

УДК 534.131.2

© Б. П. Шарфарец

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАПИЛЛЯРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ. II. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе проводятся численные эксперименты, направленные на проверку составленного автором алгоритма расчета собственных частот упругой цилиндрической трубки конечной длины, заполненной жидкостью. На торцах трубки и на ее внешней боковой поверхности поставлены однородные краевые условия Дирихле. Проверена работоспособность алгоритма, приведены примеры расчетов. Показано, что не всегда справедлива гипотеза Лява о пренебрежимости напряжений на торцах упругой трубки при отсутствии напряжения на боковой поверхности трубки, длина которой много больше ее радиуса. На примерах получена степень возмущения собственных частот при пренебрежении упругими свойствами трубки.

Кл. сл.: резонанс, собственные частоты колебания, собственные функции, собственные значения

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была теоретически рассмотрена задача о собственных колебаниях наполненного жидкостью упругого цилиндрического капилляра конечной длины. В настоящей работе рассматриваются вычислительные аспекты этой проблемы. В силу невозможности удовлетворения однородных краевых условий на торцах упругой трубки при выбранном методе решения задачи [1, 2] производится оценка величины напряжений на торцах трубки на собственных частотах системы. Рассматривается вопрос о степени различия собственных частот для двух решений, полученных в [1]: азимутально-симметричном и азимутально-антисимметричном (cos- и sin-решениях). Кроме того, производится сравнение результатов в двух случаях: при учете сдвиговых волн в трубке и при их игнорировании.

Согласно полученному ранее автором в [1] алгоритму, необходимо численно на конкретных примерах оценить его адекватность и работоспособность, степень справедливости сделанных ранее допущений.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Напомним вначале некоторые факты из [1]. Система краевых условий порождает две системы по шесть линейных уравнений для определения коэффициентов A, B, A_1, B_1, A_3, B_3 , зависящих от частоты ω , с помощью которых вычисляются

функции, характеризующие поле напряжений и смещений в поллой упругой трубке:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A^c \\ B^c \\ A_1^c \\ B_1^c \\ A_3^c \\ B_3^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_m(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_w \omega^2} Z_m'(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

для cos-решения и

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A^s \\ B^s \\ A_1^s \\ B_1^s \\ A_3^s \\ B_3^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_m(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_w \omega^2} Z_m'(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

для sin-решения. Здесь $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ — квадратные матрицы, члены которых также зависят от частоты.

Далее рассматривается функция $D(\omega)$ (назовем ее дисперсионной)

$$D^c(\omega) = \left\{ -\lambda k_l^2 f^c + \right. \\ \left. + 2\mu \left[f^c \mp \frac{m}{r^2} g_3^c - \xi_k g_1^c \pm \frac{m}{r} g_3^c \right] \right\} \Big|_{r=a}, \quad (3)$$

нули которой и определяют собственные частоты рассматриваемой системы. Двойные индексы и знаки соответствуют cos- и sin-решениям (все обозначения см. в [1]).

В соответствии с полученными в [1] результатами в пакете Mathematica 7 была составлена программа, позволяющая вычислять дисперсионные и другие функции, фигурирующие в работе. Следует сразу отметить, что итоговое время расчета дисперсионных функций было достаточно велико, несмотря на хорошее быстродействие компьютера (тактовая частота процессора 2.5 ГГц). Так, для расчета 40 точек значений дисперсионной функции затрачивалось около 2 часов.

В качестве модельного примера ниже рассмотрена реально используемая в опытах однородная, изотропная стеклянная трубка, заполненная жидкостью. Внутренний радиус трубки $a_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, внешний радиус $a = 9 \cdot 10^{-4}$ м, длина трубки $l = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Плотность жидкости $\rho_1 = 1000$ кг/м³, плотность стекла $\rho_2 = 2500$ кг/м³. Скорость в жидкости $c_1 = 1500$ м/с, скорость продольных волн в стекле принята $c_l = 5500$ м/с, скорость сдвиговых волн $c_t = 3000$ м/с. При данных параметрах трубки

коэффициенты Ламе равны $\lambda = 30.625 \cdot 10^9$, $\mu = 22.5 \cdot 10^9$.

Вначале была проведена косвенная проверка математической модели с помощью ее сведения к ранее изученному случаю жидкой трубки [3]. Для этого параметр Ламе μ был принят равным нулю $\mu = 0$. Ниже на рис. 1 представлен пример поведения дисперсионных функций $D^c(\omega)$, $D^s(\omega)$ из (3), а также дисперсионной функции $D(\omega)$, соответствующей жидкой трубке и исследованной в [3], при изменении частоты. Принято: $m=0$ (штриховая кривая) и $m=1$ (сплошная кривая) при $k=10$. Видно, что все кривые абсолютно совпали. На рис. 2 представлено поведение давления в жидкости и напряжения с обратным знаком в упругой трубке на резонансных частотах в зависимости от радиуса (назовем их собственными радиальными функциями), $m=0$ (штриховая кривая, частота 534.6708 кГц) и $m=1$ (сплошная кривая, частота 1.100018 МГц), $k=10$. Как видно, вновь полное совпадение результатов счета для жидкой и упругой трубок при $\mu = 0$.

