

ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРИБОРЫ, МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 534.131.2

© Б. П. Шарфаренц

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СТОЯЧЕЙ
ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОГРАНИЧЕННОМ КАПИЛЛЯРЕ,
ЗАПОЛНЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ

В работе рассматривается задача о возможности получения плоских собственных колебаний жидкости в ограниченном цилиндрическом капилляре, заполненном жидкостью. Показано, что в случае, когда стенки цилиндра не абсолютно жесткие, получение стоячих плоских продольных волн невозможно. При росте плотности стенок цилиндра хорошее приближение к поршневой стоячей волне дает собственное колебание, соответствующее первой собственной частоте нулевой радиальной моды. Приведены примеры расчетов конкретных капилляров. Результаты работы могут быть использованы в случаях применения ультразвука применительно к задачам коагуляции частиц.

Кл. сл.: резонанс, собственные частоты колебания, собственные функции, собственные значения, плоское движение, плоские стоячие волны

ВВЕДЕНИЕ

Как известно из теории труб малого диаметра (см., например, работу [1], с. 328), любое волновое движение внутри трубы есть движение вдоль оси трубы при условии, что периметр поперечного сечения трубы значительно меньше длины волны звука в трубе. Кроме того, в бесконечной трубе продольная фазовая скорость дискретно зависит от частоты ([1], с. 428–430). Эта зависимость определяется совокупными поперечными свойствами трубы и жидкости в ней. Другое дело — ограниченная по длине труба. В этом случае вдоль оси трубы может дискретно устанавливаться счетное количество собственных продольных колебаний, зависящих от длины трубы, от краевых условий на ее концах и не зависящих от поперечных свойств трубы и жидкости в ней. Представляет интерес строгое изучение собственных колебаний внутри ограниченной трубки на низких частотах в случае длинноволнового приближения, когда длина волны в трубе больше или сравнима с поперечным периметром трубы. Отметим, что волнами в полом цилиндре, заполненном жидкостью, занимались, например, в работах [2–4].

В работе [5] была рассмотрена задача о собственных акустических колебаниях неоднородного цилиндра, состоящего из стеклянной трубки, заполненной жидкостью. При этом вычислялись только те резонансные частоты $\omega_{mk}^{(n)}$, которые обеспечивали действительные радиальные составляющие волнового вектора как в жидкости, так и в стенках капилляра. Математически это выражает-

ся неравенством

$$\omega_{mk}^{(n)} \geq \frac{k\pi}{l} c_{\max}, \quad (1)$$

где $c_{\max} = \max(c_1, c_2)$, c_1 , c_2 — скорость звука в жидкости и продольная скорость звука в стенке капилляра соответственно (в [5] полагалось, что сдвиговой скоростью в стенке капилляра можно

пренебречь); $\xi_k = \frac{k\pi}{l}$ — продольная составляющая волнового вектора, $k=1, 2, \dots$, l — длина трубки. В настоящей работе рассматриваются возможные собственные частоты, позволяющие радиальной составляющей волнового вектора быть мнимой, что означает возможность того, что горизонтальная составляющая волнового вектора превышает модуль последнего в капилляре (в рабочей жидкости и/или в стенках трубки). Такая ситуация возникает на низких частотах, т. е. в случаях, когда возможно плоское продольное движение в капилляре.

В работе изучается возможность возникновения в ограниченном по длине капилляре плоских продольных стоячих волн.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

На основе полученных в работе [5] выражений при фиксированных значениях продольной составляющей волнового вектора изучается возможность появления собственных колебаний на частотах, когда волновое движение в трубке можно

считать плоским. Для этого полученная в работе [5] техника распространяется в область низких частот

$$\omega_{mk}^{(n)} \leq \frac{k\pi}{l} c_{\min}. \quad (2)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Вначале приведем некоторые факты из работы [5], которые понадобятся для решения поставленной проблемы.

