

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский, И. А. Кувалдин,
В. И. Тарханов, В. П. Чалкин

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Одним из фундаментальных понятий теории сигналов, лежащей в основе теории фильтрации и обнаружения сигналов, является функция неопределенности. Она широко используется при выборе классов сигналов в связи, радиолокации, гидроакустике. В настоящей статье проведено обобщение и построение широкополосной функции неопределенности сигналов, определенной на двухпараметрической группе преобразований. Рассмотрены свойства и общие условия ее аппроксимации узкополосной функцией неопределенности.

Кл. сл.: функция неопределенности, двухпараметрическая группа преобразований, сигнал, разрешающая способность, соотношение неопределенности

ВВЕДЕНИЕ

При оценке точности измерения задержки и доплеровского сдвига, анализе узкополосных сигналов и их синтезе при различных ограничениях широко используется функция неопределенности (ФН) Вудворда [1–5]. Ее применение ограничивается тем, что она учитывает эффект Доплера лишь путем гетеродинного приближения, пренебрегая, по существу, доплеровским искажением модулирующей функции. Однако именно это искажение часто ограничивает возможности гидролокаторов и систем связи в гидроакустике. Вопрос построения широкополосной функции неопределенности (ШФН) рассматривался и с позиций теоретико-группового подхода [4, 6]. Были введены мультипликативная и антипараболическая функции неопределенности, рассмотрены их свойства, определены области применения и условия гетеродинной аппроксимации. Но если в радиолокации условия узкополосного приближения, как правило, выполняются, то в гидроакустике вследствие значительно более низкой скорости распространения колебаний, особенностей океанической среды, необходимости использования низких частот и широкополосных сигналов в гидролокаторах это не всегда имеет место. Эти ограничения вызвали потребность в существенной модификации широкополосной функции неопределенности для более точного описания характеристик современных гидроакустических средств.

Целью данной статьи является синтез функции неопределенности, определенной на произвольной двухпараметрической группе преобразований, а также рассмотрение условия аппроксимации некоммукативной группы прямым произведением двух коммутативных групп. В статье предложена

широкополосная функция неопределенности, связанная с биспектром. На основании этой связи может быть разработан алгоритм вычисления ШФН, в том числе для длинных гидроакустических волн.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ЗАДАННОЙ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Положим, что на множестве $\mathbf{R}$ (или части его) задана двухпараметрическая группа преобразований G . Все двухпараметрические группы изоморфны группе линейного преобразования вещественной прямой, а их множество задается выражением [7]:

$$g(\alpha, a): t \rightarrow L^{-1}\{\alpha L(t) + L(a)\}, \quad (1)$$

где $L(\cdot)$ — непрерывная, дифференцируемая и обратимая функция; α, a — параметры группы.

Двухпараметрическая группа G состоит из двух подгрупп G_a и G_α . Причем группа G_a является нормальной подгруппой группы G , а подгруппа G_α изоморфна факторгруппе $G \setminus G_a$. Преобразования времени (носителя сигнала) индуцируют преобразования сигнала с сохраняемой нормой:

$$g(\alpha, a): s(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} s \left[L^{-1} \left[\frac{L(t) - L(a)}{\alpha} \right] \right]. \quad (2)$$

Множитель в выражении (2) связан с энергетическими соотношениями, норма преобразованного сигнала по мере $dL(t)$ должна быть равна норме

исходного сигнала $s(t)$. С учетом (2) введем ФН, являющуюся аналогом ШФН, рассмотренной в [1]:

$$R_G(\alpha, a) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_G s(t) s^* \left[L^{-1} \left[\frac{L(t) - L(a)}{\alpha} \right] \right] \xi^{-1}(t) dt. \quad (3)$$

Если использовать спектральное представление сигнала на группе G по мере $dL(t) = \xi^{-1}(t) dt$, получим

$$R_G(\alpha, a) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) S_g^*(\alpha f) e^{i2\pi f L(a)} df. \quad (4)$$

К примеру, отметим, что когда нормальной подгруппой является мультипликативная подгруппа, тогда $L(t) = \ln(t)$, $L^{-1}(\cdot) = \exp(\cdot)$, а ФН является мультипликативной широкополосной:

$$\begin{cases} R_M(\alpha, a) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_M s(t) s^* \left[\left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \frac{dt}{t}, \\ R_M(\alpha, a) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(f) S_M^*(\alpha f) e^{i2\pi f \ln(a)} df, \end{cases} \quad (5)$$

$$S_M(f) = \int_M s(t) e^{i2\pi f \ln(t)} dt. \quad (6)$$

Рассмотрим основные свойства ШФН на группе G (ШФНГ).

1. Наибольшее значение. В силу проведенной нормировки наибольшее значение ШФНГ равно энергии сигнала E_g по мере $dL(t) = \xi^{-1}(t) dt$ и достигается соответственно в точке $(\alpha, a) = (1, L^{-1}(0))$. В этом можно убедиться, подставив значения параметров в выражение (3) или (4). В результате имеем:

$$\begin{aligned} R_G(\alpha, a) &= \int_G |s(t)|^2 \xi^{-1}(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S_g(f)|^2 df = E_g. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Симметрия ШФНГ.

