n} ds + \oint_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 \overline{v'^2} \mathbf{n} ds - \oint_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \overline{\dot{\varphi}_1^2} \mathbf{n} ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Запись (17) в тензорном виде дает

$$\begin{aligned} \overline{P_i} &= - \oint_{S_0} \rho_0 \overline{v'_i v'_n} ds + \oint_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 \overline{v'^2} \mathbf{n} ds - \oint_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \overline{\dot{\varphi}_1^2} \mathbf{n} ds = \\ &= - \oint_{S_0} \rho_0 \overline{v'_i v'_k} n_k ds + \oint_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 \overline{v'^2} n_i ds - \oint_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \overline{\dot{\varphi}_1^2} n_i ds = \\ &= - \left\{ \oint_{S_0} \left[- \frac{1}{2} \rho_0 \overline{v'^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \overline{\dot{\varphi}_1^2} \right] \delta_{ik} + \rho_0 \overline{v'_i v'_k} \right\} n_k ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь учтено, что $v'_k n_k = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = v'_n$. Выражение (18) в точности совпадает с выражением (3) работы [9], полученным по Ланжевону—Бриллюэну в терминах тензора плотности потока импульса, рассчитанного на равновесной границе включения.

Таким образом, можно констатировать, что оба подхода: подход по Рэлею и подход по Ланжевону—Бриллюэну дают эквивалентный результат при вычислении СРД в идеальной жидкости с точностью до величин второго порядка малости. Поэтому выбор подхода определяется соображениями его удобства с точки зрения решения последующих задач. В полной мере это продемонстрировано в работе [9]. Автору, являющемуся учеником Л.Д. Ландау, явно под влиянием работы [3] в рамках подхода Ланжевона—Бриллюэна удалось получить очень удобное выражение для получения СРД в произвольном поле (выражение [9, (11)]).

Остановимся еще на ряде вопросов, связанных с вычислением СРД в идеальной жидкости. Развитие соответствующей теории шло по двум направлениям:

- 1) усложнение рассеивателя;
- 2) усложнение внешнего акустического поля.

Исходная работа [6] была простейшей с точки зрения этих двух пунктов: рассматривался простейший рассеиватель — жесткий шарик — и простейшие виды внешнего поля — плоские волны. Работа [3] усложнила рассеиватель: рассматривалась уже сжимаемая мелкая частица в поле бегущей плоской волны на основе общего подхода Ланжевона—Бриллюэна. Работа [7] еще более усложнила условия: рассматривался уже сжимаемый жидкий шарик произвольных размеров в поле бегущей и стоячей плоских волн. С работ [3, 7] начинается рассмотрение включения как колеблющегося объема, что в дальнейшем используется последующими исследователями. В работе [9] вслед за работой [3], используя важный факт о неизменности среднего потока импульса вне рассеивателя, СРД рассчитывается через тензор плотности потока импульса в дальней зоне рассеянного поля. Кроме того, достаточно просто учитывается произвольность первичного поля. Применимость результатов [9] ограничивается, однако, случаем, когда размеры частицы много меньше длины волны звука. Именно в этой работе было показано, что для вычисления СРД с точностью до членов второго порядка по скорости достаточно найти решение линейной задачи рассеяния. В работе [10] развиваются результаты работы [6] для жесткого шарика для более сложных первичных полей, обладающих сферической симметрией. Здесь указаны только этапные работы, после публикации которых появлялся шлейф идущих в русле многочисленных последующих статей. Наконец СРД

для произвольных первичных полей и сложных включений в идеальной жидкости удалось получить в цикле работ [11–16] с помощью решения линейной задачи рассеяния в произвольном падающем поле и при произвольном включении, характеризующимся лишь амплитудой рассеяния в поле плоской бегущей волны. Тем самым решение соответствующей задачи для идеальной жидкости можно считать в основном завершенным для случая свободного пространства.

Что касается ограниченного пространства, то при условии возможности пренебрежения многократным рассеянием на включении задача сводится к предыдущей, если известно результирующее первичное поле. Если пренебрежение многократным рассеянием неправомерно, то необходимо учитывать результирующее поле рассеяния.

В реальной жидкости расчет СРД усложняется математически. Если в случае идеальной жидкости, как показано в работах [9, 11–16], в конечном итоге нелинейная задача расчета радиационного давления сводится к линейной задаче рассеяния, как в длинноволновом приближении [9], так и в общем случае [11–16], то в случае вязкой теплопроводящей жидкости приходится уже решать нелинейную задачу.