Остановимся далее на вопросе различия собственных частот для c - и s -случаев по терминологии работы [1]. Несмотря на различие матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ (см. выражения (41), (42) в [1]), нули дисперсионных функций $D^c(\omega)$ и $D^s(\omega)$ из (3), определяющие собственные частоты, должны совпадать.

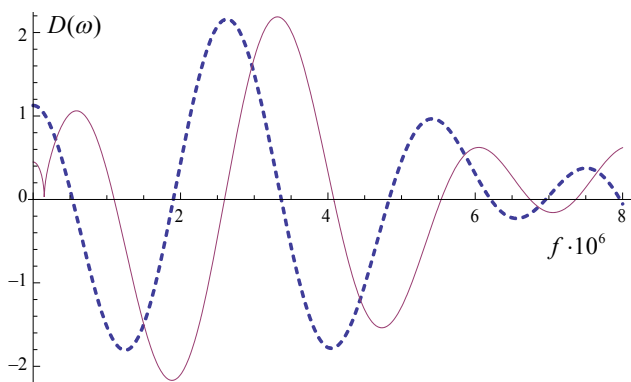


Рис. 1. Зависимость дисперсионной функции от частоты.

— — — — $m=0$; ————— $m=1$; $\mu=0$

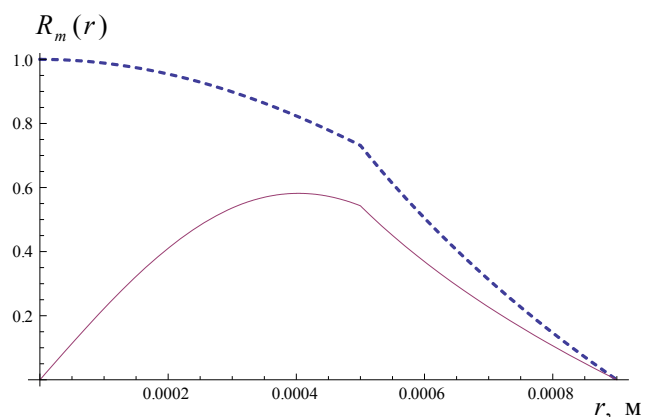


Рис. 2. Радиальная собственная функция.

— — — — $m=0$; ————— $m=1$; $\mu=0$

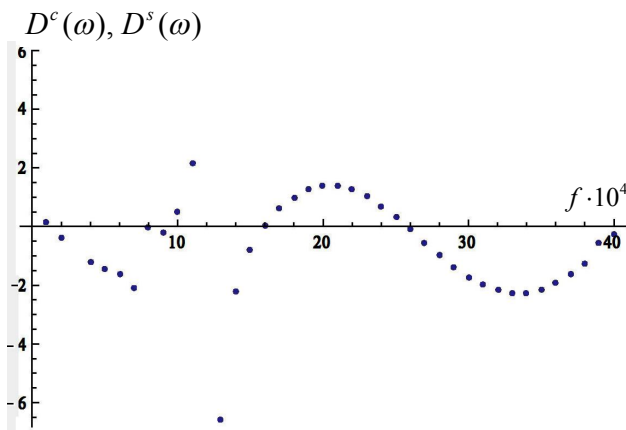


Рис. 3. Зависимость дисперсионной функции от частоты

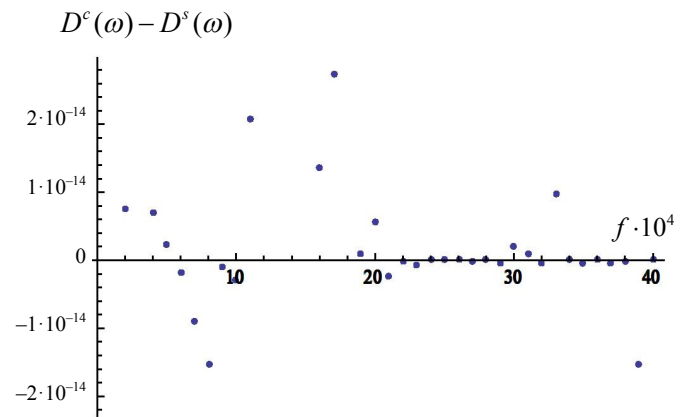


Рис. 4. Зависимость разности дисперсионных функций от частоты

Положение на частотной оси нулей дисперсионной функции $D(\omega)$

Характеристика	Номер п/п						
	1	2	3	4	5	6	7
Частота, 100 кГц (упругая трубка)	1.17621	1.5	7.97969	9.36495	15.96363	25.77691	40.46412
Частота, 100 кГц (жидкая трубка)	—	1.5	—	11.00019	—	25.97559	40.80451