а) Симметрия по параметру a

$$R_G\{\alpha, L^{-1}[-L(a)]\} = R_G^*\{\alpha^{-1}, L^{-1}[\alpha L(a)]\}. \quad (8)$$

б) Симметрия по параметру α :

$$R_G(\alpha^{-1}, a) = R_G^* \left\{ \alpha, L^{-1} \left[\frac{L(a)}{\alpha} \right] \right\}. \quad (9)$$

с) Симметрия по параметрам α и a одновременно:

$$R_G\{\alpha^{-1}, L^{-1}[-L(a)]\} = R_G^* \left\{ \alpha, L^{-1} \left[\frac{L(a)}{\alpha} \right] \right\}. \quad (10)$$

3. Объем под квадратом модуля ШФНГ. Для получения выражения, описывающего объем под $|R_G(\alpha, a)|^2$, воспользуемся одним из выражений (5). Обозначим интересующую нас величину через V_g

$$V_g = \iint_G |R_G(\alpha, a)|^2 \xi^{-1}(a) da d\alpha. \quad (11)$$

Подставляя, в последнее выражение определение ШФНГ через спектры, и используя фильтрующее свойство дельта-функции, после несложных упрощений получаем

$$V_g = \left[\int_{G_a} |S(v)|^2 dv \right] \left[\int_{G_a} |S(u)| \xi^{-1}(u) du \right] = E_a E_\alpha, \quad (12)$$

где E_a, E_α — соответственно энергия сигнала $s(t)$, введенная на базисе представлений нормальной подгруппы G_a группы G и энергия сигнала $s(t)$, введенная на подгруппе G_a .

4. Преобразования сигнала, не изменяющие свойства ШФНГ. Такие преобразования дают множества сигналов, в пределах которых возможен выбор форм, наилучшим образом удовлетворяющих требованиям к проектируемому радиоэлектронному средству. Кроме того, терминология инвариантности позволяет представить результаты в более общем виде. Для получения такого обобщения используем понятие взаимной ШФН на группе G (ВШФНГ) $R_{vG}(\alpha, a)$:

$$\begin{cases} R_{vG}(\alpha, a) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_G s(t) p^* \left[L^{-1} \left[\frac{L(t) - L(a)}{\alpha} \right] \right] \xi^{-1}(t) dt, \\ R_{vG}(\alpha, a) = \sqrt{\alpha} \int_R S_g(f) P_g^*(\alpha f) e^{i2\pi f \ln(f)} df, \end{cases} \quad (13)$$

где $s(t)$ — аналитический сигнал, определенный на нормальной подгруппе G_a ; $p(t)$ — комплексная функция отклика фильтра; $P_g(f) = F_g\{p(t)\}$ — передаточная функция фильтра в базисе функций $\exp\{i2\pi f L(t)\}$.

а) Если $s(t) = s_1[L^{-1}(L(t))]$ и $p(t) = p_1[L^{-1}(L(t))]$, то будет иметь место соотношение

$$|R_{vG}(\alpha, a)| = |R_{vG1}[\alpha, L^{-1}(-L(a))]|. \quad (14)$$

$R_{vG}(\alpha, a)$ — ВШФНГ сигнала $s_1(t)$ и фильтра (или сигнала) $p_1(t)$.

б) Если $P_{1g}(f) = P_g(f) \exp\{ik \log(f)\}$,

$$S_{1g}(f) = S_g(f) \exp\{ik \log(f)\},$$

где $\log(\cdot)$ берется по любому основанию, а k — const, то:

$$|R_{vG}(\alpha, a)| = |R_{vG1}(\alpha, a)|. \quad (15)$$

То есть ВШФНГ не изменится, если спектр сигнала и отклика (по мере нормальной подгруппы) умножить на $\exp\{ik \log(f)\}$.

с) Если $s_1(t) = s(t) \exp\{ikL(t)\}$, $p_1(t) = p(t) \times \exp\{ikL(t)\}$, то:

$$|R_{vG}(\alpha, L^{-1}(0))| = |R_{vG1}(\alpha, L^{-1}(0))|. \quad (16)$$

д) Для $s_1(t) = \sqrt{k} s[L^{-1}(kL(t))]$ и $p_1(t) = \sqrt{k} p \times [L^{-1}(kL(t))]$ имеет место следующее равенство:

$$R_{vG}(\alpha, a) = R_{vG1}[\alpha, L^{-1}(kL(a))]. \quad (17)$$

е) Если $S_{1g}(f) = f^{-1} S_g(f^{-1})$, $P_{1g}(f) = f^{-1} P_g(f^{-1})$, то получим:

$$|R_{vG}(\alpha, L^{-1}(0))| = |R_{vG1}(\alpha^{-1}, L^{-1}(0))| = |R_{1vG}(\alpha, L^{-1}(0))|, \quad (18)$$

где $R_{1vG}(\cdot)$ — ВШФНГ, в случае если поменять местами сигнал и отклик в ФН $R_{vG1}(\cdot)$.

Таким образом, преобразование, сохраняющее энергию, не влияет на сечение $L(a) = 0$ ВШФНГ, если сигнал и отклик фильтра поменять местами.

Нетрудно показать, что для любых преобразований спектра сигнала $S_1(f) = \sqrt{nf^{n-1}} S(f^n)$ при вещественном n имеет место соотношение

$$|R_G(\alpha, L^{-1}(0))| = |R_{1G}(\alpha, L^{-1}(0))|, \quad (19)$$

где $R_G(\cdot)$ и $R_{1G}(\cdot)$ — ШФНГ соответственно для $s(t)$ и $s_1(t)$.