Пусть дан круговой кольцевой цилиндр, высотой l , внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом a , состоящий из некоторого материала плотностью ρ_2 и скоростью продольных волн c_2 . При этом полагаем, что сдвиговыми волнами в стенках кольцевого цилиндра можно пренебречь. Внутри кольцевого цилиндра находится основная жидкость с постоянной плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 . На границах цилиндра справедливы однородные условия Дирихле. Решение задачи на собственные колебания описанного цилиндра сводится к решению следующей задачи на собственные значения:

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{mk}(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R_{mk}(r) - \left(\frac{m^2}{r^2} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right) R_{mk}(r) + \frac{\lambda}{c^2(r)} R_{mk}(r) = 0, \quad (3)$$

$$R_{mk}(0) < \infty, \quad R_{mk}(a) = 0, \quad (4)$$

которая распадается на следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{1mk}(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R_{1mk}(r) - \frac{m^2}{r^2} R_{1mk}(r) + \left(\frac{\lambda}{c_1^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right) R_{1mk}(r) = 0, \quad r \in [0, a_1]; \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{2mk}(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R_{2mk}(r) - \frac{m^2}{r^2} R_{2mk}(r) + \left(\frac{\lambda}{c_2^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right) R_{2mk}(r) = 0, \quad r \in [a_1, a]. \quad (6)$$

Искомой является система собственных значений $\{\lambda_{mk}^{(n)}\}$ и функций $R_{mk}^{(n)}(\lambda_{mk}^{(n)} r)$. Здесь $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Собственные частоты равны

$$\omega_{mk}^{(n)} = \sqrt{\lambda_{mk}^{(n)}}. \quad (7)$$

Решения уравнений (5), (6) с учетом граничных условий (4) равны

$$R_{1mk}(r) = J_m(\sigma_1 r), \quad \sigma_1^2 = \frac{\lambda}{c_1^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad (8)$$

$$r \in [0, a_1];$$

$$R_{2mk}(r) = C_1 J_m(\sigma_2 r) + C_2 N_m(\sigma_2 r), \quad \sigma_2^2 = \frac{\lambda}{c_2^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad r \in [a_1, a]. \quad (9)$$

Постоянные C_i , $i = 1, 2$ находятся из условий сопряжения на границе $r = a_1$ [5] и равны

$$C_1 = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_1 J_m(\sigma_1 a_1) (N_m(\sigma_2 a_1))' - \rho_2 (J_m(\sigma_1 a_1))' N_m(\sigma_2 a_1)}{J_m(\sigma_2 a_1) (N_m(\sigma_2 a_1))' - N_m(\sigma_2 a_1) (J_m(\sigma_2 a_1))'}, \quad (10)$$

$$C_2 = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_2 (J_m(\sigma_1 a_1))' J_m(\sigma_2 a_1) - \rho_1 (J_m(\sigma_2 a_1))' J_m(\sigma_1 a_1)}{J_m(\sigma_2 a_1) (N_m(\sigma_2 a_1))' - N_m(\sigma_2 a_1) (J_m(\sigma_2 a_1))'}.$$

При поиске собственных частот в работе [5] рассматривался только случай $\sigma_1^2 \geq 0$ и $\sigma_2^2 \geq 0$. В нашем случае необходимо рассмотреть как положительные, так и отрицательные значения величин σ_1^2 и σ_2^2 . В случае, если $\sigma_1^2 < 0$, решением уравнения (5), конечным при $r = 0$, является функция [6]

$$R_{1mk}(r) = I_m(\tau_1 r), \quad \tau_1 = i\sigma_1, \quad r \in [0, a_1]; \quad (11)$$

при $\sigma_2^2 < 0$ решение уравнения (6) может быть представлено в виде

$$R_{2mk}(r) = \alpha I_m(\tau_2 r) + \beta K_m(\tau_2 r), \quad \tau_2 = i\sigma_2, \quad r \in [a_1, a]. \quad (12)$$

Здесь I_m , K_m — модифицированные функции Бесселя; α , β — соответствующие коэффициенты, позволяющие сопрягать решения задач (5), (6) согласно краевым условиям

$$R_{1mk}(a_1) = R_{2mk}(a_1), \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial R_{1mk}}{\partial r} \Big|_{r=a_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial R_{2mk}}{\partial r} \Big|_{r=a_1}. \quad (13)$$

Если предположить, что $c_1 < c_2$, то возможны ситуации, показанные в таблице.