Это следует из физических соображений. В частности, хотя бы из того, что при каждом фиксированном значении m s -решение трансформируется в c -решение при вращении системы координат вокруг оси OZ . Ясно, что такая фундаментальная характеристика системы, как собственная частота, не может зависеть от выбора системы координат. К этим же соображениям приводит и возможность выбора азимутального множителя в экспоненциальном виде $e^{\pm im\varphi}$, с входящими в него сразу и $\cos m\varphi$, и $\sin m\varphi$, которым, понятно, отвечают соответствующие общие собственные частоты. К такому же выводу должен был бы привести детальный анализ специальных свойств матричных уравнений (1) и (2). Хотя матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ отличаются, но физика процесса устраивает матричные уравнения таким образом, чтобы нули дисперсионных функций (3) совпадали.

Численный эксперимент полностью подтвердил справедливость этих соображений. На рис. 3 представлены зависимости дисперсионных функций $D^c(\omega)$ и $D^s(\omega)$ из (3) от частоты. Расчеты ввиду большого времени счета были проведены по точкам; были приняты значения $m = 1$, $k = 10$. Как

видно из рис. 3, значения функций $D^c(\omega)$ и $D^s(\omega)$ в точках слились. На рис. 4 представлена зависимость от частоты их разности, которая имеет порядок точности численных расчетов. Были проведены расчеты при других параметрах m и k при различных частотах: различия между дисперсионными функциями оставались порядка $O(10^{-15} - 10^{-14})$. Таким образом, несмотря на различие матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$, дисперсионные функции $D^c(\omega)$ и $D^s(\omega)$ равны, что и подтверждает равенство собственных частот для c - и s -случаев.

Более подробное исследование дисперсионной кривой на рис. 3 выявило нули в диапазоне до 4 МГц, представленные в таблице. Для сравнения в нижней строке таблицы обозначены нули дисперсионной функции при $\mu = 0$ (сдвиговая составляющая не учитывается, см. рис. 1, сплошная кривая). Как видно из таблицы, в случае упругой трубки возникают дополнительные собственные частоты, вызванные возникновением в упругом теле поверхностных волн различной природы. Отметим, что в обоих случаях присутствует собственная частота 150 кГц, на которой колебания

имеют нулевую амплитуду [4]. Эта частота соответствует ситуации, когда волновое число в жидкости точно равно продольному собственному значению

$$\frac{\omega}{c_1} = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow f = \frac{kc_1}{2l}; \quad (4)$$

в данном эксперименте $k=10$, f — частота.

На рис. 5–11 приведены собственные радиальные функции в случае упругой трубки, соответствующие собственным частотам с 1 по 7 из таблицы (верхняя строка). Как видно (рис. 6), при выполнении условия (4) собственная радиальная

функция равна в этом случае нулю тождественно и для упругой трубки (природа этого для жидкой трубки обсуждалась в [4]).

В рассмотренном диапазоне частот в случае пренебрежения сдвиговыми волнами в системе фиксируется только четыре собственные частоты из семи, отмеченных в случае упругой трубки. Причем одна из них точно совпадает с частотой $1.5 \cdot 10^5$ Гц для тождественно равной нулю собственной радиальной функции. Три другие можно соотнести с 4, 6 и 7 частотами для упругой трубки. Собственные радиальные функции представлены в этом случае соответственно на рис. 6, 12–14.