ф) Если $s_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{L(t)}\right] s\left[\frac{1}{L(t)}\right]$ и $p_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{L(t)}\right] p\left[\frac{1}{L(t)}\right]$, то справедливо соотношение

$$|R_{vG}(\alpha, L^{-1}(0))| = |R_{vG1}(\alpha^{-1}, L^{-1}(0))| = |R_{1vG}(\alpha, L^{-1}(0))|. \quad (20)$$

г) Объемы тел неопределенности для сигналов $S_g(f)$ и $\sqrt{f} S(f^{-1})$ равны между собой. Что вытекает из равенства (20). Кроме того, для сигналов вида $\sqrt{f} S(f^{-1})$ объем тела неопределенности всегда конечен и равен объему ФНВ. Из анализа ШФНГ вытекает, что V_g зависит от формы сигнала и что, если спектр содержит нулевую частоту, интеграл, определяющий E_α , расходуется и V_g не существует. Известно, что независимость объема для ФНВ от формы сигнала позволяет придать законченный физический смысл самому понятию "неопределенность", а также использовать это свойство для синтеза сигналов с заданными свойствами. Аналогичными "неестественными" свойствами обладает и ШФН, определенная и исследованная в работе [1]. Там же были определены условия, при которых можно добиться инвариантности объема ФН от формы сигнала.

В обзоре [1], приведены мнения различных авторов относительно поведения ШФН в окрестности нуля. Некоторые авторы полагают, ШФН представляет практический интерес только в окрестности оси задержек, т. е. для коэффициентов сжатия, близких к единице, вследствие чего объем также будет слабо зависеть от формы сигнала. Инвариантность объема ШФН возникает как следствие принятия гипотезы о невозможности распространения в среде постоянной составляющей и ни один источник не может излучать на нулевой частоте, так что верхний предел в определении объема ФН всегда конечен. Альтернативной точкой зрения на природу ШФН следует считать подход, основанный на постулировании факта конечности энергии сигнала по аддитивной и мультипликативной мерам [5]. Таким образом, существует несколько компромиссных путей для согласования выражения для объема с интуитивными взглядами на природу неопределенности, основанных прежде всего на ограничении области допустимых значений коэффициента сжатия или применении узкополосного приближения. Однако ни один из этих путей не разрешает в полной мере вопроса об инвариантности объема к форме сигнала. Все сказанное выше в полной мере относится и к определенной формулами (3) и (4) ШФНГ.

Сформулируем *теорему единственности* для ВШФНГ.

Представим ВШФНГ в следующем виде (что нетрудно сделать путем замены переменной):

$$R_{\nu G}(\alpha, a) = \sqrt{\alpha} \int_G s[L^{-1}(\alpha L(t) + L(a))] p^*(t) \xi^{-1}(t) dt, \quad (21)$$

или $R_{\nu G}(\alpha, a) = \sqrt{\alpha} F(\alpha, a)$.

Теорема 1. Для того чтобы произвольная функция двух переменных $F(\alpha, a)$ принадлежала классу ФН, необходимо и достаточно, чтобы она образовывалась следующим образом:

$$S_g(f_1) P_g^*(f_2) = \int_G F\left(\frac{f_1}{f_2}, a\right) e^{i2\pi f_1 L(a)} \xi^{-1}(a) da \quad (21)$$

для любых f_1 , не равных нулю, и чтобы интеграл $\int F(\alpha, a) da$ существовал и не зависел от α .

Теорема 2. Если $F_1(\alpha, a)$ соответствует сигналу $s_1(t)$, $F_2(\alpha, a)$ — сигналу $s_2(t)$, то из равенства этих функций $F_1(\alpha, a) = F_2(\alpha, a)$ следует равенство сигналов с точностью до константы $s_1(t) = c s_2(t)$, модуль которой равен единице.

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству теорем для ШФН, приведенному в [1, 4].

Рассмотрим условия, при которых ШФНГ может быть аппроксимирована узкополосной ФН на двухпараметрической группе, являющейся прямым произведением двух коммутативных подгрупп $G = G_a \times G_b$. Возьмем выражение (5) и представим $a = 1 + \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} R_G(\beta, a) &= \sqrt{1 + \beta} \int_R S_g(f) S_g^*[(1 + \beta)f] e^{i2\pi f L(a)} df \approx \\ &\approx \int_R S_g(f) S_g^*(f + \Omega) e^{i2\pi f L(a)} df = R_G(\Omega, a). \end{aligned}$$

Таким образом, при условии, что $\beta f \approx \beta f_g \approx \beta f_n \approx \beta f_g = \Omega$, преобразование гомотетии на группе G может быть заменено равномерным частотным сдвигом в области группового спектра. При этом ШФНГ может быть аппроксимирована узкополосной ФН на группе (ФНГ) вида

$$R_g(\Omega, a) = \int_R S_g(f) S_g^*(f + \Omega) e^{i2\pi f L(a)} df. \quad (21)$$

Во временной области выражение, определяющее узкополосную ФН на прямом произведении подгрупп, описывается выражением

$$R_g(\Omega, a) = \int_G s(t) s^*[L^{-1}(L(t) - L(a))] e^{i2\pi \Omega L(t)} \xi^{-1}(t) dt. \quad (22)$$

Определить условия аппроксимации ШФНГ узкополосной ФНГ можно также, если воспользоваться введенными выше понятиями числа степеней свободы сигнала N_g и базы сигнала B_g на группе. Число степеней свободы сигнала в базисе представлений нормальной подгруппы G_a группы G определяется выражением вида

$$N_g = 2f_g T_g,$$

а база сигнала — $B_g = 2F_g T_g$. Очевидно, что числа степеней свободы для сигнала, подвергнутого преобразованию гомотетии и не подвергнутого, должны отличаться не более чем на один отсчет, т. е.:

$$|\alpha 2f_g T_g - 2f_g T_g| < 1.$$

Откуда получаем условие узкополосной аппроксимации:

$$|\alpha - 1| N_g = |\beta| N_g < 1. \quad (23)$$

В случае если используется понятие комплексной огибающей на группе, то условие доплеровской аппроксимации запишется как

$$|\alpha - 1| B_g = |\beta| B_g < 1. \quad (24)$$

Узкополосную аппроксимацию можно представить в виде диаграммы

$$L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)] \rightarrow \begin{cases} L^{-1}[L(t) + L(a)], \\ f + \Omega. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, двухпараметрическое преобразование, действующее в области времени, заменяется двумя однопараметрическими преобразованиями, действующими соответственно во временной и в частотной областях. С другой стороны, смысл аппроксимации заключается в том, что согласованный фильтр для принимаемого сигнала может иметь вид $S_g^*(f \pm \Omega)$, а не $\sqrt{\alpha} S_g^*(\alpha f)$.