По-видимому, первым обратился к учету вязкости среды в проблеме расчета радиационного давления известный специалист по нелинейной акустике Вестервельт (Westervelt P.J.) [17–19]. В работе [17] автор еще не учитывает вязкость, а только рассматривает средние силы в плоской бегущей волне, вызванные нелинейными эффектами. В работах [18, 19] рассчитано радиационное давление, вызванное плоской бегущей волной на жесткую сферу в предельном случае, когда радиус сферы намного меньше и длины звуковой волны, и вязкостной волны (температурные волны автор не учитывал). Кроме того, он пренебрег акустическим течением, развивающимся в окрестностях сферического препятствия. Финальные выражения автора выглядят следующим образом

$$P_{\parallel} = \bar{E}_0 \left(\sigma_s + \sigma_v - \int \cos \theta d\sigma \right). \quad (19)$$

Здесь $P_{\parallel}$ — составляющая СРД, совпадающая по направлению с движением плоской бегущей волны; $\bar{E}_0$ — средняя плотность энергии в падающей волне; σ_s , σ_v — сечения рассеяния и вязкого поглощения включения соответственно; $d\sigma$ — дифференциальное сечение рассеяния включения (как известно $d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $f(\theta, \varphi)$ — амплитуда рассеяния на включении, θ , φ — сферические углы). Плоская волна движется в поло-

жительном направлении оси Oz . Сечения рассеяния и вязкого поглощения автор вычисляет.

Отметим, что предложенный автором подход не выходит за рамки решения линейной задачи рассеяния, принятый для идеальных жидкостей. Вся тяжесть, связанная с учетом вязкости среды, переносится на необходимость вычисления сечения вязкого поглощения. Чтобы в этом убедиться, достаточно посмотреть на выражение (9), полученное раньше в работе [3]. Для этого достаточно переписать это выражение в виде

$$\bar{E}_0 \left(\sigma - \int \cos \theta d\sigma \right) \quad (20)$$

и отметить идентичность выражений (19) и (20).

В работе [20] рассмотрено радиационное давление на сфере с потерями в идеальной жидкости. Отметим, что качественно результаты работ [18, 19] и работы [20] схожи — радиационное давление в обоих случаях растет.

Отсюда напрашивается вывод, что подход работ [18, 19] в виде (19) может быть заменен эквивалентным подходом, при котором реальное включение без потерь с примыкающим к нему тонким пограничным слоем с потерями заменяется неким включением с потерями, но без пограничного слоя, обладающим равным с первым случаем сечением поглощения. Например, в работе [21, с. 452] приведен алгоритм расчета амплитуды рассеяния с потерями. После расчета амплитуды рассеяния необходимо подобрать либо радиус сферы, либо поглощение в ней, с тем чтобы сечение поглощения совпадало с величиной, рекомендуемой в работах [18, 19]. После чего для расчета СРД может быть применена техника, развитая в работах [11, 16].

ВЫВОДЫ

В работе выделены и проанализированы основные работы, посвященные изучению радиационного давления на включения в случае идеальной жидкости и тонкого пограничного слоя, вызванного вязкостью окружающей среды. Проанализированы выражения для СРД, рассчитанные по Рэлею и Ланжевону—Бриллюэну. Показано, что при расчетах с точностью до величин второго порядка малости эти два метода дают тождественный результат. Сформулировано, что в случае вязкой жидкости нельзя произвольно выбирать границы интегрирования в методе расчета СРД по Ланжевону—Бриллюэну.

Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО ФАКТА, ЧТО В СЛУЧАЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НЕПРАВОМЕРНО ВЫБИРАТЬ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Выражение для СРД по Ланжевону—Бриллюэну, действующей на произвольный объем V , ограниченный поверхностью S , в случае идеальной однородной жидкости получается интегрированием (5) по указанному объему

$$\bar{P}_i = \left\langle - \int_S \Pi_{ik} n_k ds \right\rangle = \left\langle - \int_S (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k) n_k ds \right\rangle. \quad (П1)$$

Для вязкой жидкости вместо Π_{ik} из выражения (1) необходимо подставить тензор плотности потока импульса из (2), (4). Собирая, имеем

$$\begin{aligned} \bar{P}'_i &= \left\langle - \int_S \Pi'_{ik} n_k ds \right\rangle = \\ &= \left\langle - \int_S \left(p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) n_k ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (П2)$$

Как было сказано выше, расчет СРД в идеальной жидкости с точностью до величин второго порядка малости сводится к решению линейной задачи рассеяния на соответствующем включении. Будем рассматривать амплитуду рассеяния всего указанного выше произвольного объема V , содержащего внутри себя включение. Ясно, что эта амплитуда рассеяния является инвариантом и не зависит от выбранного объема, а совпадает с амплитудой рассеяния самого включения. Поэтому СРД в идеальной однородной жидкости не зависит от выбранного объема V и его границы S , по которой осуществляется интегрирование в (П1).

