

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский, И. А. Кувалдин, В. П. Чалкин

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБОБЩЕНИЮ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

В статье развивается теоретико-групповой подход, позволяющий с единых позиций трактовать значительный круг теории сигналов: выявление структуры, возможность представлений сигналов и их линейных комбинаций, классификация по признаку преобразований, — что является базой для разработки единых методов решения соответствующих задач обработки сигналов. На основе представления сигналов определяются их основные частотно-временные характеристики, обобщается корреляционно-спектральная теория, проводится классификация. Предлагаемый подход является конструктивным при построении систем связи и средств обнаружения сигналов, подверженных влиянию эффекта Доплера и другим преобразованиям.

Кл. сл.: теоретико-групповой подход, сигнал, структура, линейные комбинации, корреляционно-спектральная теория

ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных направлений в развитии теории сигналов, является направление, основанное на теоретико-групповых представлениях. Это связано с тем, что при своем распространении сигнал подвергается различным преобразованиям, связанными со свойствами среды, а также движениями источника и приемника сигналов. Подход позволяет с единых позиций трактовать значительный круг теории сигналов — выявлять структуру, классифицировать сигналы по признаку преобразований его носителя (время, частота), что является базой для разработки единых методов их обработки, согласованных с этими преобразованиями. На основе теоретико-групповых представлений в статье проводится дальнейшее развитие понятийного аппарата теории сигналов, обобщается корреляционно-спектральная теория. Математической основой таких моделей являются теоретико-групповые методы и представления сигналов на локально-компактных группах преобразований. Возникающие в таких моделях симметрии, однородности свойств описывают инвариантность характеристик сигналов относительно соответствующей группы преобразований. Необходимо отметить, что в соответствии с принципом дуализма между математическими моделями сигнала и системы предложенный подход позволяет экстраполировать многие рассматриваемые в статье понятия на теорию систем. Но этот дуализм ограничивается только математическими моделями сигнала и системы. На физическом уровне сигналы — это потоки информации между системами, а системы — это сред-

ства обработки сигналов для получения информации, содержащейся в них.

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Под сигналом будем понимать регистрируемые изменения параметров физических полей в пространстве-времени. Переносчиками сигналов служат физические процессы, вызывающие изменение параметров физических полей.

Математическая модель сигнала служит средством представления, описания, анализа и использования свойств сигналов и закономерностей их структуры, существенных в контексте решаемых задач. Поэтому, если рассматривать сигналы сами по себе, абстрагируясь в той или иной мере от систем, в которых они генерируются, возникает необъятное многообразие возможных представлений и классификаций. Успешность применения того или иного способа представления зависит в значительной степени от того, как наблюдатель намеревается использовать информацию, содержащуюся в сигнале. С другой стороны, распространение сигналов в тех или иных средах, сопровождается физическими явлениями, приводящими к их преобразованиям, которые необходимо учитывать при построении математических моделей сигналов и математических моделей систем в целом.

Для теории сигналов традиционно рассматривать представления сигналов во временной и частотной областях. Частотно-временной дуализм позволяет значительно упростить решение многих вопросов, связанных с анализом и синтезом сигналов, а также средствами их

обработки. Частотное и временное представления сигналов связаны между собой интегральным преобразованием (наиболее часто используется преобразование Фурье). Однако некорректность математической модели сигнала вследствие ее недостаточной адекватности реальному сигналу, неучет его симметричных свойств, где это необходимо, приводят к системам обработки, которые или не оптимальны в принципе, или позволяют извлечь информацию только путем усложнения обработки с высокими вычислительными и емкостными затратами.

С точки зрения информационного содержания математические модели сигнала, вытекающие из теоретико-групповых представлений, несут одинаковую информационную нагрузку, но ее извлечение требует различных вычислительных затрат. Поэтому хотя изоморфизм математических моделей в информационном плане не несет ничего нового и в этом смысле эти модели одинаковы, но в плане систем обработки он определяет алгоритмы, существенно отличающиеся друг от друга уровнем сложности и вычислительными затратами. В связи с этим такие модели представляют большой интерес, а их дальнейшее развитие является актуальным и своевременным.

Рассмотрим наиболее общие свойства преобразования Фурье на группе G преобразований носителя сигнала. Все эти свойства вытекают из функционального уравнения для "экспонент" [1, 2]

$$T(\chi, g): T(\chi, g_1)T(\chi, g_2) = T(\chi, g_1g_2).$$

1. Если $S(\chi)$ — преобразование Фурье функции $s(g)$, то преобразованиями Фурье функций $s(gg_0)$ и $s(g_0^{-1}g)$ будут соответственно операторные функции $S(\chi)T^{-1}(\chi, g_0)$ и $T(\chi, g_0)S(\chi)$. Отметим, что $T^{-1}(\chi, g_0)$ и $T(\chi, g_0)$, как и $S(\chi)$, являются операторными функциями от χ . Умножение операторных функций понимается как умножение операторов в пространстве однородных функций $D(\chi)$ при каждом фиксированном значении χ .