Аппроксимация (25) с теоретико-групповой точки зрения отображает тот факт, что все двухпараметрические группы изоморфны или линейной группе преобразований вещественной прямой, или группе сдвигов плоскости. Применительно к сигналам линейное преобразование времени заменя-

ется трансляцией в плоскости (t, f) :

$$g(a, \Omega): (t, f) \rightarrow (L^{-1}[L(t) + L(a)], f + \Omega). \quad (26)$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УЗКОПОЛОСНОЙ ФНГ

1. Мультипликативная ФН. Частным случаем узкополосной ФНГ, является мультипликативная ФН [1, 5]. В этом случае $L(t) = \ln(t)$, а $L(a) = \ln(a)$ (здесь a имеет смысл доплеровского параметра).

$$R_M(\alpha, b) = \int_M s(t) s^*(\alpha t) e^{i2\pi b \ln(t)} \frac{dt}{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{R}^+, \quad (27)$$

где $b = \beta f_m$ — частотный сдвиг, обусловленный параметром ускорения.

Мультипликативная функция неопределенности, реализованная на группе преобразований плоскости (t, f) с элементом преобразования $g(\alpha, b)$, является аппроксимацией ШФН (5), реализованной на группе преобразований времени следующего вида [4, 5]:

$$g(\alpha, a): t \rightarrow \alpha t^a. \quad (28)$$

2. Инверсная ФН. Если $L(t) = -t^{-1}$, имеем инверсную функцию неопределенности, задаваемую формулой

$$R_I(\alpha, b) = \int_I s(t) s^* \left(\frac{t}{-\beta t + 1} \right) e^{i2\pi \frac{b}{t}} \frac{dt}{t^2}, \quad (29)$$

$$b = f_I(\alpha - 1).$$

Функция неопределенности (29), является аппроксимацией ШФН, реализованной на группе преобразований следующего вида:

$$g(\alpha, a): t \rightarrow \frac{\alpha t}{-\beta t + 1}. \quad (30)$$

3. Наибольшее значение. ФНГ принимает в точке $(0, L^{-1}(0))$ наибольшее значение. Это трудно показать, подставив нулевые значения параметров в определение ФНГ.

4. Свойства симметрии.

$$R_g(\Omega, a) = R_g^*[-\Omega, L^{-1}(-L(a))], \quad (31)$$

$$|R_g(\Omega, a)|^2 = |R_g[-\Omega, L^{-1}(-L(a))]|^2. \quad (32)$$

5. Параболическая фаза (время). Если $R_g(\Omega, a)$

соответствует сигнал $s(t)$, то $R_g\left(\Omega + \frac{k}{p}L(a), a\right)$

соответствует сигнал $s(t) \exp\{ik[L(t)]^2\}$. Для доказательства достаточно произвести прямую подстановку в определение ФНГ (21).

Если, к примеру, положить огибающую сигнала в интервале времени $\left[L^{-1}\left(-\frac{L(T)}{2}\right), L^{-1}\left(\frac{L(T)}{2}\right)\right]$

постоянной A , то новый сигнал будет представлять собой ЛЧМ-сигнал по мере $dL(t) = A \exp\{ik[L(t)]^2\}$.

6. Параболическая фаза (частота). Если $R_g(\Omega, a)$ соответствует сигнал $s(t)$, то

$R_g\left[L^{-1}\left(L(a) + \frac{h}{p}\Omega\right), \Omega\right]$ соответствует сигнал

$F_g^{-1}\{S_g(f) \exp\{ihf^2\}\}$. Доказательство можно получить прямой подстановкой в (32).

7. Инвариантность объема тела неопределенности. Объем тела неопределенности узкополосной ФН на группе преобразований, полученный прямым произведением двух подгрупп, не зависит от формы сигнала и равен $|R_g(0, L^{-1}(0))|^2$. Формально это утверждение записывается в виде

$$\int \int_G |R_g(\Omega, a)|^2 \xi^{-1}(a) da d\Omega = |R_g(0, L^{-1}(0))|^2. \quad (33)$$

Последнее свойство обычно называют "принципом неопределенности", или "законом сохранения неопределенности". Суть его заключается в том, что общая потенциальная неопределенность одинакова для всех сигналов, обладающих одной и той же энергией (в данном случае энергия понимается в групповом смысле, т. е. по мере $\xi^{-1}(t)dt$). Это одно из наиболее важных свойств функции неопределенности, т. к. оно означает, что все сигналы одинаково хороши (или плохи), если они сравниваются без учета условий, в которых сигнал распространяется.

8. Свойство самотрансформации. Инвариантность ФНГ относительно двойного преобразования Фурье: если $|R_g(\Omega, a)|^2$ — есть ФНГ, то имеет место соотношение

$$\int_G \left| R_g(\Omega, a) \right|^2 e^{i2\pi[\Omega L(a_1) - L(a)\Omega_1]} \xi^{-1}(a) da d\Omega = \\ = \left| R_g(\Omega_1, a_1) \right|^2. \quad (34)$$

Доказательство этого свойства проводится аналогично предыдущему — путем прямой подстановки и использования фильтрующих свойств дельта-функции.