Аналитические решения системы уравнений (5, 6)

Интервал по частоте	Решения уравнений (5), (6)
$\omega < \xi_k c_1$	$I_m(\tau_1 r); C_{11} I_m(\tau_2 r) + C_{12} K_m(\tau_2 r)$
$\xi_k c_1 < \omega < \xi_k c_2$	$J_m(\sigma_1 r); C_{21} I_m(\tau_2 r) + C_{22} K_m(\tau_2 r)$
$\omega > \xi_k c_2$	$J_m(\sigma_1 r); C_{31} J_m(\sigma_2 r) + C_{32} K_m(\sigma_2 r)$

Очевидно, что выражение (10) определяет коэффициенты C_{31} и C_{32} в формулах в таблице. Ниже приведены оставшиеся коэффициенты:

$$C_{11} = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_1 I_m(\tau_1 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - \rho_2 (I_m(\tau_1 a_1))' K_m(\tau_2 a_1)}{I_m(\tau_2 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - K_m(\tau_2 a_1) (I_m(\tau_2 a_1))'}, \quad (14)$$

$$C_{12} = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_2 (I_m(\tau_1 a_1))' I_m(\tau_2 a_1) - \rho_1 (I_m(\tau_2 a_1))' I_m(\tau_1 a_1)}{I_m(\tau_2 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - K_m(\tau_2 a_1) (I_m(\tau_2 a_1))'},$$

$$C_{21} = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_1 J_m(\sigma_1 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - \rho_2 (J_m(\sigma_1 a_1))' K_m(\tau_2 a_1)}{I_m(\tau_2 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - K_m(\tau_2 a_1) (I_m(\tau_2 a_1))'}, \quad (15)$$

$$C_{22} = \frac{1}{\rho_1} \times \frac{\rho_2 (J_m(\sigma_1 a_1))' I_m(\tau_2 a_1) - \rho_1 (I_m(\tau_2 a_1))' J_m(\sigma_1 a_1)}{I_m(\tau_2 a_1) (K_m(\tau_2 a_1))' - K_m(\tau_2 a_1) (I_m(\tau_2 a_1))'}.$$

РАЗБОР ПРИМЕРОВ

В качестве примера ниже рассмотрен реально используемый в опытах стеклянный капилляр, заполненный водой. Внутренний радиус трубки $a_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, внешний радиус $a = 9 \cdot 10^{-4}$ м, длина трубки $l = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Плотность воды $\rho_1 = 1$, плотность стекла $\rho_2 = 2.5$. Скорость волны в воде $c_1 = 1500$ м/с, скорость продольных волн в стекле принята $c_2 = 5500$ м/с.

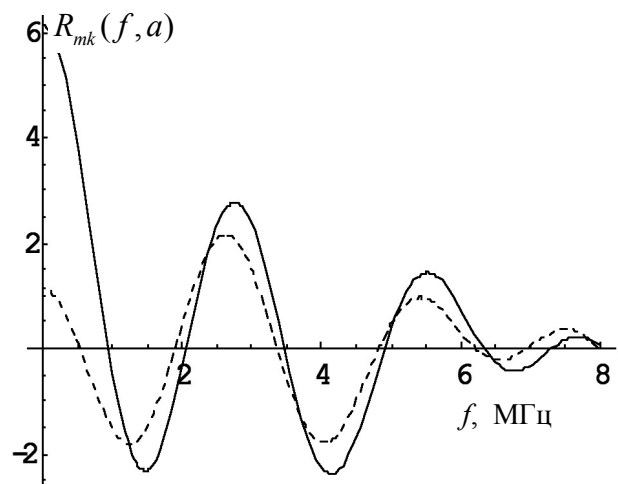


Рис. 1. Зависимость значения функции $R_{mk}(f, a)$ в точке $r = a$ от частоты. $m = 0, k = 10$ — штриховая линия; $m = 0, k = 50$ — сплошная линия