2. Сверткой двух сигналов $s_1(g)$ и $s_2(g)$, заданных на группе G , называют функцию

$$s_1 * s_2(g) = \int_G s_1(gg_1^{-1})s_2(g_1)dg. \quad (1)$$

Операция свертывания на группе, которая некоммутативна, является ассоциативной операцией, но некоммутативной (на абелевых группах эта операция всегда коммутативна). Если сигналы

непрерывны, то и их свертка на произвольной группе также непрерывна. Преобразование Фурье свертки двух сигналов на группе G равно произведению их преобразований Фурье (это совпадает со свойством обычного преобразования Фурье):

$$\int_G s_1 * s_2(g)T(\chi, g)dg = S_1(\chi)S_2(\chi). \quad (2)$$

3. Аналогично свертке функций на группе преобразований можно ввести корреляцию функций на группе:

$$s_1(g) * s_2(g^{-1}) = \int_G s_1(gg_1^{-1})s_2(g)dg. \quad (3)$$

4. Преобразование Фурье сигнала $s(g^{-1})$ задается интегралом:

$$\int_G s(g^{-1})T(\chi, g)dg = \int_G s(g)T(\chi, g^{-1})dg. \quad (4)$$

Согласно определению оператора $S(\chi)$, преобразование Фурье на группе можно представить как интегральный оператор, действующий в пространстве однородных функций $\varphi(t)$, задающих представление G [1, 2]. В соответствии с этим можно записать

$$S(\chi)\varphi(t) = \int_G s(g)T(\chi, g)\varphi(t)dg. \quad (5)$$

Найденные унитарные представления группы G индуцированы одномерными представлениями (характерами) мультипликативной подгруппы M . Используя введенные выше понятия, определим некоторые характеристики сигналов на группе преобразований.

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ

Для сигналов, определенных на аддитивной группе преобразований, широко используются такие характеристики, как эффективная ширина спектра W , эффективная длительность сигнала T , энергия сигнала, коэффициент узкополосности (отношение ширины спектра сигнала к его центральной частоте). Методы синтеза узкополосных сигналов, их анализ и обработка значительно проще, чем широкополосных, и достаточно широко освещены в литературе [3, 4]. Простота обработки связана прежде всего с возможностью аппроксимации эффекта Доплера узкополосным приближением, которая заменяет сжатие во временной области на частотный сдвиг спектра. В общем случае условие доплеровской

аппроксимации записывается в виде: $\frac{2\nu_p}{c}WT < 1$.

Если последнее условие не выполняется, то, несмотря на то что имеется целый ряд работ, посвященных этому вопросу [5–7], достаточно эффективных методов синтеза и анализа сигналов и методов их обработки не предложено. Необходимо отметить, что, исходя из общезначимой позиции научного исследования, понятие "широкополосности" само по себе без определения форм его симметрии, т. е. преобразований, относительно которых выделенный класс преобразований инвариантен, не имеет смысловой нагрузки. Теоретико-групповой подход к представлению сигналов позволяет ввести условие узкополосности и сдвиговой аппроксимации на классе сигналов с выделенной группой преобразований.

Представим широкополосный сигнал s как совокупность классов сигналов K_i , узкополосных для форм симметрии, определенной на каждом из классов. Такое разбиение соответствует заданию на множестве сигналов операции эквивалентности. Каждый из классов порождается однопараметрической группой преобразований, т. е. элементы одного класса сигналов можно переводить друг в друга операцией группового сдвига.

Каждая такая однопараметрическая группа полностью определяется инфинитезимальным оператором группы. Использование инфинитезимального оператора оказывается очень удобным инструментом при решении прикладных задач, связанных с обработкой сигналов.

Предположим, что преобразование времени задается соотношением, включенным в некоторое однопараметрическое семейство $\{T(a)\}$:

$$t' = T(a)t = f(t, a), \quad (6)$$

где a — вещественный параметр преобразования. Каждому частному значению a соответствует конкретное преобразование семейства. Будем предполагать, что значению $a=0$ соответствует тождественное преобразование $T_a = I$ и что при отличных от нуля a оператор отличен от тождественного. Если же тождественное преобразование получается не при $a=0$, то условие $T_a = I$ достигается простым сдвигом параметра $a = a_1 + a_0$. Если функция $f(t, a)$ удовлетворяет групповому свойству, то она является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (уравнение Ли), с начальным условием

$$\frac{df}{dt} = \xi(f), \quad f(a)|_{a=0} = t. \quad (7)$$

Имеет место и обратное утверждение: для любого гладкого векторного поля (7) решение (существует и единственно) удовлетворяет групповому свойству [1, 2, 8].

Группа временных сдвигов $t \rightarrow t + \tau$ имеет касательный вектор $\xi(t) = 1$. Уравнение Ли в данном случае имеет вид $dt'/d\tau = 1$, а инфинитезимальный оператор — $X = \partial/\partial t$. К примеру, если задано эллиптическое преобразование

$$t' \rightarrow \frac{t \cos a + \sin a}{-t \sin a + \cos a}, \quad (8)$$

то уравнение Ли имеет вид

$$\frac{dt'}{da} = 1 + t'^2, \quad t'(a=0) = t,$$

а инфинитезимальный оператор — $X = (1 + t^2) \frac{d}{dt}$.

Произвольный закон умножения в локальной однопараметрической группе (ЛОПГ) может быть приведен, в соответствии с теоремой об изоморфизме, к аддитивному сдвигу [1, 2, 8]. Другими словами, можно ввести такую параметризацию на произвольной однопараметрической группе, что уравнение Ли будет иметь

простейший вид $\frac{da'}{dt} = 1$. Если обозначить через

$\varphi(a, b) = c$ закон композиции элементов преобразования сигналов, задаваемых в ЛОПГ G , то канонический параметр a' , удовлетворяющий простейшему уравнению Ли, определяется из выражения:

$$a' = \int_0^a A(a) da, \quad \text{где: } \frac{\partial \psi(a, b)}{\partial b} \Big|_{b=0} = \frac{1}{A(a)}, \quad (9)$$

а само уравнение Ли имеет вид $\partial t' / \partial a' = \xi(t')$.

