

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский, И. А. Кувалдин, В. П. Чалкин

К ВОПРОСУ О СПЛАЙН-ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

В настоящей статье на основании аппроксимации непрерывной многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций, определенных на обобщенном базисе, сформированном как линейная суперпозиция аргументов исходной функции; предложен метод субоптимального оценивания динамических систем. Изложенный материал является основой теории сплайн-фильтрации сигналов, предложенной Е.Ю. Бутырским.

Кл. сл.: динамическая система, субоптимальное оценивание, многомерная функция, обобщенный базис, сплайн-фильтрация

ВВЕДЕНИЕ

В теории фильтрации существует целый ряд приближенных методов и алгоритмов оценивания, которые позволяют решать задачи нелинейной фильтрации сигналов и состояний динамических систем. При этом сложность алгоритма и качество фильтрации целиком определяются сложностью исходных математических моделей динамической системы, сигнала, помехи, шумов наблюдения и законами их взаимодействия. Причем сложность алгоритмов резко возрастает с увеличением числа аргументов у функций, описывающих математические модели. Поэтому актуальной является задача такого представления многомерных функций, при котором возможно процессы обработки сигналов распараллелить по каждому из аргументов.

В статье на основании представления непрерывной многомерной нелинейной функции в виде линейной суперпозиции одномерных функций [1] развиваются методы сплайн-фильтрации сигналов и оценивания состояния нелинейных динамических систем, основанные на линейных и квадратичных сплайн-представлениях нелинейных динамических систем (ДС). Преимущество рассматриваемой аппроксимации состоит в возможности согласования математических моделей со структурой фильтра Калмана—Бьюси или фильтра второго порядка, т. к. позволяет легко перейти к независимой по каждой координате одномерной сплайн-аппроксимации (линейной или квадратичной). Получаемый при этом субоптимальный фильтр является фильтром с параметрами, значения которых меняются в зависимости от оценки состояния динамической системы.

В частности, показано, что сплайн-фильтры первого порядка, основанные на представлении нелинейных функций в виде одномерных сплайнов, в отличие от известных обладают значительно

меньшими вычислительными затратами и имеют большие перспективы практического использования при решении самых разнообразных задач оценивания состояния ДС и обработки сигналов.

ТЕОРЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [1] были доказаны теоремы об аппроксимации многомерных функций композицией одномерных на расширенном базисе аргументов. Так как настоящая статья является продолжением [1], то напомним некоторые из этих теорем, которые являются базовыми при построении алгоритмов субоптимального оценивания.

Теорема 1. Многомерная непрерывная по своим аргументам функция $f(\mathbf{x})$ может быть с любой степенью точности представлена в виде следующего ряда:

$$f(\mathbf{x}) \approx P_n(\mathbf{x}) = Q_n(\mathbf{x}) = \sum_j^m K_j \left(\sum_i^r h_{ij} x_i + d_j \right)^n, \quad (1)$$

где $f(\cdot)$ — непрерывная функция, заданная над полем $\mathbf{R}^r$ ($f \in \mathbf{R}$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ — переменные, $x_i \in \mathbf{R}$; h_{ij}, d_j — задаваемые целые коэффициенты ($h_{ij}, d_j \in \mathbf{N}$); K_j — коэффициенты,

$$K_j \in \mathbf{R}; m = \frac{(n+r-1)(n+r)}{2}.$$

Обозначим $d_j = h_{r+1,j}$, $x_{r+1} = 1$, тогда формулу (1) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) \approx P_n(\mathbf{x}) = Q_n(\mathbf{x}) = \sum_j^m K_j \left(\sum_i^{r+1} h_{ij} x_i \right)^n. \quad (2)$$

Теорема 2. Многомерная непрерывная по своим аргументам функция $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ может быть с любой степенью точности представлена в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} Q_n(\mathbf{x}) &= \\ &= C + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^j + \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^r K_{ij} \left(\sum_{i=1}^r c_{ij} x_i \right)^p = \\ &= C + \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{2r} K_{ij} \left(\sum_{i=1}^r c_{ij} x_i \right)^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Многомерная аппроксимация, предложенная в данном пункте, является не самоцелью, а лишь первым этапом в решении задачи покомпонентной сплайн-фильтрации и оценивания состояния нелинейных динамических систем.

Эта задача должна решаться в три этапа.

1) Представление исходной многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций.

2) Аппроксимация полученных одномерных функций одномерными линейными или квадратичными сплайнами.

3) Построение фильтра Калмана—Бьюси или фильтра второго порядка.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Применение многомерных сплайнов при аппроксимации нелинейных динамических систем ограничивается использованием сплайнов первого и второго порядка [2–5]. Это обуславливается тем, что структура фильтра Калмана—Бьюси является оптимальной для линейных систем и может быть только адаптирована к системам, имеющим квадратичные зависимости. Сплайны более высоких степеней при сохранении этой структуры перспектив на применение не имеют. С другой стороны, теория аппроксимации многомерными сплайнами требует задания множества узловых точек и условий их согласования. При большом числе аргументов это требует значительных вычислительных затрат.

Сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации. Сплайны обладают рядом интересных свойств:

- если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;
- сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа

узлов;

- можно построить точные границы ошибок аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;

- достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики.

Использование сплайновых аппроксимаций позволяет ослабить "проклятие размерности". Так как сплайновые аппроксимации дают более точные оценки по сравнению с чистым квантованием, то их применение позволяет при той же точности аппроксимации использовать более грубое квантование. Этот факт является прямым следствием сглаживающего действия сплайнов.

Представление многомерной нелинейной функции в виде линейной суперпозиции одномерных функций, аргументами которых являются аргументы исходной функции или их линейная комбинация (обобщенный базис), дает преимущество, которое, как указывалось выше, состоит в согласовании представления со структурой фильтра Калмана—Бьюси, т. к. позволяет легко перейти к независимой по каждой координате одномерной сплайн-интерполяции (линейной или квадратичной). Получаемый при этом фильтр является фильтром Калмана—Бьюси с параметрами, значения которых меняются в зависимости от оценки состояния динамической системы.

Положим, что задача аппроксимации многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ линейной суперпозицией одномерных функций решена и оптимальные коэффициенты, минимизирующие квадрат ошибки оценивания, получены [1]. Вторым этапом является адаптация полученного разложения к структуре фильтра Калмана—Бьюси. Для этого предлагается полученные одномерные функции, которые являются нелинейными, аппроксимировать одномерными линейными сплайнами. Так как каждая компонента векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ аппроксимировалась независимо, то каждое одномерное представление линейным сплайном можно строить параллельно, т. е. выбирать узловые точки кусочно-линейных функций только в рамках своего носителя, без согласования с точками на других носителях или на тех же носителях, но других компонент векторной функции.

Рассмотрим динамическую нелинейную многомерную систему следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_1(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_r)$.

Каждую компоненту $f_i(\mathbf{x})$ нелинейной многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $i \in [1, r]$ представим в од-

где

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{11j}^{(s)} & A_{12j}^{(s)} & \dots & A_{1rj}^{(s)} \\ A_{21j}^{(s)} & A_{22j}^{(s)} & \dots & A_{2rj}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1j}^{(s)} & A_{r2j}^{(s)} & \dots & A_{rrj}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1j}a_{11}^{(s)}c_{11j} & K_{1j}a_{12}^{(s)}c_{12j} & \dots & K_{1j}a_{1r}^{(s)}c_{1rj} \\ K_{2j}a_{21}^{(s)}c_{21j} & K_{2j}a_{22}^{(s)}c_{22j} & \dots & K_{2j}a_{2r}^{(s)}c_{2rj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{rj}a_{r1}^{(s)}c_{r1j} & K_{rj}a_{r2}^{(s)}c_{r2j} & \dots & K_{rj}a_{rr}^{(s)}c_{rrj} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j}^{(s)} \\ B_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ B_{rj}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1j}a_{1j}^{(s)}d_{1j} + K_{1j}b_{1j}^{(s)} \\ K_{2j}a_{2j}^{(s)}d_{2j} + K_{2j}b_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ K_{rj}a_{rj}^{(s)}d_{rj} + K_{rj}b_{rj}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

С учетом соотношения (10) система дифференциальных уравнений, моделирующих нелинейную динамическую систему, может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left[\sum_j^n A_{11j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum_j^n A_{12j}^{(s)} \right] x_2 + \dots + \\ &\quad + \left[\sum_j^n A_{1rj}^{(s)} \right] x_r + \sum_j^n B_{1j}^{(s)} + n_{11}(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left[\sum_j^n A_{21j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum_j^n A_{22j}^{(s)} \right] x_2 + \dots + \\ &\quad + \left[\sum_j^n A_{2rj}^{(s)} \right] x_r + \sum_j^n B_{2j}^{(s)} + n_{12}(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_r}{dt} &= \left[\sum_j^n A_{r1j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum_j^n A_{r2j}^{(s)} \right] x_2 + \dots + \\ &\quad + \left[\sum_j^n A_{rrj}^{(s)} \right] x_r + \sum_j^n B_{rj}^{(s)} + n_{1r}(t). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Или в векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} + \mathbf{n}_1(t), \quad (12)$$

$$z_{qj} = \sum_i^r c_{qij} x_i + d_{qj} \Rightarrow \mathbf{z}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{x}^T + \mathbf{d}_j.$$

Систему уравнений необходимо дополнить условиями принятия того или иного значения

$\mathbf{A}_j^{(s)}, \mathbf{B}_j^{(s)}$ в зависимости от области, в которой находится обобщенная переменная z_{ij} . А именно: коэффициенты, определяющие коэффициент сноса $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ уравнений (10–12), принимают значения $A_{qij}^{(s)}, B_{qj}^{(s)}$ ($\mathbf{A}_j^{(s)}, \mathbf{B}_j^{(s)}$), если $z_{qj} \in [z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)})$ ($\mathbf{z}_j \in [\mathbf{z}_j^{(s)}, \mathbf{z}_j^{(s+1)}] = \mathbf{G}^{(s)}$). Причем коэффициенты $A_{qij}^{(s)}, B_{qj}^{(s)}$ связаны с коэффициентами линейного сплайна следующими соотношениями:

$$A_{qij}^{(s)} = K_{qj}a_{qi}^{(s)}c_{qj}, \quad B_{qj}^{(s)} = K_{qj}a_{qj}^{(s)}d_{qj} + K_{qj}b_{qj}^{(s)}.$$