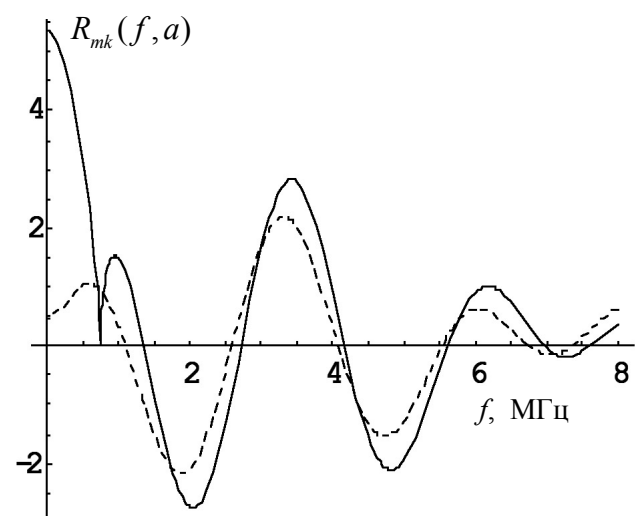


Рис. 2. Зависимость значения функции $R_{mk}(f, a)$ в точке $r = a$ от частоты ($m = 1, k = 10$ — штриховая линия; $m = 1, k = 50$ — сплошная линия)

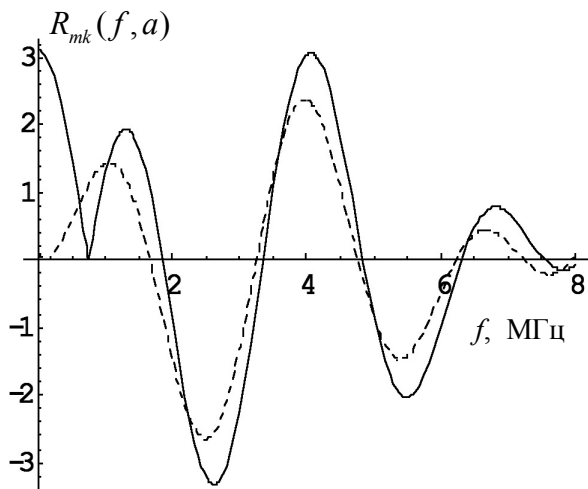


Рис. 3. Зависимость значения функции $R_{mk}(f, a)$ в точке $r = a$ от частоты ($m = 2$, $k = 10$ — штриховая линия; $m = 2$, $k = 50$ — сплошная линия)

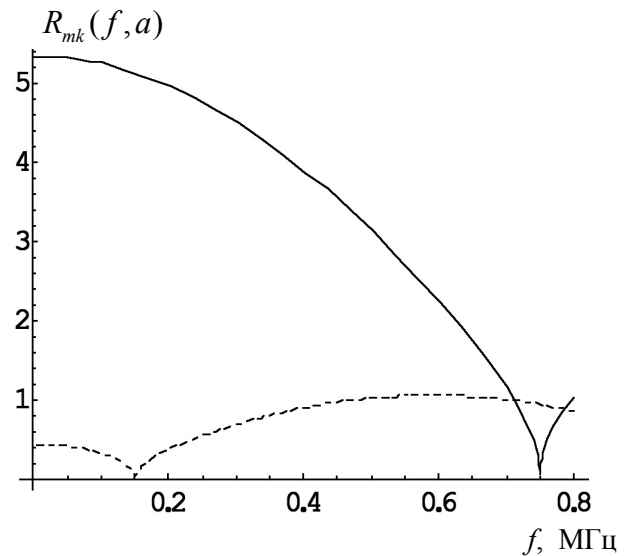


Рис. 4. Начальный участок графиков из рис. 2

На рис. 1–3 представлено поведение решения (9) или (12) при $r = a$ в зависимости от круговой частоты f для $m = 0, 1, 2$ соответственно. Частота менялась в диапазоне $f \in [0, 8]$ МГц. На каждом графике представлены случаи $k = 10$ (штриховая линия) и $k = 50$ (сплошная линия). Нули этих графиков соответствуют собственным частотам. Собственные частоты для нулевой поперечной моды при $\omega < \xi_{10}c_1$ и $\omega < \xi_{50}c_1$ отсутствуют (см. рис. 1). Однако на графиках для $m = 1, 2$ (рис. 2, 3)

наблюдаются нули при $k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \xi_k$, т. е. в случае,

когда волновое число в жидкости в точности равно корню квадратному из соответствующего продольного собственного значения. На рис. 4–5 дана более подробная версия поведения графиков на

рис. 2, 3 для $m = 1, 2$ в окрестностях $k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \xi_k$,

$k = 10, 50$ (не путать волновое число в жидкости k_1 и номер продольной собственной функции k).