Уравнения (9) определяют операцию, устанавливающую изоморфизм между произвольной ЛОПГ и группой с аддитивным законом композиции параметров. С другой стороны, эта же операция определяет преобразование, которое необходимо произвести над носителем сигнала, чтобы групповое умножение стало сложением.

К примеру, изоморфизм между мультипликативной M и аддитивной A группами преобразований устанавливается отображением, задаваемым операцией логарифмирования (а для преобразований самого сигнала соответственно операцией экспонирования). Изоморфизм между эллиптической и аддитивной группами устанавливается операцией $\text{arctg}(\cdot)$.

Операцию изоморфизма можно получить также непосредственно из оператора инфинитезимального преобразования, решая уравнение

$$t' = \int \xi^{-1}(t) dt. \quad (10)$$

Обозначим преобразование перехода от времени t к времени t' оператором $L(\cdot)$, тогда обратное преобразование будет $L^{-1}(\cdot)$. С помощью метода инфинитезимальных операторов групп Ли очень просто определяется отображение, устанавливающее изоморфизм между двумя неаддитивными группами:

$$t_1 = \int_{t'} \xi_1^{-1}(t) dt, \quad t' = \int_t \xi_2^{-1}(t) dt. \quad (11)$$

В этом случае операция изоморфизма определяется в два этапа: сначала определяется отображение между первой группой и A , а затем между A и второй группой преобразований.

Преобразование Фурье на произвольной локально компактной однопараметрической группе, с учетом вышесказанного, имеет вид

$$S_g(\omega) = \int_G s(t) e^{i\omega \int \xi^{-1}(t) dt} \xi^{-1}(t) dt, \quad (12)$$

а обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) e^{-i\omega \int \xi^{-1}(t) dt} d\omega, \quad (13)$$

причем область интегрирования G определяется из соотношений

$$G = [L(\infty), L(-\infty)], \quad L(t) = \int_G \xi^{-1}(t) dt. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что инвариантный базис на произвольной однопараметрической непрерывной группе преобразований составляют функции вида $\exp\{i\omega \int \xi^{-1}(t) dt\}$, являющиеся неприводимыми представлениями (характерами) однопараметрической группы K_i .

Исходя из группы преобразования, действующей в области определения сигнала, можно классифицировать сигналы и обобщить их основные свойства и характеристики на соответствующие классы. При этом, как было указано выше, между классами имеет место изоморфизм, который устанавливается некоторым отображением.

ТЕОРИЯ СИГНАЛОВ НА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье на группе однопараметрических преобразований носителя сигнала.

1. **Теорема о сдвиге.** Если задан сигнал $s[g(a)t]$, то преобразование Фурье от него определяется выражением

$$F_g \{s[g(a)t]\} = \int_G s[g(a)t] e^{i\omega L(t)} \xi^{-1}(t) dt = S_g(\omega) e^{-i\omega L(a)}. \quad (15)$$

2. **Теорема о сжатии.** Введем понятие сжатия на группе G , изоморфизм которой с аддитивной группой устанавливается отображением $L(\cdot)$. Операция сжатия на группе G должна оказывать такое же действие на спектр сигнала $S_g(\omega)$, какое оказывает масштабный множитель на спектр Фурье $S(\omega)$ в общепринятом понимании, т. е. приводить его к сжатию. Отсюда нетрудно получить, что двухпараметрическая группа, заданная в виде преобразования вида

$$t \rightarrow L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)], \quad (16)$$

изоморфна линейной группе преобразования времени. В чем нетрудно убедиться, если подействовать на обе части (16) оператором $L(\cdot)$.

Обозначим $\psi(t; \alpha, a) = L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)]$. Путем подстановки нетрудно показать, что преобразования $\psi(t; \alpha, a)$ образуют группу

$$\psi[\psi(t; \alpha_1, a_1); \alpha_2, a_2] = \psi(t; \alpha_3, a_3). \quad (17)$$

Причем параметры α_i взаимодействуют мультипликативно ($\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$), а параметры a_i — в соответствии с законом $a_3 = L^{-1}[L(a_1) + L(a_2)]$. Структура этой группы изоморфна группе линейных преобразований. Подгруппа с элементом преобразования $g(a)$ является нормальной, а получаемые по ней классы эквивалентности образуют фактор-группу, изоморфную подгруппе с элементом преобразования $g(a)$. Т. е. если задан сигнал

$s\{L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)]\}$, то преобразование Фурье от него определяется выражением

$$F_g \{s\{L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)]\}\} = \frac{1}{|\alpha|} S_g \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) e^{i\omega L(a)}. \quad (18)$$

Из последнего выражения как частный случай при $L(a) = 0$ получаем теорему о сжатии на группе G :

$$F_g \{s\{L^{-1}[\alpha L(t)]\}\} = \frac{1}{|\alpha|} S_g \left(\frac{\omega}{\alpha} \right). \quad (19)$$

3. Взаимосвязь между преобразованием Фурье на произвольной ОПГ и преобразованием Фурье на аддитивной группе.