Переход из одной области $z_{qij} \in [z_{qij}, z_{(q+1)ij})$ в другую происходит тогда, когда совокупное изменение аргументов x_p приведет к изменению границ применимости линейной функции с заданными в области коэффициентами. Общее число уравнений (11) равно числу переменных z_{ij} . Таким образом, моделирование нелинейной динамической системы кусочно-линейными функциями сводится к моделированию уравнений (10–12). Уравнения динамической системы в областях $z_{qij} \in [z_{qij}, z_{(q+1)ij})$ являются линейными. Но характер нелинейности в принципе сохраняется, т. к. характеристики динамической системы скачкообразно меняются от области к области.

Метод аппроксимации нелинейных динамических систем является двухэтапным. Он включает этап представления многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций и этап аппроксимации одномерных функций сплайнами (линейными или квадратичными). Поэтому его можно также определить как метод двойной аппроксимации, подчеркнув этим, что представление функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ является результатом двух аппроксимаций.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Полученные результаты нетрудно обобщить на случай когда для аппроксимации используются одномерные квадратичные сплайны. Применение квадратичных функций при аппроксимации нелинейных динамических систем приводит к появлению фильтров второго порядка, которые являются обобщением фильтра Калмана—Бьюси и в принципе обеспечивают получение более качественных оценок состояния динамической системы. Но при этом значительно увеличиваются вычислительные затраты. С другой стороны, увеличением числа отрезков прямых, аппроксимирующих исходную функцию, можно достичь того же результата, оставаясь в рамках линейной фильтрации (на каж-

Рассмотрим теперь сумму, находящуюся в

квадратных скобках (14):

$$K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} + K_{qj} m_{qj}^{(s)}. \quad (17)$$

Представим каждое из слагаемых, входящих в (17), с учетом выражений (15) и (16). Соответственно имеем:

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} \left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < k}^r C l_{qjik} (a l_{qik}^{(s)} z l_{ik} + b l_{qik}^{(s)}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i < k}^r C l_{qjik} (a 2_{qik}^{(s)} z z_{ik} + b 2_{qik}^{(s)}) \right] = \\ &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} \left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < k}^r C l_{qjik} (a l_{qik}^{(s)} z l_{ik} + b l_{qik}^{(s)} - a 2_{qik}^{(s)} z z_{ik} - b 2_{qik}^{(s)}) \right]. \end{aligned}$$

Для дальнейших упрощений рассмотрим выражение в круглых скобках и перейдем к переменным $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$:

$$\begin{aligned} (a l_{qik}^{(s)} z l_{ik} + b l_{qik}^{(s)} - a 2_{qik}^{(s)} z z_{ik} - b 2_{qik}^{(s)}) &= \\ &= a l_{qik}^{(s)} (x_i + x_k) - a 2_{qik}^{(s)} (x_i - x_{ik}) + b l_{qik}^{(s)} - b 2_{qik}^{(s)} = \\ &= (a l_{qik}^{(s)} - a 2_{qik}^{(s)}) x_i + (a l_{qik}^{(s)} + a 2_{qik}^{(s)}) x_k + \\ &+ b l_{qik}^{(s)} - b 2_{qik}^{(s)} = A l_{qik}^{(s)} x_i + A 2_{qik}^{(s)} x_k + B l_{qik}^{(s)}. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A l_{qik}^{(s)} &= a l_{qik}^{(s)} - a 2_{qik}^{(s)}, & A l_{qik}^{(s)} &= a l_{qik}^{(s)} + a 2_{qik}^{(s)}, & B l_{qik}^{(s)} &= \\ &= b l_{qik}^{(s)} - b 2_{qik}^{(s)}. \end{aligned}$$

В результате получим выражение для первого слагаемого в (17):

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} \times \\ &\times \left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \sum_{i < k}^r [A l_{qik}^{(s)} x_i + A 2_{qik}^{(s)} x_k + B l_{qik}^{(s)}] \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Далее проведем операцию суммирования по каждому из слагаемых:

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} \times \\ &\times \left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_i + \sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_k + \sum_{i < k}^r B l_{qik}^{(s)} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые и меняя индексы во втором слагаемом, получаем соотношение для первого слагаемого в (17):

$$\begin{aligned} \sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_i + \sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_k &= \sum_i^r \sum_{k > i}^r A l_{qik}^{(s)} x_i + \\ &+ \sum_i^r \sum_{k > i}^r A 2_{qik}^{(s)} x_k = \sum_i^r x_i \left[\sum_{k > i}^r A l_{qik}^{(s)} \right] + \sum_k^r x_k \left[\sum_{i < k}^r A 2_{qik}^{(s)} \right], \end{aligned}$$

$$\sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_i + \sum_{i < k}^r A l_{qik}^{(s)} x_k = \sum_i^r x_i \left[\sum_{k > i}^r (A l_{qik}^{(s)} + A 2_{qik}^{(s)}) \right],$$