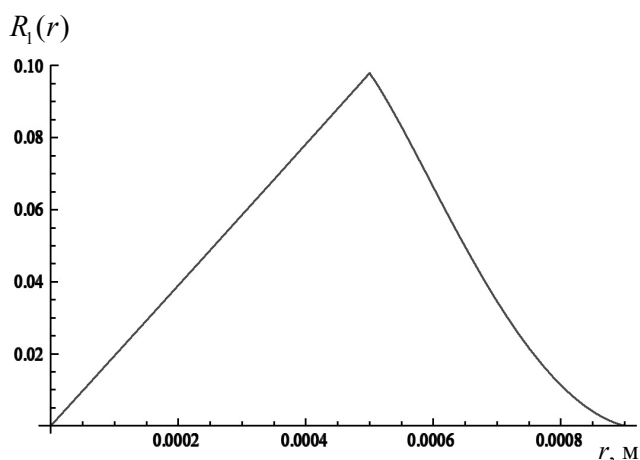


Рис. 5. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 1

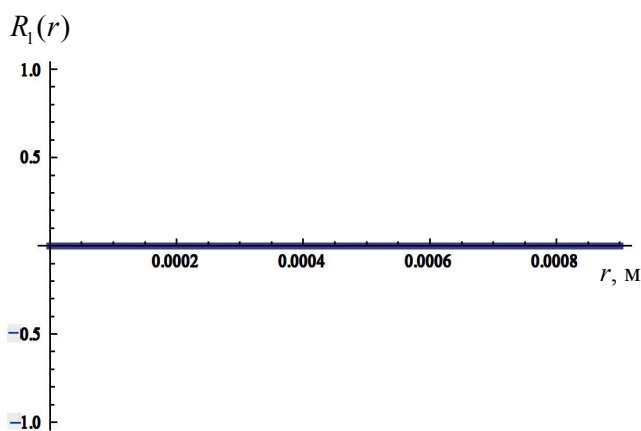


Рис. 6. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 2

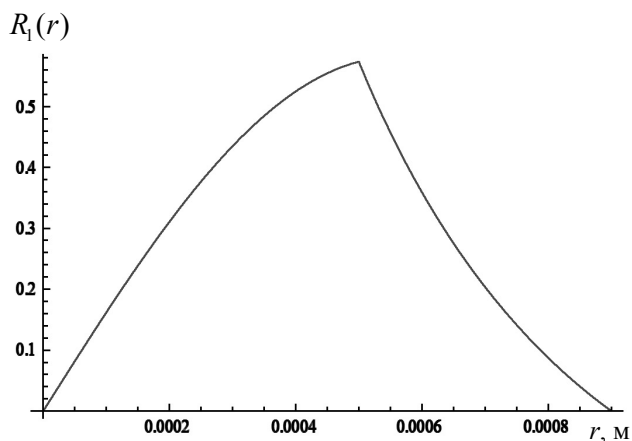


Рис. 7. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 3

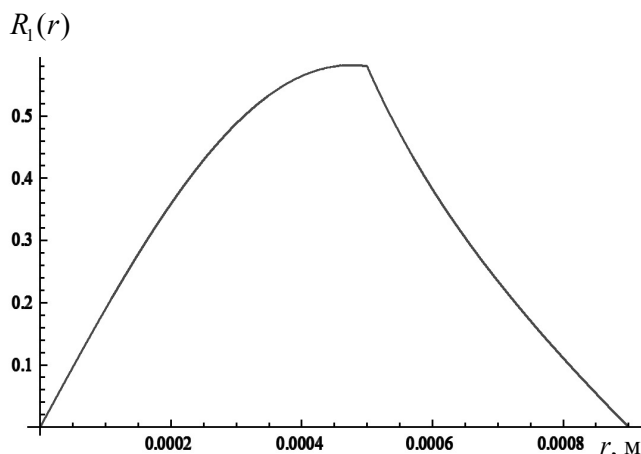


Рис. 8. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 4

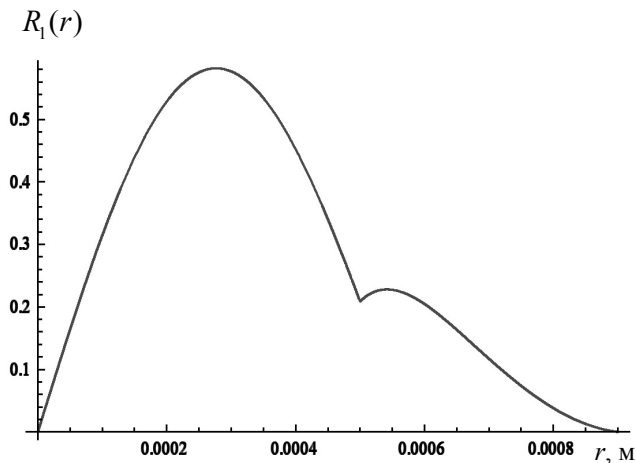


Рис. 9. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 5

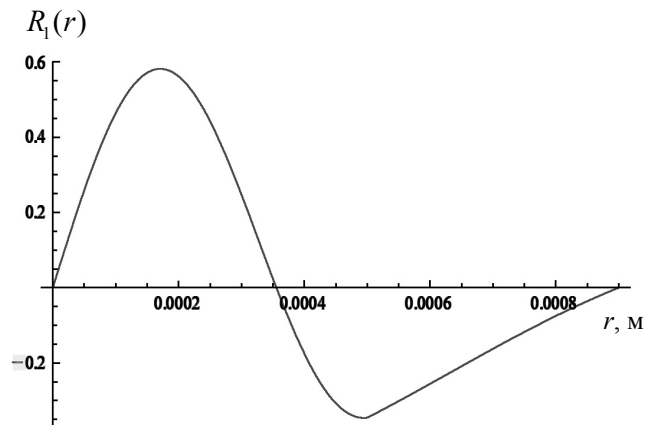


Рис. 10. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 6

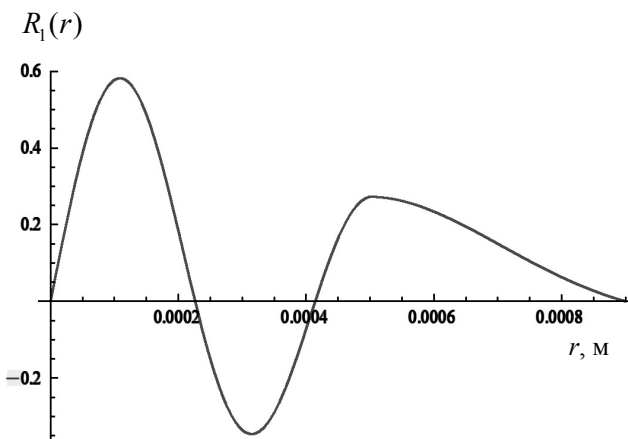


Рис. 11. Радиальная собственная функция $m=1$, частота № 7

Из таблицы видно, что соответствующие резонансные частоты в жидкой трубке выше, чем в упругой, и превышают последние от 20 кГц для шестой частоты до примерно 170 кГц для четвертой.

Описанный в [1] алгоритм расчета собственных частот ограниченной по длине цилиндрической трубки по сути дела строго справедлив для бесконечной по длине трубки на дискретном множестве продольных волновых чисел, т. к. применяемая дисперсионная функция не зависит от краевых условий на торцах трубки. Кроме того, в [1] показано, что точное удовлетворение однородных краевых условий на торцах ограниченной трубки невозможно. Остается надеяться только на гипотезу

Лява [2] о том, что если длина ограниченного цилиндра много больше его диаметра, то при нулевых напряжениях на боковой поверхности, будут пренебрежимо малы и напряжения на свободных его торцах.

В настоящей работе в качестве примера была проверена гипотеза Лява для собственных частот упругой трубки, представленных в таблице. При этом значимыми для торца являются радиальные составляющие напряжений σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$, определяемые выражениями [1, (31, 