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= \int_G s(t) e^{i\omega \int \xi^{-1}(t) dt} \xi^{-1}(t) dt = \\ &= \int_G s(t) e^{i\omega L(t)} dL(t) = \int_R s\{L^{-1}(t)\} e^{i\omega t} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

т. е.

$$F_g \{s(t)\} = F \{s[L^{-1}(t)]\}. \quad (21)$$

Из выражения (20) следует, что для вычисления спектра на группе, заданной инфинитезимальным оператором ξ , необходимо предварительно произвести масштабирование носителя сигнала по закону $L^{-1}(\cdot)$, а затем вычислить преобразование Фурье (рис. 1).

4. **Теорема о свертке (или теорема умножения).** Если заданы сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то их свертка на произвольной однопараметрической группе G определяется выражением

$$s_1 *_G s_2(t) = F_G^{-1} \{S_g(\omega) S_g^*(\omega)\}. \quad (22)$$

Определим основные числовые характеристики сигналов с выделенной симметрией.

1. Энергия сигнала.

$$E_g = \int_G s^2(t) \xi^{-1}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_g(f)|^2 df, \quad (23)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad f \in (-\infty, \infty).$$

2. Эффективная длительность сигнала.

$$\begin{aligned} T_g^2 &= \frac{1}{E_g} \int_G \left[\int \xi^{-1}(t) dt \right]^2 s^2(t) \xi^{-1}(t) dt = \\ &= \frac{1}{E_g} \int_G L^2(t) s^2(t) dL(t). \end{aligned} \quad (24)$$

3. Эффективная полоса сигнала.

$$F_g^2 = \frac{1}{E_g} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_g)^2 |S_g(f)|^2 df. \quad (25)$$

4. Центральная частота спектра сигнала.

$$f_g = \frac{1}{E_g} \int_{-\infty}^{\infty} f |S_g(f)|^2 df. \quad (26)$$

5. Сложность сигнала.

$$B_g = 2F_g T_g. \quad (27)$$

Если $B_g > 1$, то сигнал называется сложным на заданной группе преобразований, в противном случае — простым. Используя неравенство Коши—Буняковского, нетрудно показать (доказательство аналогично тому, что приведено в [5]), что минимальное значение базы сигнала, равное $1/4$, достигается при гауссовской на группе G форме сигнала:

$$s(t) = c_2 \exp \left\{ 0.5 c_1 \left[\int \xi^{-1}(t) dt \right]^2 \right\}. \quad (28)$$

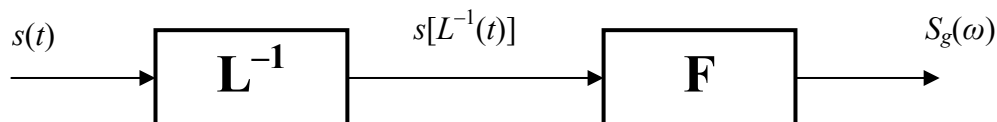


Рис. 1. Алгоритм вычисления преобразования Фурье на группе

6. Коэффициент узкополосности.

$$\gamma = \frac{F_g}{f_g}. \quad (29)$$

Если $\gamma < 0.1$, то сигнал — узкополосный.

7. Центр симметрии сигнала.

При описании сигналов используют определение центра через начало t_n и конец сигнала t_k . Для аддитивной, мультипликативной и инверсной мер центр сигнала находится соответственно как среднеарифметическое, среднегеометрическое и среднегармоническое величин t_n, t_k , и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{t_n + t_k}{2} \geq \sqrt{t_n t_k} \geq \frac{2}{t_n^{-1} + t_k^{-1}}. \quad (30)$$

Для преобразований, определяемых оператором L , имеем соответственно следующие соотношения:

$$\frac{L(t_n) + L(t_k)}{2} \geq \sqrt{L(t_n)L(t_k)} \geq \frac{2}{1/L(t_n) + 1/L(t_k)}. \quad (31)$$

Уточним теперь понятие частотной модуляции в базисе функций, определяемом группой преобразований. Под частотной модуляцией на группе K_i будем понимать сигнал:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_0 \exp \left\{ i \left[\omega_g \int \xi^{-1}(t) dt + \theta \right] \right\} = \\ &= A_0 \exp \left\{ i \psi \int \xi^{-1}(t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

A_0 — амплитуда сигнала, $\psi(\cdot)$ — полная фаза сигнала, $\theta = \theta \left[\int \xi^{-1}(t) dt \right]$ — фаза сигнала.

К примеру, аналогом линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) сигнала на аддитивной группе будет мультипликативный ЛЧМ-сигнал вида (μ — коэффициент модуляции):

$$s(t) = \exp \left\{ i \left(\omega_g \ln t + 0.5 \mu^2 \ln^2 t \right) \right\}. \quad (33)$$

Текущая частота частотно-модулированного сигнала может определяться или в аддитивном смысле $\omega_{ga}(t)$, когда производная полной фазы берется в аддитивном масштабе $\frac{d}{dt}$, или в групповом $\omega_g(t)$, когда производная определяется как $\xi(t) \frac{d}{dt}$ (т. е. рассматривается в масштабе группы преобразований):

$$\omega_{ga}(t) = \frac{d\psi}{dt} = \omega_g \xi^{-1}(t) + \xi^{-1}(t) \frac{d\theta}{dt}, \quad (34)$$

$$\omega_g(t) = \xi(t) \frac{d\psi}{dt} = \omega_g + \frac{d\theta}{dt}. \quad (35)$$

Отсюда следует, что обе текущие частоты связаны между собой соотношением $\omega_{ga}(t) = \omega_g(t) \xi^{-1}(t)$.