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 &= \sum_i^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qji}^2 x_i^2 + \\ &+ \sum_i^r x_i \left[\sum_{k > i}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} (A l_{qik}^{(s)} + A 2_{qik}^{(s)}) \right] + \\ &+ \sum_{i < k}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} B l_{qik}^{(s)}. \quad (20) \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в выражении (17) можно записать

$$K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} = K_{qj} b_{qj}^{(s)} \sum_i^r c_{qji} x_i = \sum_i^r K_{qj} b_{qj}^{(s)} c_{qji} x_i. \quad (21)$$

Таким образом, для выражения, находящегося в квадратных скобках (17), можно записать

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} + K_{qj} m_{qj}^{(s)} &= \\ &= \sum_i^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qji}^2 x_i^2 + \sum_i^r x_i \left[\sum_{k > i}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} (A l_{qik}^{(s)} + A 2_{qik}^{(s)}) \right] + \\ &+ \sum_i^r K_{qj} b_{qj}^{(s)} c_{qji} x_i + K_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i < k}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} B l_{qik}^{(s)}. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{qji}^{(s)} &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qji}^2, \\ B_{qji}^{(s)} &= K_{qj} \sum_{k > i}^r [a_{qj}^{(s)} (A l_{qik}^{(s)} + A 2_{qik}^{(s)}) + b_{qj}^{(s)} c_{qji} x_i] = \\ &= K_{qj} \sum_{k > i}^r [a_{qj}^{(s)} a l_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)} c_{qji} x_i], \\ C_{qj}^{(s)} &= K_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i < k}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} B l_{qik}^{(s)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда уравнение (17) можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} + K_{qj} m_{qj}^{(s)} &= \\ &= \sum_i^r A_{qji}^{(s)} x_i^2 + \sum_i^r B_{qji}^{(s)} x_i + C_{qj}^{(s)}. \quad (23) \end{aligned}$$

С учетом соотношения (23) покомпонентное представление многомерной динамической системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{1ji}^{(s)} x_i^2 + \sum_i^r B_{1ji}^{(s)} x_i + C_{1j}^{(s)} \right] + n_{11}(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{2ji}^{(s)} x_i^2 + \sum_i^r B_{2ji}^{(s)} x_i + C_{2j}^{(s)} \right] + n_{12}(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_r}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{rji}^{(s)} x_i^2 + \sum_i^r B_{rji}^{(s)} x_i + C_{rj}^{(s)} \right] + n_{1r}(t), \end{cases} \quad (24)$$

где коэффициенты уравнения (24) принимают значения $A_{qji}^{(s)}$, $B_{qji}^{(s)}$, $C_{qj}^{(s)}$, если обобщенная переменная z_{qj} принадлежит области $[z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)}]$, т. е.

$$z_{qj} \in [z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)}]; \quad z_{qj} = \sum_i^r c_{qij} x_i + d_{qj}.$$

В векторно-матричной форме система дифференциальных уравнений может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{C}_j + \mathbf{n}_1(t), \quad (25)$$

где

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{1j11}^{(s)} & A_{1j22}^{(s)} & \dots & A_{1jrr}^{(s)} \\ A_{2j11}^{(s)} & A_{2j22}^{(s)} & \dots & A_{2jrr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{rj11}^{(s)} & A_{rj22}^{(s)} & \dots & A_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j1}^{(s)} & B_{1j2}^{(s)} & \dots & B_{1jr}^{(s)} \\ B_{2j1}^{(s)} & B_{2j2}^{(s)} & \dots & B_{2jr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{rj1}^{(s)} & B_{rj2}^{(s)} & \dots & B_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} C_{1j}^{(s)} \\ C_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ C_{rj}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r), \quad \mathbf{x}^2 = (x_1^2 \ x_2^2 \ \dots \ x_r^2).$$

Особенностью представления (25) является то, что уравнения не содержат смешанных произведений аргументов. Поэтому в отличие от системы уравнений (10) возможно проведение операций независимого оценивания по каждой компоненте.

Представление многомерной функции в виде взвешенной суммы степеней обобщенных переменных является не единственным и зависит от значений установочных коэффициентов.

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ЛИНЕЙНОЙ СПЛАЙН- ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Построим алгоритм оценивания состояния многомерной динамической системы, основанный

на представлениях многомерной функции в виде

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj} z_{qj}^n, \quad H_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n M_{qj} z_{qj}^n, \quad (26)$$

где $f_q(\mathbf{x})$ — компонента многомерной функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$; $H_q(\mathbf{x})$ — компонента многомерной функции $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_n)$; K_{qj}, M_{qj} — коэффициенты в разложении функций $\mathbf{f}, \mathbf{H}$.