В случае вязкой жидкости проведем косвенное доказательство того, что сила, действующая на произвольный объем V , содержащий включение, уже не является инвариантом, а зависит от выбранного объема. Рассмотрим цепочку объемов $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$, каждый из которых включает предыдущий, а V_0 — равновесный объем включения. Пусть для каждого объема $V_i, i=1,2,3,\dots$ справедливо следующее допущение: внутри его находится включение и исходная вязкая жидкость,

а окружен он идеальной жидкостью. Тогда амплитуда рассеяния каждого такого объема V_i , окруженного идеальной жидкостью, будет зависеть от конкретного объема V_i , т. к. каждый последующий объем V_{i+1} претерпевает возмущение вследствие возмущения, вносимого вязкостью разностного объема $V_{i+1} \setminus V_i$.

Вследствие этого величина интегралов (П2) для границ $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$ соответствующих объемов $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ будет различной из-за различия амплитуд рассеяния соответствующих объемов.²⁾

В работах [18, 19, 22] и ряде других работ границы в (П2) берутся произвольно, что в свете сказанного выше является не совсем корректным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1988. (С. 533).
2. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. (§ 253 а).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Механика сплошных сред, гидродинамика и теория упругости. М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1944. 624 с.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
5. Brillouin L. Sur les tensions de radiation // Ann. Phys. 1925. N 4. P. 528.
6. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. 1934. A 147. P. 212–240.
7. Yosioka K., Kawasima Y. Acoustic Radiation Pressure on Compressible Sphere // Acustica. 1955. V. 5. P. 167–173.
8. Серпин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 256 с.
9. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // ДАН. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
10. Nyborg W.L. Radiation Pressure on a Small Rigid Sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 42, N 5. P. 947–952.
11. Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
12. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421, № 2. С. 186–189.
13. Шарфарец Б.П. Вычисление радиационного давления на рассеиватель с произвольной амплитудой рассеяния при воздействии произвольного поля в идеальной жидкости // Научное приборостроение. 2008. Т. 18, № 3. С. 63–66.
14. Князьков Н.Н., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Радиационное давление на сферу в смешанном поле бегущей и стоячей плоских волн // ДАН. 2009. Т. 424, № 6. С. 751–754.
15. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление на включение с заданной амплитудой рассеяния в произвольном внешнем поле // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 2. С. 147–152.
16. Шарфарец Б.П. О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включении в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 166–171.
17. Westervelt P.J. The Mean Pressure and Velocity in a Plane Acoustic Wave in a Gas // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22, N 3. P. 319–327.
18. Westervelt P.J. The Theory Steady Forces Caused by Sound Waves // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23, N 4. P. 312–315.
19. Westervelt P.J. Acoustic Radiation Pressure // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29, N 1. P. 26–29.
20. Hasegawa T., Watanabe Y. Acoustic Radiation Pressure on an Absorbing Sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63, N 6. P. 1733–1737.
21. Морс Ф.М., Феибах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
22. Данилов С.Д., Миронов М.А. О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 467–473.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 12.04.2010.

²⁾ Допущение о негладкости функций η и ζ из (П2) на границах $S_1, S_2, S_3, \dots$ в проведенных выше рассуждениях можно устранить, если в каждом объеме V_i , $i=1,2,\dots$ рассматривать граничный слой δV_i между собственно объемом V_i и сопряженной с ним идеальной жидкостью, внутри которого функции η и ζ стремятся непрерывно к нулю. Объемы δV_i должны быть пренебрежимо малы и не изменять в рамках принятой точности (до второго порядка малости) соответствующих величин СРД в (П2).

**THE ANALYSIS OF THE WORKS DEVOTED
TO EVALUATION OF RADIATION PRESSURE.
1. IDEAL FLUID AND A CASE OF THE SMALL UNDULAR SIZES
OF THE INTERFACE**

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The work is devoted the review of literary data concerning calculation of the sound radiation pressure in ideal fluids and in case of the small undular sizes of an interface round the inclusion. Main works devoted to this problem were chosen and analyzed. Expressions for the radiation pressure, calculated on Relej and Lanzheven—Brilljuen are analyzed. It is shown, that at calculations with precision up to quantities of the second order of smallness these two methods give in identical result. It is shown, that in case of a viscous fluid it is impossible to choose arbitrarily integration boundaries in a computational method of radiation forces following Lanzheven—Brilljuen.

Keywords: radiation pressure, momentum flux tensor, scattering amplitude, viscous fluid, ideal fluid