Для ЛЧМ-сигнала на мультипликативной группе имеем:

$$\omega_{ga}(t) = \frac{1}{t} (\omega_g + \mu^2 \ln t). \quad (36)$$

Определим преобразование Гильберта на группе преобразований. Свойства преобразований на мультипликативной группе были получены в работе [11]. Предположим, что на группе K_i задано преобразование вида

$$\hat{s}_g(t) = \int_G s(t_1) h(t, t_1) \xi^{-1}(t_1) dt_1, \quad (37)$$

где ядро преобразования $h(t, t_1)$ удовлетворяет условию инвариантности относительно групповой операции сдвига g_i . В силу изоморфизма непрерывных ЛОГП с учетом (37), получаем

$$h(t, t_1) = h[L(t) - L(t_1)]. \quad (38)$$

Вычисляя от обеих частей выражения (37) преобразование Фурье F_G и используя теорему умножения, получаем пару преобразований Гильберта на непрерывной ЛОГП:

$$\begin{cases} \hat{s}_g(t) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{s(t_1)}{L(t) - L(t_1)} \xi^{-1}(t_1) dt_1 = H_G \{s(t)\}, \\ s(t) = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{\hat{s}_g(t_1)}{L(t) - L(t_1)} \xi^{-1}(t_1) dt_1 = H_G^{-1} \{\hat{s}_g(t)\}, \end{cases} \quad (39)$$

где H_G , H_G^{-1} — соответственно операторы прямого и обратного преобразования Гильберта на группе K_i .

Основные свойства преобразования Гильберта на группе.

1. Групповой сдвиг.

$$H_G \{s[g(a)t]\} = \hat{s}_g[g(a)t]. \quad (40)$$

2. Групповое сжатие.

Если α — параметр сжатия на группе, то имеет место соотношение

$$H_G \{s[L^{-1}[\alpha L(t)]]\} = \hat{s}_g[L^{-1}[\alpha L(t)]]. \quad (41)$$

3. Преобразование Гильберта от произведения сигнала и транслированного на группе носителя сигнала удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} H_G \{[g(a)t]s(t)\} = \\ = g(a)t\hat{s}_g(t) + \frac{1}{\pi} \int_G s(t)\xi^{-1}(t)dt. \end{aligned} \quad (42)$$

• Взаимная корреляция действительных сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ связана с взаимной корреляцией их гильберт-образов на группе преобразований следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \int_G s_1(t)s_2[g(a)t]\xi^{-1}(t)dt = \\ = \int_G \hat{s}_{1g}(t)\hat{s}_{2g}[g(a)t]\xi^{-1}(t)dt. \end{aligned} \quad (43)$$

• Взаимная корреляция сигнала с гильберт-образом другого сигнала определяется выражением вида

$$\begin{aligned} \int_G s_1(t)s_{2g}[g(a)t]\xi^{-1}(t)dt = \\ = \int_G \hat{s}_{1g}(t)\hat{s}_2[g(a)t]\xi^{-1}(t)dt. \end{aligned} \quad (44)$$

• Преобразование Фурье от гильберт-образа сигнала на группе определяется соотношением

$$\begin{cases} F_G \{\hat{s}_g(t)\} = -i \operatorname{sign}(\omega) F_G \{s(t)\}, \\ F_G \{s(t)\} = i \operatorname{sign}(\omega) F_G \{\hat{s}_g(t)\}. \end{cases} \quad (45)$$

• Преобразование Гильберта на группе G связано с преобразованием Гильберта $H(\cdot)$ на аддитивной группе формулой

$$H_G \{s(t)\} = H \{s[L^{-1}(t)]\}. \quad (46)$$

Видно, что операция масштабирования $L(\cdot)$ носителя сигнала позволяет преобразование Гильберта на группе G определить с помощью преобразования Гильберта на группе аддитивных сдвигов.

Для доказательства вышеуказанных свойств достаточно воспользоваться определениями преобразований Гильберта и Фурье на произвольной непрерывной ЛОГП.

В классе сигналов с заданной симметрией введем понятие аналитического сигнала. По аналогии с общепринятым понятием аналитическим будем считать сигнал на группе, спектральная плотность которого $|S_g(\omega)|$ определена только для положительных частот. При этом он представляется в виде

$$s_{ag}(t) = 0.5s(t) + i0.5H_G \{s(t)\}. \quad (47)$$

Спектр аналитического сигнала на группе G равен

$$F_G \{s_{ag}(t)\} = \begin{cases} F_G \{s(t)\} & \text{при } \omega \geq 0, \\ 0, & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (48)$$

Введением аналитического сигнала на группе можно однозначно определить понятия амплитуды и фазы сигнала:

$$|s_{ag}(t)| = 0.5\sqrt{s^2(t) + [H_G \{s(t)\}]^2}, \quad (49)$$

$$\varphi_{ag}(t) = \arctg \left[\frac{H_G \{s(t)\}}{s(t)} \right]. \quad (50)$$

Аддитивная мгновенная частота равна

$$\begin{aligned} \omega_{ag}(t) = \frac{d\varphi_{ag}(t)}{dt} = \\ = \frac{H'_G \{s(t)\}s(t) - H_G \{s(t)\}s'(t)}{|s_{ag}(t)|^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