Покомпонентное представление нелинейной динамической системы можно записать в форме

$$\begin{cases} \frac{dx_q}{dt} = \sum_j^n K_{qj} z_{qj}^n + n_{q1}(t), \\ u_q(t) = \sum_j^n M_{qj} z_{qj}^n + n_{q0}(t). \end{cases} \quad (27)$$

В соответствии с результатами, полученными выше, нелинейную динамическую систему (27) можно по каждой составляющей аппроксимировать одномерными сплайнами:

$$z_{qj}^n \approx a_{qj}^{(s)} z_{qj} + b_{qj}^{(s)}, \quad z_{qj} \in [z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)}].$$

В матричной форме это можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{K}[\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)}] + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{M}[\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)}] + \mathbf{n}_0(t), \\ \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x}^T + \mathbf{d}. \end{cases} \quad (28)$$

Из выражений (27) и (28) следует, что при представлении нелинейной динамической системы одномерными сплайнами появляется дополнительное уравнение, которое обеспечивает пересчет базисных координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ в базис расширенных координат $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Субоптимальный алгоритм оценки состояния ДС, основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций, моделируется системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{K}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}^{(s)}] + \\ + \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}_0^{-1} [\mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}^{(s)}]], \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{K}^T - \\ - \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{M}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{N}_1, \\ \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}^T + \mathbf{d}. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь и далее символ со шляпкой обозначает оценку соответствующей величины.

Уравнения (29) должны быть дополнены условием нахождения в области: $\hat{\mathbf{z}} \in [\mathbf{z}^{(s)}, \mathbf{z}^{(s+1)}] = \mathbf{G}^{(s)}$.

При переходе из одной области $\mathbf{G}^{(s)}$ в другую производится изменение элементов матриц $\mathbf{a}^{(s)}$, $\mathbf{b}^{(s)}$. Сопряжение решений, получаемых в результате интегрирования (29) в последовательно проходимых областях $\mathbf{G}^{(s)}$, осуществляется на основе условий непрерывности [5]. Фильтр дает приближенное решение задач оценивания вследствие следующих причин:

- представления исходных нелинейных функций в виде взвешенной суммы одномерных функций;
- приближенности представления кусочно-линейными функциями;
- замены условия $\mathbf{z} \in \mathbf{G}^{(s)}$, условием $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{G}^{(s)}$.

Используя аппроксимацию нелинейной динамической системы одномерными сплайнами, построим математическую модель (ММ) алгоритма фильтрации-обнаружения сигнала на фоне помехи. Модель динамической системы, определяющей задачу обнаружения, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{u}(t) = \theta \mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_0(t), \end{cases} \quad (30)$$

где $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_M]$, $\mathbf{H} = [H_1, H_2, \dots, H_M]$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$.

Аппроксимация нелинейной динамической системы одномерными кусочно-линейными функциями представляется как

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{K}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}] + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{u}(t) = \theta \mathbf{s} + \mathbf{M}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}] + \mathbf{n}_0(t). \end{cases} \quad (31)$$

Уравнения, моделирующие алгоритм фильтра-

ции параметра обнаружения θ , имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}_0}{dt} = \mathbf{K}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}] + \\ + \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}_0^{-1} [\mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}]], \\ \frac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} = \mathbf{K}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{b}^{(s)}] + \\ + \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}_0^{-1} [\mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{b}^{(s)}]], \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{K}^T - \\ - \mathbf{P}(\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{M}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{N}_1, \\ \frac{dL}{dt} = (\mathbf{s} + \hat{\mathbf{z}}_1 - \hat{\mathbf{z}}_0) \mathbf{N}_0^{-1} (2\mathbf{u} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{z}}_1 - \hat{\mathbf{z}}_0), \\ \hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{d}, \\ \hat{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{d}. \end{cases} \quad (32)$$

Особенностью алгоритмов, представленных формулами (29) и (32) является то, что аппроксимация сплайнами каждой из обобщенных компонент $\mathbf{z}_i$ имеет один и тот же вид и определяется только парой коэффициентов $(\mathbf{a}^{(s)}, \mathbf{b}^{(s)})$, которые зависят только от номера области, но не от переменной. Кроме того, как видно из самого представления (31), приближение нелинейных функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{H}$ одномерными сплайнами определяется произведением матриц, одна из которых зависит только от внешних констант — $\mathbf{K}$ (для функции $\mathbf{f}$) и $\mathbf{M}$ (для функции $\mathbf{H}$), а вторая — $(\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)})$ не зависит от аппроксимируемой функции и определяется показателем степени базисных переменных $\mathbf{z}$, который одинаков для всех $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Уравнениям (32) можно придать другую форму, если пересчитать расширенный базис в исходный в соответствии с формулами

$$\left. \begin{aligned} A_{qij}^{(s)} &= K_{qj} a_{qi}^{(s)} c_{qj}, \\ B_{qj}^{(s)} &= K_{qj} a_{qj}^{(s)} d_{qj} + K_{qj} b_{qj}^{(s)}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)}; \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{qij}^{(s)} &= M_{qj} a_{qi}^{(s)} c_{qj}, \\ D_{qj}^{(s)} &= M_{qj} a_{qj}^{(s)} d_{qj} + M_{qj} b_{qj}^{(s)}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)}. \quad (34)$$

С учетом (33) и (34) можно записать:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{u} = \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)} + \mathbf{n}_0(t); \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} + \\ + \mathbf{P} \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right)^T \mathbf{N}_0^{-1} \left[\mathbf{u} - \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)} \right], \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right)^T - \\ - \mathbf{P} \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right)^T \mathbf{N}_0^{-1} \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{P} + \mathbf{N}_1. \end{cases} \quad (36)$$

Система уравнений (35) представляет ММ системы оценивания состояния ДС, основанную на одномерных сплайнах первого порядка. Определим такой фильтр как сплайн-фильтр первого порядка.