33)]. Напряжение σ_{zz} равно нулю на торцах трубки, по определению. В Приложении на рис. П1–П6 в их а-частях представлены радиальные составляющие напряжений σ_{rz} , а в б-частях — радиальные составляющие напряжений $\sigma_{z\varphi}$ в зависимости от $r \in [a_1, a]$ соответственно для частот 1, 3–7 из таблицы. На а-частях этих рисунков с- и s-составляющие совпали, поэтому представлены одной кривой.

Будем эти кривые сравнивать с радиальными собственными функциями для тех же частот 1, 3–7, изображенными на рисунках 5, 7–11. Сравнение показывает, что пренебрежимо малы напряжения на торцах только на частотах 6 и 7 таблицы, на частотах 3–5 пренебрежимо малы на торцах напряжения σ_{rz} , напряжением $\sigma_{z\varphi}$ здесь пренебречь нельзя. На частоте 1 велики оба напряжения σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$. Таким образом, в разобранных примерах следует ожидать, что по изложенной методике достаточно точно найдены собственные частоты 6 и 7, частоты 3–5 найдены приближенно. Значение частоты 1 нужно искать в рамках другого метода.

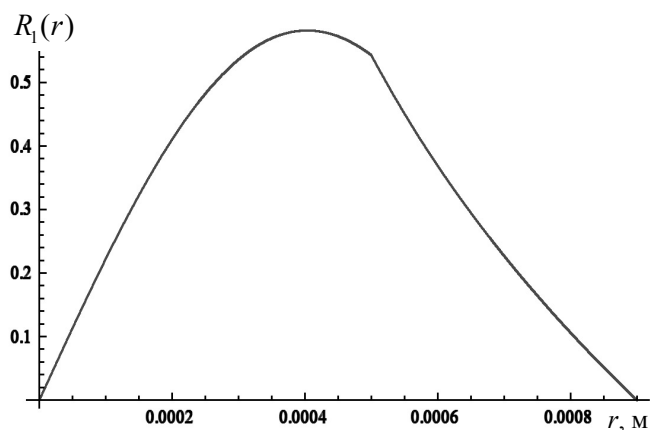


Рис. 12. Радиальная собственная функция $m=1$, $\mu=0$, частота № 4

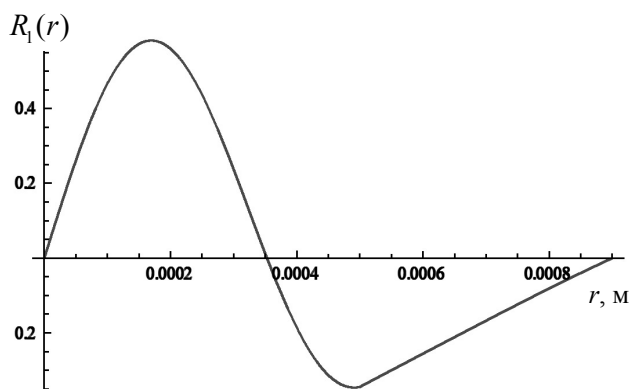


Рис. 13. Радиальная собственная функция $m=1$, $\mu=0$, частота № 6

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе проведены численные эксперименты, подтвердившие работоспособность изложенного в [1] алгоритма определения собственных частот системы "упругая трубка конечной длины, заполненная жидкостью". На конкретных примерах посчитаны собственные частоты. Показано, что метод имеет ограничения, связанные с тем, что гипотеза Лява о пренебрежимости напряжений на торцах трубки при большом отношении длины трубки к ее радиусу не всегда справедлива. Изложенный алгоритм можно применять для расчета собственных частот с учетом сделанных оговорок.