Нули равны в точности частотам образования продольной плоской стоячей волны с числом узлов $k + 1$, как если бы боковых границ трубки не существовало, в частности нули на рис. 4, 5 соответствуют $f_{k=10} = 150$ кГц, $f_{k=50} = 750$ кГц. Модельные исследования показывают, что при произвольном $m > 0$ на частотах $f_{k=10} = 150$ кГц (для $k = 10$) и $f_{k=50} = 750$ кГц (для $k = 50$) решения (9) или (12) при $r = a$ равны нулю. Это означает, что $f_{k=10}$ и $f_{k=50}$ являются собственными частотами.

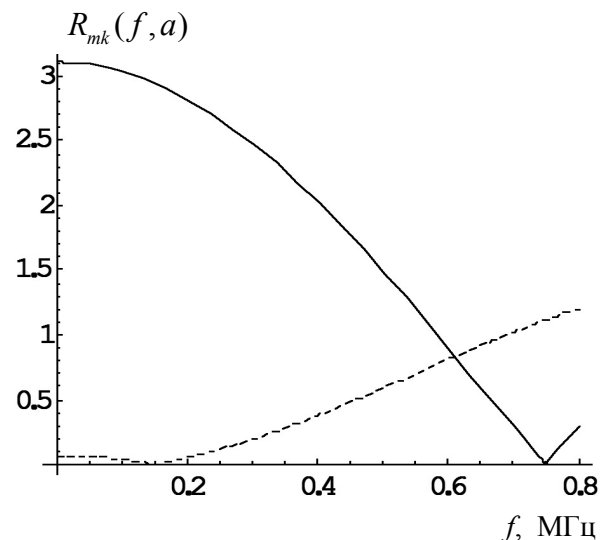


Рис. 5. Начальный участок графиков из рис. 3

Однако, как показывают модельные решения, на этих частотах все радиальные моды при $m > 0$ равны тождественно нулю для $r \in [0, a]$. На рис. 6 для примера представлено поведение по всей толщине трубки радиальной волны первого порядка для $k = 10$ и $k = 50$, (соответственно для частот 150 кГц и 750 кГц); оба графика, естественно, сливаются в один.

Очевидно, что это справедливо для всех $k = 1, 2, \dots$ и $m > 0$, т. к. при $k_1 = \xi_k$ имеет место равенство $\sigma_1 = \tau_1 = 0$. Отсюда следует, что решение внутри слоя жидкости равно тождественно нулю

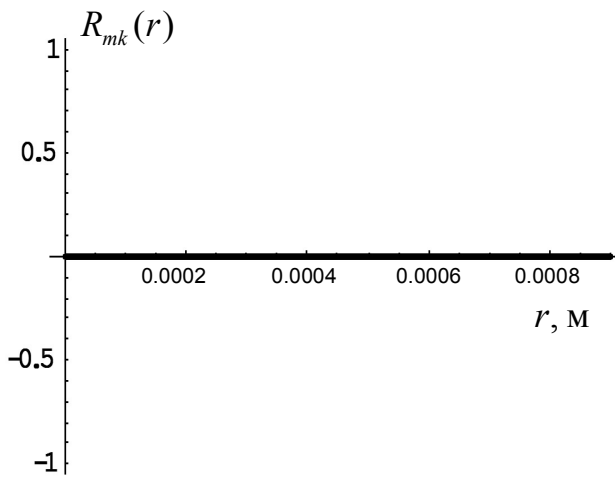


Рис. 6. Радиальные моды $R_{mk}(r)$.