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА КВАДРАТИЧНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Аппроксимация нелинейных ДС кусочно-линейными функциями (сплайн-функции первого порядка) обладает такими достоинствами, как простота реализации (следствие линейности) и более высокая точность воспроизведения функций, чем двумя членами степенного ряда Тейлора. В то же самое время имеется тот недостаток, что при переходе из одной подобласти к другой скачкообразно происходит изменение коэффициента усиления фильтра, что приводит к возникновению переходных процессов. Последнее связано с наличием разрывов первого рода производной кусочно-линейной функции. С другой стороны, сплайн первого порядка в принципе ничем не отличается от кусочно-линейной функции. Т. е. на уровне кусочно-линейных представлений преимущества сплайновой интерполяции не выявляются. Поэтому для исключения переходных процессов и улучшения качества фильтрации сигналов естественно перейти при аппроксимации нелинейных функций в модели ДС к квадратичным сплайнам [2–5].

Применение напрямую фильтра второго порядка для многомерных динамических систем пред-

ставляет собой довольно дорогостоящую с точки зрения вычислительных затрат процедуру. Поэтому воспользуемся результатами исследований, полученных в [1]. Представим многомерные функции, входящие в описание ДС, в виде совокупности одномерных функций, которые затем аппроксимируем одномерными квадратичными сплайнами. Такое представление значительно проще, т. к. позволяет рассматривать каждую компоненту многомерной функции независимо от других.

В соответствии с (24), значения матриц $A_{qji}^{(s)}$, $B_{qji}^{(s)}$, $C_{qj}^{(s)}$ определяются из выражений

$$A_{qji}^{(s)} = K_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qii}^2, \quad B_{qji}^{(s)} = K_{qj} \sum_{k>i}^r [a_{qj}^{(s)} a_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)} c_{qij} x_i],$$

$$C_{qj}^{(s)} = K_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^r K_{qj} a_{qj}^{(s)} B_{qik}^{(s)}.$$

В случае если уравнение наблюдения тоже содержит нелинейную функцию $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, то можно выписать аналогичные соотношения для коэффициентов $V_{qji}^{(s)}$, $U_{qji}^{(s)}$, $J_{qj}^{(s)}$, определяющие аппроксимацию $\mathbf{H}(\mathbf{x})$:

$$V_{qji}^{(s)} = M_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qii}^2, \quad U_{qji}^{(s)} = M_{qj} \sum_{k>i}^r [a_{qj}^{(s)} a_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)} c_{qij} x_i],$$

$$J_{qj}^{(s)} = M_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^r M_{qj} a_{qj}^{(s)} B_{qik}^{(s)}.$$

В векторно-матричной форме система дифференциальных уравнений, моделирующих нелинейную ДС, может быть представлена как

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{C}_j + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{z} = \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{J}_j + \mathbf{n}_0(t), \end{cases} \quad (37)$$

где матрицы и вектора, входящие в описание (37), определяются как

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{1j11}^{(s)} & A_{1j22}^{(s)} & \dots & A_{1jrr}^{(s)} \\ A_{2j11}^{(s)} & A_{2j22}^{(s)} & \dots & A_{2jrr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{rj11}^{(s)} & A_{rj22}^{(s)} & \dots & A_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j1}^{(s)} & B_{1j2}^{(s)} & \dots & B_{1jr}^{(s)} \\ B_{2j1}^{(s)} & B_{2j2}^{(s)} & \dots & B_{2jr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{rj1}^{(s)} & B_{rj2}^{(s)} & \dots & B_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} C_{1j}^{(s)} \\ C_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ C_{2j}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} V_{1j11}^{(s)} & V_{1j22}^{(s)} & \dots & V_{1jrr}^{(s)} \\ V_{2j11}^{(s)} & V_{2j22}^{(s)} & \dots & V_{2jrr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{rj11}^{(s)} & V_{rj22}^{(s)} & \dots & V_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} U_{1j1}^{(s)} & U_{1j2}^{(s)} & \dots & U_{1jr}^{(s)} \\ U_{2j1}^{(s)} & U_{2j2}^{(s)} & \dots & U_{2jr}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{rj1}^{(s)} & U_{rj2}^{(s)} & \dots & U_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} J_{1j}^{(s)} \\ J_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ J_{rj}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r), \quad \mathbf{x}^2 = (x_1^2 \ x_2^2 \ \dots \ x_r^2).$$

Модель (37) может быть использована при построении фильтров второго порядка. К примеру, воспользуемся структурой модифицированного фильтра второго порядка, который может рассматриваться как частный случай усеченного и гауссовского фильтров. Совокупность уравнений, моделирующих модифицированный фильтр, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) + 0.5\mathbf{f}_{xx}(\hat{\mathbf{x}}, t) : \mathbf{P} + \\ \quad + \mathbf{P}\mathbf{H}_x^T \mathbf{N}_0^{-1} [\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, t) - 0.5\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}], \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}, t)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{f}_x^T(\hat{\mathbf{x}}, t) - \\ \quad - \mathbf{P}\mathbf{H}_x^T(\hat{\mathbf{x}}, t)\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{H}_x(\hat{\mathbf{x}}, t)\mathbf{P} + \mathbf{N}_1, \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0. \end{cases} \quad (38)$$

Структура фильтра определяется двумя модулями:

- модулем оценивания состояния динамической системы;
- модулем вычисления корреляционной функции ошибки оценивания.