Для вычислений в работе использовался пакет "Mathematica-7", лицензия: L3259-7547.

Автор выражает благодарность Н.Н. Князькову за постановку проблемы.

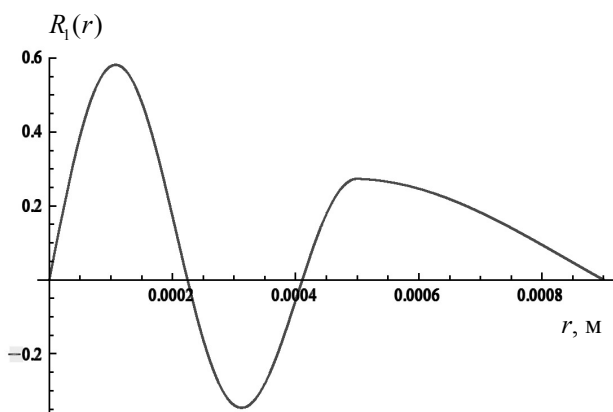
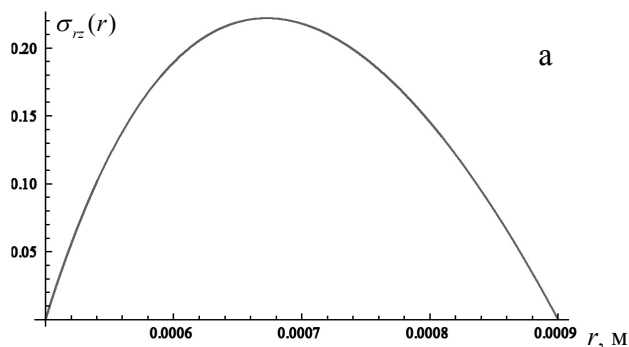
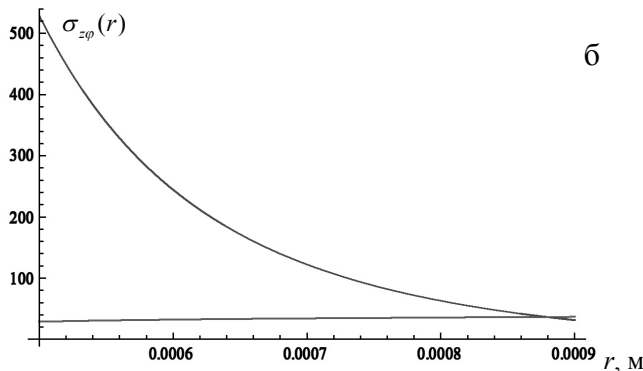


Рис. 14. Радиальная собственная функция $m=1$, $\mu=0$, частота № 7

ПРИЛОЖЕНИЕ



а



б

Рис. П1. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\phi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 1)

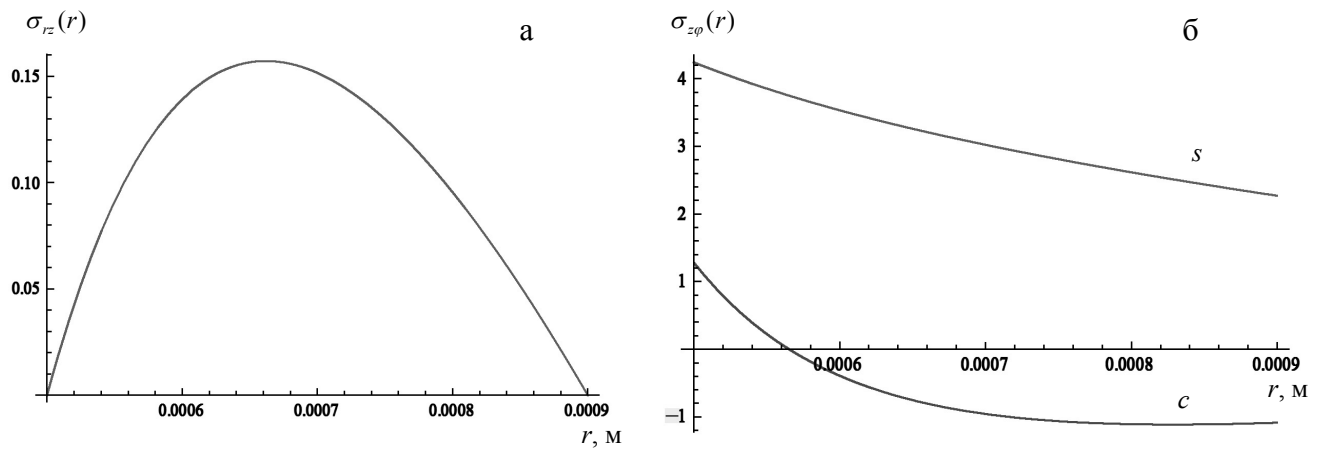


Рис. П2. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\phi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 3)