— $m=1, k=10, f=150$ МГц;
 - - - $m=1, k=50, f=750$ МГц

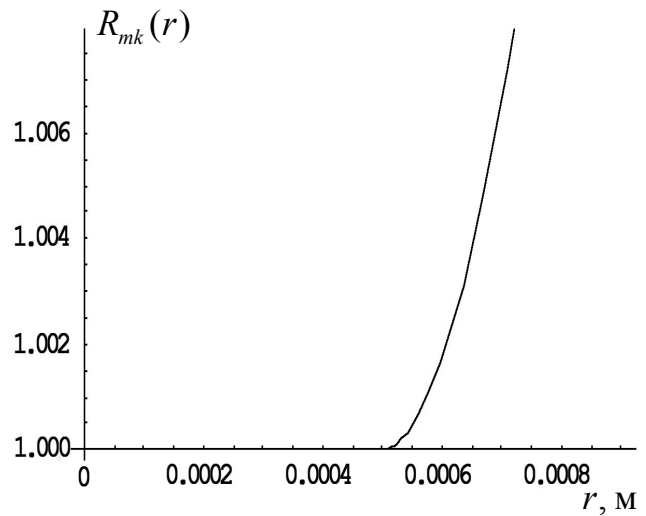


Рис. 7. Радиальная функция $R_{mk}(r)$.

$m=0, k=10, f=150$ МГц

при $m=1, 2, \dots$, т. к. $I_m(0) = J_m(0) = 0, m > 0$. А из выражений (10), (14), (15) мгновенно следует тождественное равенство нулю и решений в стенках цилиндра. Отсюда следует, что собственные частоты

$$f_k = \frac{\xi_k c_1}{2\pi}, \quad k=1, 2, \dots \quad (16)$$

соответствуют тривиальным собственным функциям, равным тождественно нулю на интервале $r \in [0, a]$. Физически это означает, что на частотах (16) не возникает никаких колебаний, иными словами плоское продольное движение внутри трубки с волновыми числами $k_1 = \xi_k$ невозможно. Отметим, что это относится к случаю однородных краевых условий Дирихле на внешней боковой поверхности цилиндра. Подсказка случая, когда возможны собственные колебания в виде продольной плоской волны, дается поведением решения для нулевой радиальной моды на частотах (16). Так, на рис. 7 показано распределение решения (8), (9), (11), (12) для случая $m=0, k=10, f_{k=10}=150$ кГц. Из рисунка видно, что радиальное решение тождественно равно константе (единице), а в стенке цилиндра начинает возрастать. Как видно из рис. 7, граничное условие при $r=a$ не выполняется, а это означает, что соответствующее колебание не является собственным. Оно становится таковым, только если внутренняя жидкость находится в абсолютно жестком полом цилиндре.

На рис. 8 приведено распределение нулевой поперечной моды, соответствующей всем параметрам среды, анонсированным в начале статьи,

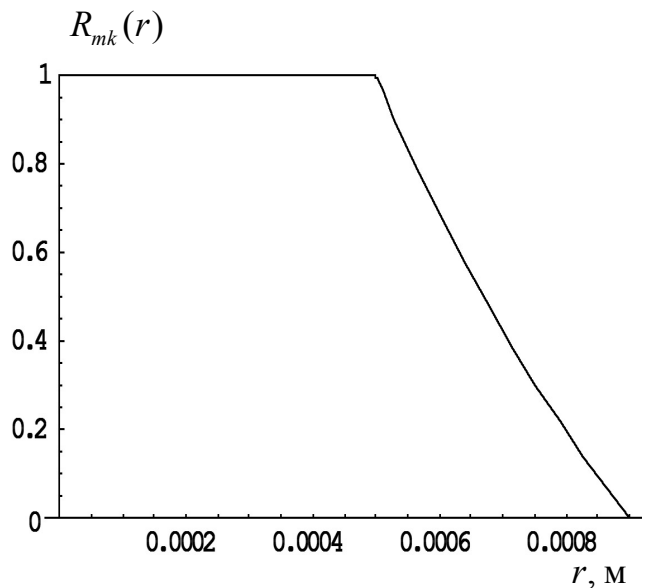


Рис. 8. Радиальная нулевая мода $R_{mk}(r)$, $m=0$,

$k=10, \rho_2=2500$

за исключением плотности стенки цилиндра, которая в этом случае равна $\rho_2=2500$ (напомним, что реальная плотность, принятая в работе, $\rho_2=2.5$), что соответствует приближению цилиндра с абсолютно жесткими стенками (здесь $m=0, k=10$). Частота резонанса нулевой моды при этом равна $f=151$ кГц, что уже совсем близко к резонансу плоской стоячей волны, распространяющейся