Структура полученного фильтра охвачена многомерной обратной связью по вектору невязки $\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, t) - 0.5\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$. Этот вектор умножается на матрицу интенсивностей шумов измерений $\mathbf{N}_0^{-1}$. Далее следует умножение на $\mathbf{H}_x^T$, что соответствует как бы учету чувствительности векторной функции наблюдения к приращению аргумента, причем производные определяются при оценочном движении $\hat{\mathbf{x}}$. После этого следует умножение

на матрицу $\mathbf{P}$, приближенно равную ковариационной матрице оценивания.

В системе уравнений введены следующие обозначения: $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ — m -мерная векторная функция n -мерного векторного аргумента, а $\mathbf{P}$ — симметричная матрица размером $n \times n$;

$$\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \\ \dots \\ \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \\ \dots \\ \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 H_m}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Учитывая что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{C}_j ;$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{J}_j ,$$

можно записать:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{C}_j ;$$

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{J}_j ;$$

$$\mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}, t) = 2 \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) ;$$

$$\mathbf{H}_x(\hat{\mathbf{x}}, t) = 2 \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) ;$$

$$\mathbf{f}_{xx}(\hat{\mathbf{x}}, t) = 2 \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) ; \quad \mathbf{H}_{xx}(\hat{\mathbf{x}}, t) = 2 \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) .$$

Подставляя последние выражения в соотношения (38), получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[2 \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \right]^T \mathbf{N}_0^{-1} \left[\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P} \right], \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \left[2 \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \right] \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[2 \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \right]^T - \\ &\quad - \mathbf{P} \left[2 \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \right]^T \mathbf{N}_0^{-1} \left[2 \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \right] \mathbf{P} + \mathbf{N}_1, \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0. \end{aligned} \right. \quad (40)$$

Так как в соотношениях (37) нет перекрестных членов, то выражения (39) не будут содержать смешанных производных, а только вторые производные по каждой компоненте функций — $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ и которые являются суммой одномерных функций. Следствием этого является наличие только диагональных сомножителей P_{ii} в выражении (39). С учетом сказанного можно записать:

$$\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \left(\sum_j^n A_{1qii}^{(s)} \right) P_{ii} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i^n \left(\sum_j^n A_{nqii}^{(s)} \right) P_{ii} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \left(\sum_j^n V_{1qii}^{(s)} \right) P_{ii} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i^n \left(\sum_j^n V_{nqii}^{(s)} \right) P_{ii} \end{bmatrix}.$$

Оценим вычислительные затраты при реализации стандартного усеченного фильтра второго порядка и фильтра второго порядка, основанного на сплайн-интерполяции одномерными функциями.

Оценивание в динамических системах и, в частности в системах автоматического управления, должно осуществляться синхронно с поступлением информации наблюдения, т. е. в реальном масштабе времени. При этом большое значение приобретает необходимая вычислительная производительность, особенно при оценивании многомерных и многосвязных процессов. В этом отношении алгоритмы второго порядка для сложных систем предъявляют весьма высокие требования к вычис-

лительным средствам. Описанные выше непрерывные алгоритмы оценивания представляют совокупность векторного дифференциального уравнения оценивания состояния и матричного дифференциального уравнения для определения ошибки.

Размерность векторов и матриц, входящих в эти уравнения, соответственно равны n и $n \times n$. С учетом симметрии корреляционной матрицы, общее число скалярных дифференциальных уравнений, соответствующих каждому из рассмотренных алгоритмов, составляет $n + 0.5n(n+1)$. Уравнения интегрируются на основе того или иного метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (методов Эйлера, Адамса, Рунге—Кутта и др.) с использованием инструментальной информации на каждом шаге. Шаг численного интегрирования Δt ограничивается сверху одним из следующих факторов:

- устойчивым управлением в реальном времени;
- численной сходимостью алгоритмов оценивания.

ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ

Одной из характеристик вычислительной "трудоемкости" алгоритма является общее число элементарных арифметических операций на один шаг. Именно в этом отношении алгоритмы оценивания второго порядка значительно сложнее и труднее в реализации по сравнению с алгоритмами первого порядка. Для усеченного фильтра второго порядка (12) наиболее трудоемкими с точки зрения вычислительных затрат являются процедуры вычисления $\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$. Число арифметических операций, необходимых для их вычисления, складывается из операций вычисления матриц Гесса $\mathbf{f}_{xx}$ и $\mathbf{H}_{xx}$ и операций вычисления собственно $\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$. Если на вычисление

второй частной производной от скалярной функции тратится в среднем n_{xx} операций, то общее число элементарных арифметических операций, необходимых для однократного вычисления $\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$, приблизительно равно [5]

$$N_{xx} = (n + m)n[2n + 0.5(n + 1)n_{xx}] . \quad (42)$$

Необходимо отметить: указанные выше процедуры вычисления $\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$ присутствуют как в основном алгоритмическом модуле (определяется оценка $\hat{\mathbf{x}}$), так и в модуле вычисления корреляционной функции.