9. Преобразования ФНГ. Координатное преобразование унимодулярной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 1. \quad (35)$$

Преобразование матрицей $\mathbf{A}$, сохраняющей объем "тела неопределенности", приводит к изменению ФНГ по следующему закону:

$$\mathbf{A}\{R_g^*(\Omega, a)\} = \\ = R_g(g_{11}\Omega + g_{12}L(a), L^{-1}(g_{22}\Omega + g_{22}L(a))). \quad (36)$$

Рассмотрим, как изменяется сигнал при координатных преобразованиях ФН.

В случае когда g_{21} не равно нулю, матрица преобразования координат может быть представлена произведением простейших матриц [6]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}(\tau_1)\mathbf{Q}(\beta_1)\mathbf{P}(\tau_2); \quad (37)$$

$$\mathbf{P}(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\tau_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(\tau_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\tau_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tau_1 = \frac{1-g_{11}}{g_{21}}, \quad \tau_2 = \frac{1-g_{22}}{g_{21}}, \quad \beta_1 = -g_{21}.$$

Матрица $\mathbf{P}(t)$ индуцирует преобразование функции $s(t)$, которое записывается в виде

$$s_p(t) = s(t)e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2}} \quad (38)$$

и соответствует действию линейного частотного модулятора (по мере $\xi^{-1}(t)$). Матрица $\mathbf{Q}(\beta)$ индуцирует преобразование

$$s_Q(t) = s(t) * e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta}}, \quad (39)$$

которое соответствует действию фильтра с квадратичной фазочастотной характеристикой (спектр понимается как спектр по неприводимым представлениям нормальной подгруппы G_a группы

G). Знак свертки "*" следует понимать как групповую свертку по мере $\xi^{-1}(t)dt$. Другая интерпретация индуцированного преобразования (39) — это представление его как интегрального преобразования Френеля на группе G_a , т. е. $\text{Fr}_g\{\cdot\}$, а сигнал в данном случае представляется как сумма последовательно смещенных функций Френеля Fr_g . Тогда

$$s_F(t) = \text{Fr}_g\{s(t)\}. \quad (40)$$

Последовательность операций по преобразованию функций является обратной последовательности операций по преобразованию координат. Результирующее преобразование функции $s(t)$, индуцируемое матрицей $\mathbf{A}$, записывается в виде

$$s_A(t) = s(t)e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2}} * e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta}} e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2}}. \quad (41)$$

В случае, когда g_{12} не равно нулю, матрицу $\mathbf{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\beta_1)\mathbf{P}(\tau_1)\mathbf{Q}(\beta_2); \quad (42)$$

$$\beta_1 = \frac{1-g_{22}}{g_{12}}, \quad \tau_1 = -g_{12}, \quad \beta_2 = \frac{1-g_{11}}{g_{12}}.$$

Тогда преобразование $s(t)$, индуцированное преобразованием координат функции неопределенности, запишется как

$$s_A(t) = \left\{ s(t) * e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta_1}} e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2}} \right\} e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta_2}}. \quad (43)$$

Если $g_{21} = g_{12} = 0$, преобразование $s(t)$ индуцируется матрицей

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{Q}(\beta_1)\mathbf{P}(\tau_1)\mathbf{Q}(\beta_2)\mathbf{P}(-\tau), \quad (44)$$

где: τ — произвольная постоянная; $k = g_{22} = a_{11}^{-1}$;

$$\beta_1 = \frac{k^2 - k}{\tau}; \quad \tau_1 = \frac{\tau}{k}; \quad \beta_2 = \frac{1 - k}{\tau}.$$

Преобразования сигнала записываются следующим образом:

$$s_A(t) = \left\{ s(t) * e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta_1}} e^{i\tau \frac{L^2(t)}{2}} \right\} * e^{-i\tau \frac{L^2(t)}{2\beta_2}} e^{-i\tau \frac{L^2(t)}{2}}. \quad (45)$$

Выражение (45) показывает, что линейное изменение масштаба времени на группе G_a может быть осуществлено с помощью двух частотных модуляторов по мере $\xi^{-1}(t)dt$ и двух фильтров с квадратичной фазочастотной характеристикой спектра $S_g(f)$.

Фурье-преобразование функции $s(t)$ также может рассматриваться как индуцированное координатным преобразованием. Если $F_g\{s(t)\} = S_g(f)$, то $F_g\{R_g(\Omega, a)\} = F_g\{R_g(-\Omega, a)\}$. При этом матрица преобразования координат записывается в виде

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}(-1)\mathbf{Q}(1)\mathbf{P}(-1). \quad (46)$$

Откуда получаем:

$$s_A(t) = \left\{ s(t) e^{-i\frac{L^2(t)}{2}} * e^{i\frac{L^2(t)}{2}} \right\} e^{i\frac{L^2(t)}{2}}. \quad (47)$$

10. Эффективные ширина спектра и длительность сигнала F_g , T_g . Квадраты F_g и T_g определяются выражениями

$$\begin{cases} T_g^2 = -\frac{1}{E_g} \frac{\partial R_g(\Omega, a)}{\partial a^2} \Big|_{(\Omega=L^{-1}(0)=0)} = \frac{1}{E_g} \int_G L^2(t) s^2(t) \xi^{-1}(t) dt, \\ F_g^2 = -\frac{1}{E_g} \frac{\partial R_g(\Omega, a)}{\partial \Omega^2} \Big|_{(a=L^{-1}(0)=0)} = \frac{1}{E_g} \int_R (f-f_g)^2 |S_g(f)|^2 df. \end{cases} \quad (48)$$

Выражения (48) совпадают с известными определениями, что и следовало ожидать.