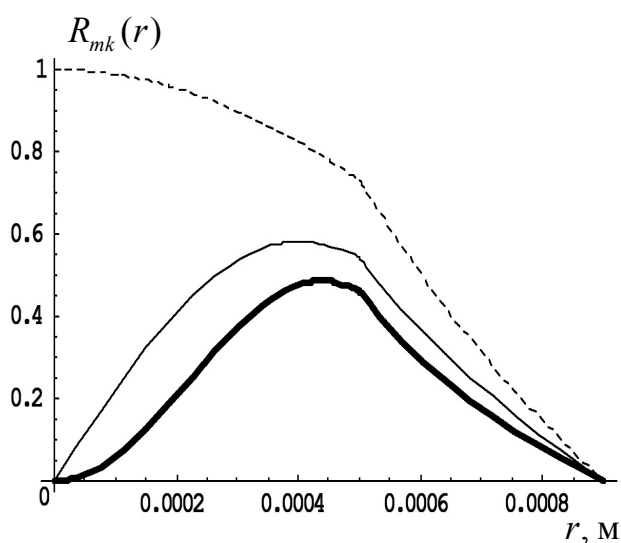


Рис. 9. Радиальные моды $R_{mk}(r)$.

$m=0$, $k=10$ — штриховая; $m=1$, $k=10$ — сплошная; $m=2$, $k=10$ — утолщенная линия; $\rho_2 = 2.5$

вдоль оси цилиндра $f_{k=10} = 150$ кГц (соответствующая частота нулевой радиальной моды при $\rho_2 = 2.5$ равнялась 534 кГц). Вариация амплитуды в жидкости менее 0.035 %, что соответствует представлению о поршневой плоской волне. Как легко заметить, на высших поперечных модах $m > 0$ собственные колебания на частотах f_k также невозможны.

На рис. 9 для иллюстрации представлены радиальные моды собственных колебаний для $k=10$: нулевой моды на частоте 534 кГц (штриховая линия), первой моды на частоте 1.1 МГц (сплошная линия) и второй моды на частоте 1.66 МГц (утолщенная линия), $\rho_2 = 2.5$. Как видно из рис. 9, первое не плоское собственное колебание (нулевая поперечная мода, штриховая линия) весьма удаленно соответствует представлению о продольном плоском движении. Амплитуда у стенок цилиндра примерно на 20 % меньше амплитуды на оси цилиндра.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе показано, что в случае, когда стенки цилиндра не абсолютно жесткие, получение стоячих плоских продольных волн невозможно. При росте плотности стенок цилиндра хорошее приближение к поршневой стоячей волне дает собственное колебание, соответствующее первой собственной частоте нулевой радиальной моды.

Расчеты проводились с помощью пакета "Mathematica-7", лицензия: L3259-7547.

Автор благодарен Н.Н. Князькову и Е.Д. Макаровой за полезные дискуссии и советы, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф.М., Фейнбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Иностран. лит-ра, 1960. 860 с.
2. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
3. Kogan S., Kaduchak G. Acoustic Concentration of Particle in Piezoelectric Tubes: Theoretical Modeling of the Effect of Cavity Shape and Symmetry Breacing // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116, N 4. P. 1967–1974.
4. Goddard G., Kaduchak G. Ultrasonic Particle Concentration in a Line-Driven Cylindrical Tube // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117, N 6. P. 3440–3447.
5. Шарфарец Б.П. О собственных колебаниях жидкости в ограниченном цилиндре // Научное приборостроение. 2009. Т. 19, № 3. С. 21–27.
6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Иностран. лит-ра, 1949. С. 91–92.

Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 10.07.2009.

ON THE POSSIBILITY OF EXCITATION OF STANDING LONGITUDINAL WAVE IN THE CYLINDRICAL RESTRICTED CAPILLARY FILLED WITH THE FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The work deals with the problem of fluid flat eigentone production possibility in the restricted cylindrical capillary filled with a fluid. In case when cylinder walls are not absolutely rigid, production of standing flat longitudinal waves is impossible. With cylinder wall density increase approach to a piston standing wave produces an eigentone corresponding to the first natural frequency of a zero radial mode. Examples of calculations of certain capillaries are given. The results of the work may be used in cases of ultrasound application to the problems of particle coagulation.

Keywords: resonance, eigentone frequency, eigenfunctions, eigenvalues, flat motion, flat standing waves