Следующими по сложности вычислений являются члены $\mathbf{P}\mathbf{f}_x^T$ и $\mathbf{P}\mathbf{H}_x^T$. Если на вычисление 1-й частной производной от скалярной функции требуется в среднем n_x арифметических операций, то общее число элементарных операций, необходимых для однократного вычисления $\mathbf{P}\mathbf{f}_x^T$ и $\mathbf{P}\mathbf{H}_x^T$, составит примерно [5] $N_x = (n + m)n(2n + n_x)$.

Таким образом, общие вычислительные затраты равны $N = N_x + N_{xx}$:

$$N = (n + m)n[4n + n_x + 0.5(n + 1)n_{xx}] \Rightarrow N \sim n^4 . \quad (43)$$

Определим вычислительные затраты, соответствующие алгоритму оценивания (40). В соответствии с выражениями (41), они содержат только диагональные элементы, поэтому для вычисления

$$\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P} \text{ и } \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)} \right) : \mathbf{P}$$

требуется в n раз операций меньше, чем по формуле (42).

То же самое можно сказать о вычислении $\mathbf{P}\mathbf{f}_x^T$ и $\mathbf{P}\mathbf{H}_x^T$. Здесь также вычислительные затраты будут меньше в n раз. Как итог, общие вычислительные затраты будут пропорциональны кубу размерности $N \sim n^3$. С ростом размерности системы оценивания выигрыш в вычислительных затратах будет расти пропорционально n .

Таким образом, аппроксимация нелинейной составляющей динамической системы с помощью сплайнов (линейных или квадратичных) является перспективным направлением с точки зрения использования этих моделей в задачах оценивания. Применение сплайнов более высоких степеней в задачах нелинейной фильтрации представляется довольно проблематичным: во-первых, из-за сложности реализующего алгоритма, во-вторых, даже незначительный выигрыш в точности может

быть полностью нивелирован различного рода неопределенностями, присутствующими в динамической системе. Здесь имеется в виду тот факт, что на получение оптимальных оценок влияет не только качество аппроксимации, но и множество других факторов — погрешности измерений; шумы округления; точность исходных математических моделей самой динамической системы, принятых законов распределений случайных процессов, начальных условий, и т. д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим основные научные результаты, представленные в настоящей статье.

1. Получено описание нелинейных динамических систем, основанных на представлении многомерных функций в виде линейной суперпозиции одномерных функций, заданных в обобщенном базисе.

2. Разработаны алгоритмы субоптимального оценивания и фильтрации, использующие линейную сплайн-интерполяцию многомерных функций.

3. Разработаны алгоритмы оценивания нелинейных динамических систем, представленных в виде одномерных сплайнов.

4. Разработаны алгоритмы оценивания состояний нелинейных динамических систем, основанных на представлении ДС одномерными квадратичными сплайнами.

5. Проведена оценка вычислительных затрат, необходимых для реализации разработанного метода, основанного на представлении квадратичными сплайнами. Показано, что его реализация требует в n раз меньше элементарных вычислительных операций (умножений) чем аналогичный фильтр второго порядка.

Полученные результаты могут быть положены в основу разработки системы многоканального приема—передачи информации с фильтрацией сбоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутырский Е.Ю. Аппроксимация многомерных функций // Информация и космос. 2006. № 4. С. 40–51.
2. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Теория минимальных сплайнов. СПбГУ, 2001. 315 с.
3. Голубков А.Ю. Построение внешних и внутренних функций представления непрерывных функций многих переменных суперпозицией непрерывных функций одного переменного // Фундаментальная и прикладная математика. МГУ, 2002. Т. 8, № 1. С. 27–38.
4. Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПбГУ,

1994. 346 с.

5. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.

Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики (Кувалдин И.А.)

Контакты: Чалкин Владимир Петрович,
cvp2008@mail.ru

Санкт-Петербургское отделение Института химфизики им. Н.Н. Семенова РАН (Бутырский Е.Ю., Чалкин В.П.)

Материал поступил в редакцию 8.12.2009.

ON SIGNALS SPLINE-FILTRATION

Eu. Yu. Butyrsky¹, I. A. Kuvaldin², V. P. Chalkin¹

¹*St. Petersburg Branch of Institute for Problems of Chemical Physics RAS*

²*St. Petersburg State University for Service and Economics*

A method of suboptimal dynamic system evaluation, based on the grounds of approximation of continuous function of several variables by a weighted sum of univariate functions, defined on a generalized basis, formed as a linear superposition of arguments of the assumed function, is proposed. The stated material is a foundation of the main theory of signal spline-filtering, suggested by Eu. Yu. Butyrsky.

Keywords: dynamic system, suboptimal evaluation, univariate functions, generalized basis, spline-filtering