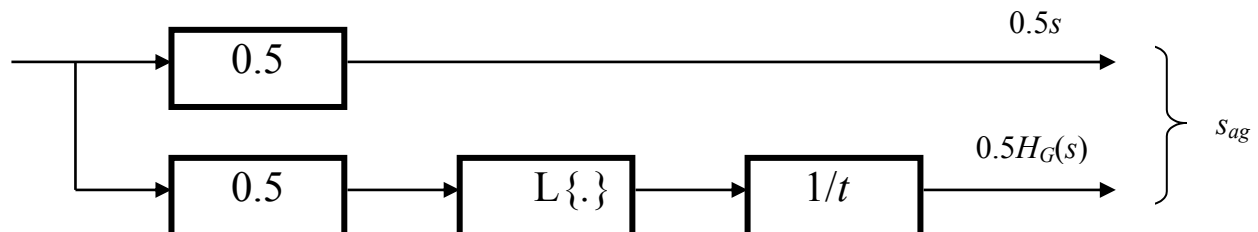


Рис. 2. Схема формирования группового аналитического сигнала

Формирование аналитического сигнала на группе преобразований может быть выполнено по схеме, изображенной на рис. 2.

Введем на группе G понятие низкочастотной комплексной огибающей. Для этого представим исходный сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условию узкополосности на G , в следующем виде:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ s_{0g}(t) \exp \left[i \omega_g \int \xi^{-1}(t) dt \right] \right\}, \quad (52)$$

$$s_{0g}(t) = s_{ag}(t) \exp \left[-i \omega_g \int \xi^{-1}(t) dt \right]. \quad (53)$$

В выражении (53) $s_{0g}(t)$ имеет смысл низкочастотной комплексной огибающей на выделенной группе преобразований. Комплексная огибающая имеет действительную $\gamma_{gr}(t)$ и мнимую $\gamma_{gi}(t)$ части:

$$s_{0g}(t) = \gamma_{gr}(t) + i \gamma_{gi}(t). \quad (54)$$

Действительную и мнимую компоненты комплексной огибающей назовем соответственно синфазной и квадратурной составляющими сигнала на группе G .

Исходный сигнал восстанавливается из комплексной низкочастотной составляющей в соответствии с выражением

$$\begin{aligned} s(t) &= [\gamma_{gr}(t) + i \gamma_{gi}(t)] \exp \left[i \omega_g \int \xi^{-1}(t) dt \right] = \\ &= \gamma_{gr}(t) \cos \left[\omega_g \int \xi^{-1}(t) dt \right] + i \gamma_{gi}(t) \sin \left[\omega_g \int \xi^{-1}(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Физически комплексная огибающая формируется с помощью гетеродинирования аналитического сигнала на группе в область нулевых частот (сдвигается $S_g(\omega)$).

Рассмотренный метод представления узкополосных сигналов на группе позволяет снизить требования к средствам обработки сигналов по быстродействию и емкостным затратам. Необходимо подчеркнуть, что принятое определение узкополосности позволяет выделить класс узкополосных сигналов, которые по общепринятым стандартам узкополосности являются широкополосными. По этой причине понятие комплексной огибающей не имело смысла и технического воплощения.

Нетрудно показать, что операция формирования аналитического сигнала на группе коммутруется с операцией группового преобразования. Физически это означает, что конечный результат не изменится, если вначале сформировать аналитический сигнал на группе, а затем осуществить операцию группового сдвига или, наоборот, вначале сдвинуть сигнал, а затем

формировать аналитический. В то время как операция формирования комплексной огибающей коммутруется с операцией сжатия сигнала только с точностью до фазы.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭФРОСА

При решении задач обработки сигналов часто приходится решать интегральные уравнения. При этом полезной оказывается теорема Эфроса [12]. Первоначально она рассматривалась при решении уравнений с помощью преобразования Лапласа. В статье [13] получено ее обобщение на случай гармонического анализа на произвольной однопараметрической группе преобразований. Рассмотрим основные результаты этой работы.

Положим, что в области определения функции $s(t)$ задана топологическая однопараметрическая группа преобразований G с элементом преобразования $g(a) \in G$, $a \in [-\Delta, \Delta]$. Пусть задана также функция $\psi(t, a)$ и такие $\Psi_g(\omega)$, $q(\omega)$, что выполняется равенство

$$F_G \{ \psi(t, a) \} = \Psi(\omega) \exp [i q(\omega) L(a)]. \quad (56)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} F_G \left\{ \int_G s(\tau) \psi(t, \tau) \xi^{-1}(\tau) d\tau \right\} &= \\ &= S_g [q(\omega)] \Psi_g^*(\omega). \end{aligned} \quad (57)$$

Полученная теорема является обобщением известной теоремы о свертке (или теоремы умножения). Рассмотрим частные случаи.

1. Положим $L(t) = t$, тогда, как нетрудно заметить, получим аналог теоремы Эфроса для преобразования Фурье на аддитивной группе:

$$F_G \left\{ \int s(\tau) \psi(t, \tau) d\tau \right\} = S [q(\omega)] \Psi^*(\omega). \quad (58)$$

2. Положим $q(\omega) = \omega$. Тогда имеем теорему о свертке на ЛОГП. Выражение совпадает с ранее полученной формулой (22):

$$\begin{aligned} F_G \left\{ \int_G s(\tau) \psi [g(\tau), t] \xi^{-1}(\tau) d\tau \right\} &= \\ &= S_g(\omega) \Psi_g^*(\omega). \end{aligned} \quad (59)$$

3. Положим, что $G = M$, т. е. является мультипликативной группой, тогда $L(t) = \ln(t)$, и мы имеем аналог формулы Эфроса на M :

$$M \left\{ \int_M s(\tau) \psi(t, \tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} = S_M [g(\omega)] \Psi_M^*(\omega), \quad (60)$$

$M \in (0, \infty)$.