11. Разрешающая способность по параметрам a и Ω . Разрешающая способность определяется в соответствии с формулами

$$T(a) = \frac{1}{E_g^2} \int_G |R_g(0, a)|^2 \xi^{-1}(a) da, \quad (49)$$

$$F(\Omega) = \frac{1}{E_g^2} \int_R |R_g(\Omega, L^{-1}(0))|^2 d\Omega. \quad (50)$$

Мера способности к одновременному разрешению по параметру a и параметру Ω для сигнала определяется произведением $T(a)F(\Omega)$. Для импульса вида $\sin[2\pi f_g L(t)]$ и гауссовой огибающей по мере $\xi^{-1}(t)dt$ произведение равно едини-

це, а с прямоугольной огибающей $2/3$. Аналогичные соотношения имеют место и в случае ФНВ (но мера dt).

12. Правило умножения.

а) Если $R_{gu}(\Omega, a)$ есть функция неопределенности, соответствующая $u(t)$, а $R_{gv}(\Omega, a)$ — функция неопределенности, соответствующая сигналу $v(t)$, то для произведения этих сигналов $z(t) = u(t)v(t)$ функция неопределенности задается аддитивной сверткой ФНГ сигналов $u(t)$ и $v(t)$ по оси параметра Ω :

$$R_{gz}(\Omega, a) = \int R_{gu}(\Omega_1, a) R_{gv}(\Omega - \Omega_1, a) d\Omega_1. \quad (60)$$

б) Если $R_{gu}(\Omega, a)$ есть функция неопределенности, соответствующая $U(f)$, а $R_{gv}(\Omega, a)$ — функция неопределенности, соответствующая сигналу $V(f)$, то для произведения этих спектров $Z(f) = U(f)V(f)$ функция неопределенности задается групповой сверткой ФНГ сигналов $u(t)$ и $v(t)$ по оси параметра a :

$$R_{gz}(\Omega, a) = \int R_{gu}(\Omega, a_1) R_{gv}(\Omega, g^{-1}(a_1)a) da_1. \quad (79)$$

ВЗВЕШЕННАЯ ШФНГ

Введенные выше ШФНГ и ФНГ являются обобщением известных ФН, которые получаются как частный случай при введении конкретных групп преобразований или допущении узкополосности на группе. Таким образом, нет необходимости изучать конкретную ФН, все результаты можно получать, исследуя абстрактную двухпараметрическую ФН, реализованную на группе G . Такой подход, основан на разбиении множества сигналов $\{s(t)\}$ на классы эквивалентности, в которых введены операции корреляционного сравнения, определения численных характеристик сигнала, преобразования Фурье и Гильберта. Если класс эквивалентности рассматривать как элемент некоторой группы изоморфной группе гомотетий, то на этой совокупности можно определить двухпараметрическую ФН.

Как уже было отмечено, объем тела неопределенности ШФН зависит от формы сигнала. Рассмотрим подход, позволяющий это исключить. Введем понятие взвешенной ШФН (ВШФН):

$$R_V(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\alpha\omega) V(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (71)$$

$$R_V(\alpha, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) * F^{-1}\{V(\omega)\}] s^* \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right) dt. \quad (72)$$

Для определения весовой функции $V(\omega)$ найдем объем ВШФН и потребуем, чтобы он был конечен и равен квадрату аддитивной энергии сигнала. Находим

$$V_V = \int |S(\omega)|^2 d\omega \int |S(\omega)|^2 |V(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (73)$$

Из соотношения (73) видно, что, для того чтобы второй интеграл был конечен в аддитивном смысле, требуется соблюдение равенства

$$\frac{|V(\omega)|^2}{\omega} = 1. \quad (74)$$

Для минимального влияния весовой функции на результат вычисления функции неопределенности необходимо, чтобы функция $V(\omega)$ была действительной. С другой стороны, ее временное представление также должно быть действительным. Исходя из свойств преобразования Фурье, заключаем, что функция $V(\omega)$ четная. Отсюда для весовой функции имеем

$$V(\omega) = \sqrt{|\omega|}. \quad (75)$$

С учетом (75) запишем соотношение, определяющее функцию неопределенности с весом $V(\omega)$:

$$R_V(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\alpha\omega) e^{i\omega\tau} \sqrt{|\omega|} d\omega. \quad (76)$$

Найдем временное представление ВШФН. Для этого необходимо определить преобразование Фурье от функции $\sqrt{|\omega|}$. Используя обобщенные функции [12], находим:

$$v(t) = F^{-1}\{\sqrt{|\omega|}\} = -\sqrt{2\pi} |t|^{-1.5}. \quad (77)$$

Запишем дуальное к (76) определение ВШФН во временной области:

$$R_V(\alpha, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int [s(t) * -\sqrt{2\pi} |t|^{-1.5}] s^* \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right) dt. \quad (78)$$

В квадратных скобках имеем обобщенную свертку [12], которую можно отнести к разновидности преобразования Ватсона.

Анализ результатов, получаемых при вычислениях ВШФН и ШФН, показывает, что для широкополосных сигналов весовая функция оказывает

слабое влияние на форму сечений ВШФН и ШФН. Последнее объясняется тем, что во временной области весовая функция имеет характер, близкий к δ -импульсу, а в спектральной — монотонно возрастающий. Таким образом, весовая функция выполняет роль "окна", которое подавляет частоты, близкие к нулевым, и практически не влияет на высокочастотные составляющие.