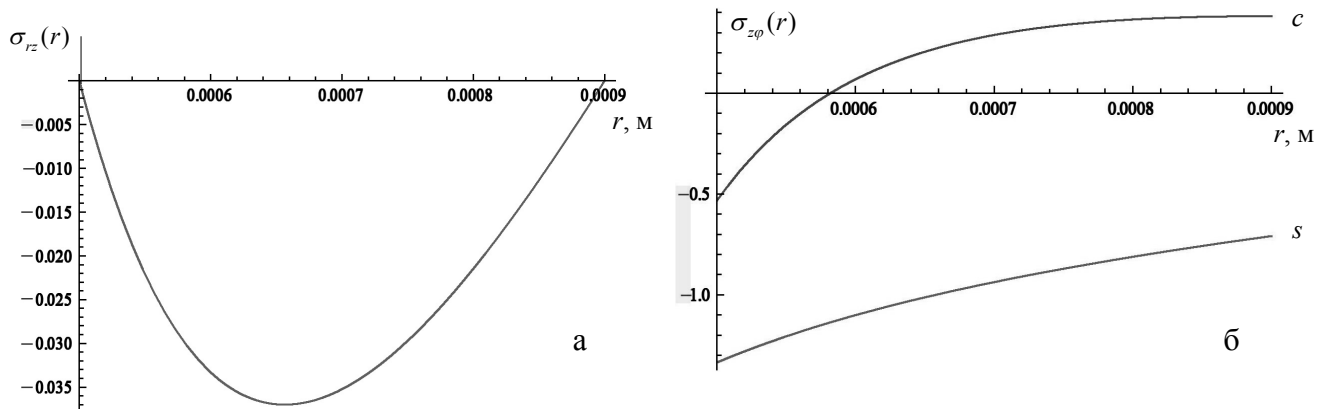


Рис. П3. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\phi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 4)

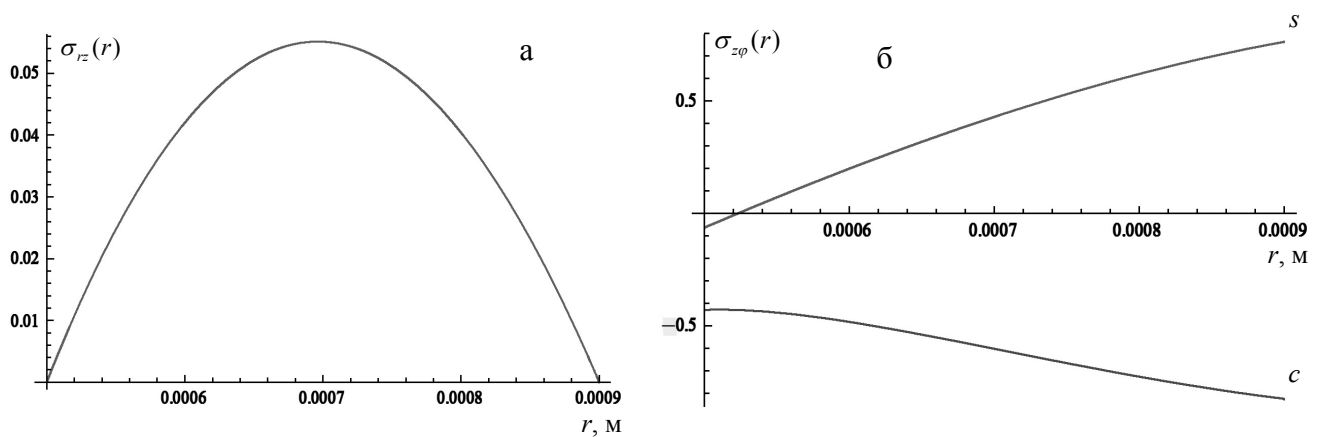


Рис. П4. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\phi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 5)