4. Если $G=A$ (или M) и $q(\omega)=\omega$, получаем классическое определение теоремы о свертке на аддитивной (мультипликативной) группе преобразований.

5. Предположим $G=I$ ("инверсная" группа преобразований), тогда $L(t)=-t^{-1}$, и мы получаем (I — оператор инверсии)

$$I \left\{ \int_I s(\tau) \psi(t, \tau) \frac{d\tau}{\tau^2} \right\} = S_I [q(\omega)] \Psi_I^*(\omega), \quad (61)$$

$I \in (0, \infty)$.

Обобщение теоремы Эфроса для преобразования Лапласа на ЛОГП не представляет трудностей. Если

$$L_G \{ \psi(t, a) \} = \Psi(p) \exp [q(p)L(a)],$$

$$G = [L(0), L(\infty)],$$

то

$$L_G \left\{ \int_G s(\tau) \psi(t, \tau) \xi^{-1}(\tau) d\tau \right\} = S_g [q(p)] \Psi_g^*. \quad (62)$$

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим такую характеристику, как длительность сигнала. Существует несколько ее определений [3–6]. Широко распространено определение длительности сигнала через задание моментов начала и конца сигнала (если сигнал финитный), т. е. за длительность сигнала принимаются размеры области его определения. Найдем взаимосвязь между аддитивной длительностью и длительностью сигнала на однопараметрической группе G .

По определению, аддитивная длительность сигнала $s(t)$ определяется выражением $\Delta t = t_k - t_0$ (t_k, t_0 — соответственно моменты начала и конца сигнала). По аналогии можно ввести длительность на G . Но мерой длительности при этом будет мера, согласованная с симметрией группы:

$$\Delta t_g = L(t_k) - L(t_0) = \int_{t_k}^{\xi^{-1}(t)} \xi^{-1}(t) dt - \int_{t_0}^{\xi^{-1}(t)} \xi^{-1}(t) dt. \quad (63)$$

Длительность на G инвариантна относительно группового преобразования. Найдем взаимосвязь между аддитивной длительностью сигнала и Δt_g . Так как любая мера, не являющаяся аддитивной и в аддитивном масштабе, нелинейна, то связь между длительностями будет содержать также и один из моментов времени (t_0 или t_k).

Финитный во времени сигнал можно записать в виде

$$s(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \{ A_0 \exp [i \omega_g L(t)] \} & \text{при } t \in (t_0, t_k), \\ 0 & \text{при } t \notin (t_0, t_k). \end{cases} \quad (64)$$

Используя определение текущей частоты $\omega_g(t) = \omega_g \xi^{-1}(t)$, находим начальную ω_{g0} и конечную ω_{gk} частоты сигнала:

$$\omega_{g0} = \omega_g \xi^{-1}(t_0), \quad \omega_{gk} = \omega_g \xi^{-1}(t_k). \quad (65)$$

Функция $\xi^{-1}(\cdot)$ имеет обратную $\xi(\cdot)$, поэтому из (65) находим t_0 : $t_0 = \xi(\omega_{g0} / \omega_g)$. Из второго уравнения в (65) имеем: $t_k = L^{-1} [\Delta t_g + L(t_0)]$. Используя определение аддитивной длительности, находим t_k и подставляем его в (65). В результате получаем:

$$\Delta t = L^{-1} \left\{ \Delta t_g + L \left[\xi \left(\frac{\omega_{g0}}{\omega_g} \right) \right] \right\} - \xi \left(\frac{\omega_{g0}}{\omega_g} \right). \quad (66)$$

Например, если сигнал $s(t)$ задан на группе M , то из (65) получим соотношение между Δt и Δt_m длительностями:

$$\Delta t = t_0 \exp [\Delta t_m - 1]. \quad (67)$$

Анализ показывает, что в случае, когда $\Delta t_g \rightarrow 0$ и $\omega_g \rightarrow \infty$, сигнал на группе стремится к аддитивному гармоническому. Если наоборот, то сигнал становится все более непохожим на аддитивную гармонику и приближается при этом к своему естественному виду — широкополосному сигналу с модуляцией вида $\omega_g(t) = \omega_g \xi^{-1}(t)$. При этом он имеет широкую полосу в аддитивном понимании преобразования Фурье и узкую в групповом.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ, СОГЛАСОВАННАЯ С ИХ СИММЕТРИЕЙ

Повышение помехоустойчивости систем обработки сигналов, и в частности задач фильтрации,

требует оптимизации алгоритмов обработки. Для решения задачи обнаружения сигналов с известными характеристиками оптимальным приемником является согласованный фильтр (СФ) или коррелятор. Специфика обнаружения сигналов в условиях преобразований аргумента требует обобщения понятия СФ на случай симметрии сигнала, отличной от сдвиговой. Для произвольного $L(\cdot)$ определяем свертку

$$s_1(t) * h(t) = \int s_1(\tau) h[L(t) - L(\tau)] \xi^{-1}(\tau) d\tau. \quad (68)$$

На основании (68), используя обычную методику [4–6], легко получить выражение для коэффициента передачи. Действительно, отклик на полезный сигнал равен

$$s_2(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) H_g(\omega) \exp \left[i\omega \int_T \xi^{-1}(\tau) d\tau \right] d\omega. \quad (69)$$