Предлагаемый подход к модернизации ШФН с целью исключения влияния формы сигнала на ее объем нетрудно обобщить на случай произвольной двухпараметрической группы преобразований вещественной прямой. В этом случае взвешенная ШФНГ, выраженная соответственно через частотное и временное представление исходных сигналов, имеет вид

$$\begin{cases} R_{GV}(\alpha, a) = \\ = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi} \int S_g(\omega) S_g^*(\alpha\omega) e^{i\omega L(a)} \sqrt{|\omega|} d\omega, \\ R_{GV}(\alpha, a) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_G s(t) * v_g(t) s^* \left[L^{-1} \left[\frac{L(t) - L(a)}{\alpha} \right] \right] \xi^{-1}(t) dt, \\ v_g(t) = F_g^{-1} \{ \sqrt{|\omega|} \}. \end{cases} \quad (79)$$

Необходимо отметить, что в понятие широкополосности, используемое выше, укладывается класс сигналов, не сводимый к узкополосным на группе преобразований, т. к. множество последних не покрывает все множество сигналов. Поэтому использование ВШФНГ для синтеза широкополосных сигналов и оценки их свойств, будет вполне оправданным.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ШФН И БИСПЕКТРОМ

Рассмотрим взаимосвязь между широкополосной функцией неопределенности и третьим смешанным моментом. Для этого воспользуемся определением ШФН [1]:

$$R(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_R S^*(f) S(\alpha f) e^{i2\pi\tau f} df. \quad (80)$$

Известно, что ШФН в определении (80) не удовлетворяет свойству самотрансформации и конечности объема тела неопределенности, что значительно отличает ее от классической трактовки ФН Вудворда и ограничивает использование ШФН в вопросах синтеза сигналов.

Принципиальная невозможность экстраполяции свойств узкополосной ФН на ШФН связана с фундаментальными отличиями их групповой структуры в области определения. Покажем, что

ШФН связана с третьим смешанным моментом и биспектром [7, 8]. Преобразуя выражение (80), получим

$$R(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_R S^*(e^{\ln(f)}) S(e^{\ln(\alpha f)}) e^{i2\pi(\exp(\ln(\tau f)))} df. \quad (81)$$

Введем обозначения: $v = \ln(f)$, $\xi_1 = \ln(\alpha)$, $\xi_2 = \ln(t)$. Тогда формула для вычисления ШФН будет иметь вид:

$$R(\xi_1, \xi_2) = e^{0.5\xi_1} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(v) S_1(v + \xi_1) V(v + \xi_2) e^v dv. \quad (82)$$

Представляя $\exp(v)$ как $\exp(0.5v)\exp(0.5)$, выражение (82) можно записать как

$$\begin{cases} R(\xi_1, \xi_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(v) e^{0.5v} S_1(v + \xi_1) e^{0.5(\xi_1 + v)} V(v + \xi_2) e^v dv, \\ R(\xi_1, \xi_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(v) F(v + \xi_1) V(v + \xi_2) dv, \end{cases} \quad (83)$$

где $V(v + \xi_2) = e^{i2\pi \exp(v + \xi_2)}$; $F^*(v) = S_1^*(v) e^{0.5v}$; $F(v + \xi_1) = S_1(v + \xi_1) e^{0.5(v + \xi_1)}$. Функция, определяемая с помощью выражения (83), является смешанным моментом третьего порядка (или по определению Н. Винера третьим семиинвариантом). Ее фурье-преобразование является комплексной величиной и называется биспектром (в данном случае смешанный биспектр) [7, 8]:

$$B(v_1, v_2) = \iint_R R(\xi_1, \xi_2) e^{-i2\pi(v_1\xi_1 + v_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (84)$$

Подставим в выражение (84) формулу (83). В результате получим эквивалентное определение смешанного биспектра $B(v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} B(v_1, v_2) &= \iiint_R F^*(v) F(v + \xi_1) V(v + \xi_2) \times \\ &\quad \times e^{-i2\pi(v_1\xi_1 + v_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 dv = \\ &= \int F^*(v) \left[\int F(v + \xi_1) e^{-i2\pi v_1\xi_1} d\xi_1 \right] \int V(v + \xi_2) \times \\ &\quad \times e^{-i2\pi v_2\xi_2} d\xi_2 dv = \\ &= \int S_1^*(v) \Phi(v_1) e^{i2\pi v v_1} W(v_2) e^{i2\pi v v_2} dv = \\ &= \Phi(v_1 + v_2) \Phi(v_1) \Phi(v_2); \\ \Phi(v_1) &= F\{S_1(v)\}, \quad W(v_2) = F\{V(v_1)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, для взаимного биспектра можно записать выражение

$$B(v_1, v_2) = \Phi(v_1 + v_2) \Phi(v_1) \Phi(v_2). \quad (85)$$

Используя выражение (85) можно ввести нормализованный эквивалент — функцию бикогерентности [8]:

$$\Gamma(v_1, v_2) = \frac{|B(v_1, v_2)|^2}{\Phi(v_1 + v_2) \Phi(v_1) \Phi(v_2)}. \quad (86)$$

Перед вычислением функции бикогерентности каждое из фурье-преобразований и каждый энергетический спектр в (86) должны быть оценены с помощью соответствующей весовой функции.

Таким образом, ШФН может быть представлена как смешанный биспектр. С точки зрения теории представлений такое соответствие следует из следующих соображений. ШФН является скрещенным произведением двух подгрупп, аддитивной и мультипликативной, которые действуют на носитель сигнала некоммутативно или могут быть сведены к действию линейной группы преобразований времени. Узкополосная функция неопределенности Вудворда реализуется на прямом произведении двух аддитивных подгрупп, действующих соответственно во временной и частотной областях и не сводимых к действию в одной области (во временной или частотной). Необходимо отметить, что имеет место соответствие между биспектральным представлением и тем, что разбиение линейной группы по нормальной подгруппе, образующее факторгруппу, изоморфно мультипликативной подгруппе.