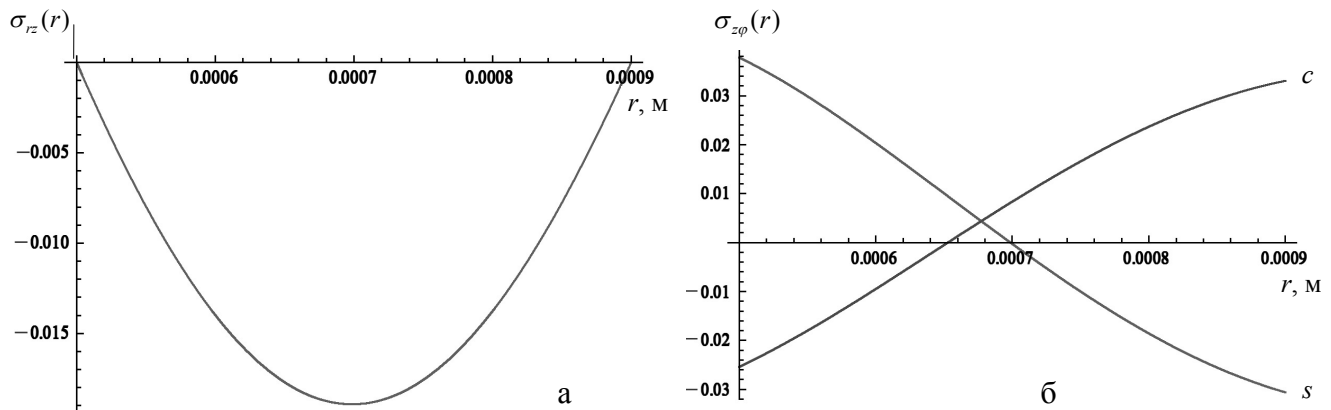


Рис. П5. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\varphi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 6)

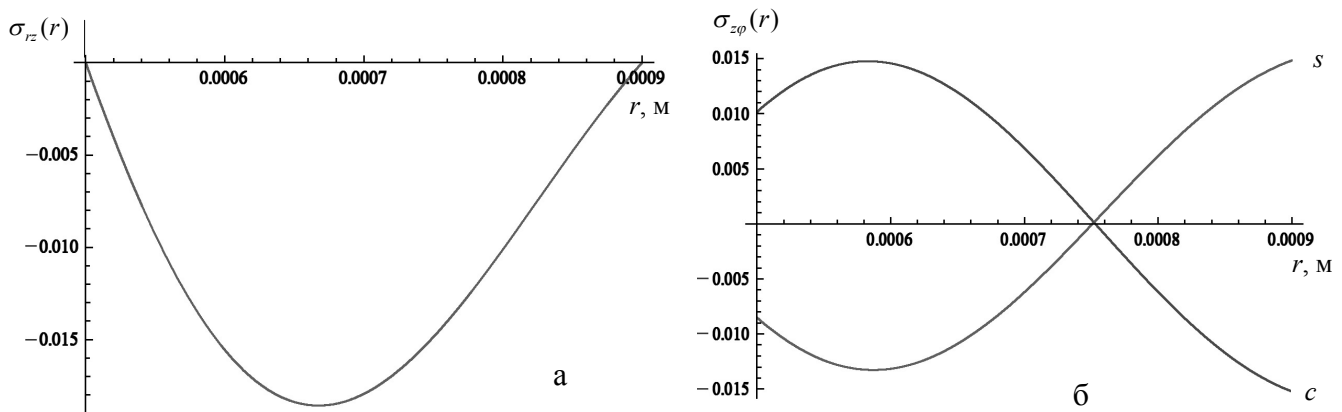


Рис. П6. Радиальная зависимость напряжения $\sigma_{rz}(r)$ (а) и $\sigma_{z\varphi}(r)$ (б) ($m=1$, частота № 7)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарфарец Б.П. Собственные колебания наполненного жидкостью упругого цилиндрического капилляра конечной длины. I. Теория // Здесь. С. 78–86.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Шарфарец Б.П. О собственных колебаниях жидкости в ограниченном цилиндре // Научное приборостроение. 2009. Т. 19, № 3. С. 21–27.
4. Шарфарец Б.П. О возможности возбуждения продольной стоячей волны в цилиндрическом ограниченном капилляре, заполненном жидкостью // Научное приборостроение. 2009. Т. 19, № 4. С. 76–82.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург*

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 1.11.2009.

EIGENFUNCTIONS OF THE FLUID CHARGED ELASTIC CYLINDRICAL CAPILLARY OF FINAL LENGTH. II. NUMERICAL EXPERIMENT

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

Numerical experiments intended for the check of the algorithm made by the author for calculation of natural frequencies of an elastic fluid filled cylindrical tube of final length were performed. At the end faces of the tube and on its exterior lateral surface Dirichlet uniform edge conditions were set. Working capacity of the algorithm was checked, examples of calculations are given. It is shown, that Lyav hypothesis on neglect of stress at end faces of an elastic tube in the absence of stress on a lateral surface of the tube, which length is much more than its radius, is not always valid. The degree of perturbation of natural frequencies at neglect of elastic properties of a tube was obtained.

Keywords: resonance, eigenfrequency of vibration, eigenfunctions, eigenvalues