При отсутствии сигнала отклик на помеху с энергетическим спектром $N_g(\omega)$ определяется выражением

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int N_g(\omega) |H_g(\omega)|^2 d\omega. \quad (70)$$

Отношение сигнал / помеха на выходе СФ находится из формулы

$$d_T = \frac{s_2(T)}{|\sigma|} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) H_g^*(\omega) \exp \left[i\omega \int_T \xi^{-1}(\tau) d\tau \right] d\omega}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_g(\omega) |H_g(\omega)|^2 d\omega}}. \quad (71)$$

Полагая спектры $S_g(\omega)$ и $H_g(\omega)$ комплекснозначными, на основании неравенства Коши—Буняковского получим $\max(d_T)$:

$$d = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_g(\omega)|^2}{H_g(\omega)} d\omega} \quad (72)$$

при

$$H_g(\omega) = c \frac{S_g^*(\omega)}{N_g(\omega)} \exp \left[-i\omega \int_T \xi^{-1}(\tau) d\tau \right],$$

где c — постоянная.

Фильтры, описываемые выражением (72), являются линейными нестационарными в при-

вычном аддитивном масштабе времени, т. к. их параметры должны изменяться во времени. Они обеспечивают максимальное отношение сигнал/помеха на выходе и инвариантны относительно преобразований времени, задаваемых инфинитезимальным оператором $\xi(t)$.

ВЫВОДЫ

Для выделенной группы преобразований наиболее "естественным" является описание в базисе неприводимых представлений, т. к. в этом случае параметр преобразования выражается в виде сдвига. Последнее подтверждает основной тезис теоретико-группового подхода: при представлении и обработке сигналов симметрия математической модели сигнала и средств обработки должна быть согласована с видом преобразования сигнала, т. к. это обеспечивает его минимальное представление и как следствие — минимальные вычислительные и емкостные затраты. Соответствие между симметриями сигнала и средствами его обработки естественным образом вытекает из принципа *дуальности* математических моделей сигнала и системы. Исходя из этого становится ясным, что на современном этапе развития технических средств обработки информации одним из важнейших становится вопрос построения и выделения групп преобразований на основе анализа физических явлений, сопутствующих распространению сигнала. Изложенный теоретический подход может быть успешно применен при решении различных технических задач выделения сигнала в условиях сильной зашумленности, например при разработке систем акустической диагностики механических узлов и агрегатов. Используя групповую структуру сигнала можно построить управляемый видеоряд с теми же групповыми свойствами. С этой позиции и необходимо оценивать актуальность и важность дальнейшего развития теоретико-группового подхода на произвольных однопараметрических группах преобразований, проведенного в рамках данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н.Я.. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 587 с.
2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований математической физики. М.: Наука, 1983. 280 с.
3. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Сов. радио, 1977. 662 с.
4. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1970. 375 с.
5. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы.

- Теория и применение. М.: Сов. радио, 1971. 565 с.
6. Сапрыкин В.А., Рокотов С.П. Теория обработки гидроакустической информации. Петродворец: ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1986. 308 с.
 7. Сапрыкин В.А., Волошин А.К., Рокотов С.П. К вопросу представления сигналов. Анализ и обработка акустической информации // Тезисы 3-й ДАК "Человек и океан". Владивосток, 1982. Ч. 3. С. 46–50.
 8. Хида Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987. 303 с.
 9. Бутырский Е.Ю., Долбиев С.П. Обработка широкополосных сигналов // 31-я Всесоюзная научно-техническая конференция. Владивосток, 1988.
 10. Бутырский Е.Ю. Сигналы, инвариантные в полосе относительно эффекта Доплера // 10-я Всесоюзная конференция по информационной акустике. АН СССР. Москва, 1990.
 11. Бутырский Е.Ю. Взвешенное преобразование Гильберта // 47-я Научно-техническая конференция НТОРЭС им. А.С. Попова "Актуальные проблемы развития радиотехники и связи". С.-Петербург, 1993.
 12. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 301 с.
 13. Бутырский Е.Ю. К вопросу о теореме Эфроса // 4-я НТК по судовой радиоэлектронике. Петродворец: ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1993.
 14. Бутырский Е.Ю. Основные понятия теории систем и сигналов на группах преобразований // Информатика и космос. 2007. № 3. С. 67–80.

Санкт-Петербургское отделение Института химфизики им. Н.Н. Семенова РАН (Бутырский Е.Ю., Чалкин В.П.)

Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики (Кувалдин И.А.)

Контакты: Чалкин Владимир Петрович,
cvp2008@mail.ru

Материал поступил в редакцию 8.12.2009.

ONE APPROACH TO SIGNALS AND SYSTEMS THEORY GENERALIZATION

Eu. Yu. Butyrsky¹, I. A. Kuvaldin², V. P. Chalkin¹

¹*St. Petersburg Branch of Institute for Problems of Chemical Physics RAS*

²*St. Petersburg State University for Service and Economics*

A group-theoretical approach is developed for treating a broad field in signal theory from a single position. It includes signal structure detection, the possibility to represent signals and their linear combinations, signals classification by a character of transformations, which are the grounds to develop unified methods for solving corresponding signal processing problems. In terms of signals representation their time-and-frequency behavior is defined, correlation-and-spectral theory is generalized, classification is fulfilled. The proposed approach is a constructive one in developing communication systems and signal sensors, subjected to Doppler effect influence and other transformations.

Keywords: group-theoretical approach, signal, structure, linear combination, correlation-and-spectral theory