Предположим, что в области определения сигнала действует двухпараметрическая группа преобразований G с элементом преобразования $g(\alpha, a)$ и существует изоморфизм между нормальной подгруппой линейной группы и нормальной подгруппой N группы G , устанавливаемый отображением $L(\cdot)$. Так как группы изоморфны, то изоморфны и элементы преобразования этих групп, вследствие чего существует изоморфизм между факторгруппой линейной подгруппы и факторгруппой $G_g \setminus N$ по ее нормальной подгруппе (предположим, что это группа N с элементом преобразования $g(a)$). ШФН для G с учетом изоморфизма L можно записать в виде

$$R(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_R S_N^*(f) S_N(\alpha f) e^{i2\pi L(a)} df. \quad (87)$$

$$S_N(f) = \int_N s(t) e^{i2\pi L(t)f} \xi^{-1}(t) dt. \quad (88)$$

где $S_N(f)$ — преобразование Фурье на подгруппе N , являющейся нормальной в группе G .

С учетом последнего выражения можно записать функцию неопределенности как третий момент на подгруппе N :

$$R(\xi_1, \xi_2) = \int F_N^*(v) F_N(v + \xi_1) V_N(v + \xi_2) dv, \quad (89)$$

где $\xi_1 = \ln(\alpha)$, $\xi_2 = \ln[\ln(a)]$, $v = \ln(f)$.

Соответственно функция бикогерентности для группы, изоморфной линейной группе, может быть записана в виде

$$\Gamma_N(v_1, v_2) = \frac{|B_N(v_1, v_2)|^2}{\Phi_N(v_1 + v_2) \Phi_N(v_1) \Phi_N(v_2)}. \quad (90)$$

ВЫВОДЫ

Известно [8], что биспектры являются полезным инструментом исследования нелинейных процессов и систем. Понятие нелинейности системы трактуется как появление новых спектральных составляющих на выходе системы. В этом смысле, эффект Доплера можно рассматривать как проявление нелинейности канала распространения, а использование биспектров вполне правомочно.

Установленная связь между третьим смешанным моментом и широкополосной функцией неопределенности представляет собой не только интересный теоретический результат, но и дает конструктивный способ вычисления ШФН. Предложенный метод аппроксимации некоммутативной группы прямым произведением двух коммутативных групп может быть применен для анализа алгебры Клиффорда, широко используемой в представлении результатов современных физических исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бовбель Е.И. и др. Некоторые свойства широкополосной функции неопределенности для детерминированных и стохастических сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. 1977. № 6. С. 33–55.
2. Вакман Д.Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации. М.: Сов. радио, 1965. 304 с.
3. Козн Л. Время-частотные распределения. Обзор //

ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 10. С. 72–78.

4. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Теория и применение. М.: Сов. радио, 1971. 565 с.
5. Фрэнкс Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974. 341 с.
6. Смоктий О.И., Фабриков В.А. Методы теории систем и преобразований в оптике. Л.: Наука, 1989. 308 с.
7. Бутырский Е.Ю. Способ вычисления широкополосной функции неопределенности // 1-я Санкт-Петербургская Международная конференция "Конверсионные технологии гидроакустики" ГА-94. Тезисы докладов. СПб., 1994.
8. Канасевич Э.Р. Анализ временных последовательностей в геофизике. М.: Недра, 1986. 399 с.
9. Бутырский Е.Ю. Функция неопределенности сигналов на группе преобразований // 50-я Научно-техническая конференция НТОРЭС им. А.С. Попова "Актуальные проблемы развития радиотехники и связи". СПб., 1995.
10. Сапрыкин В.А., Рокотов С.П. Теория гидроакустики и цифровая обработка сигналов. Петродворец: ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1991. 415 с.
11. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. М.: МГУ, 1963. 366 с.
12. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. (Обобщенные функции, вып. 1). М.: Физматгиз, 1953. 470 с.

Санкт-Петербургское отделение Института химфизики им. Н.Н. Семенова РАН (Бутырский Е.Ю., Чалкин В.П.)

Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики (Кувалдин И.А.)

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (Тарханов В.И.)

Контакты: Чалкин Владимир Петрович,
cvp2008@mail.ru

Материал поступил в редакцию 8.12.2009.

GENERALIZED UNCERTAINTY FUNCTION**Eu. Yu. Butyrsky¹, I. A. Kuvaldin², V. I. Tarkhanov³, V. P. Chalkin¹**¹*St. Petersburg Branch of Institute for Problems of Chemical Physics RAS*²*St. Petersburg State University for Service and Economics*³*St. Petersburg State Polytechnic University*

One of the basic concepts of signals processing theory, lying in the grounds of signals filtering and detection theory, is an uncertainty function. It is broadly used for signal classes selection in communications, radiolocation and underwater acoustics. In this article it is generalized to build a wideband signal uncertainty function, defined on a two-parametric group of transformations. Some properties and general conditions of its approximation by a narrowband uncertainty function are considered.

Keywords: ambiguity function, two-parametric transformation group, signal resolution, uncertainty relation

Оригинал-макет подготовлен
Беленковым В.Д.

Лицензия ИД № 02980 от 06 октября 2000 г.
Подписано к печати 25.05.2010 г. Формат 60 × 90 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 10.3. Тираж 100 экз. Тип. зак. № 270. С 96

Санкт-Петербургская издательская фирма "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1
E-mail: main@nauka.nw.ru
Internet: www.naukaspb.spb.ru

Первая Академическая типография "Наука", 199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12