

УДК 534.874+517.954

ã Б. П. Шарфарец

**О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ, ПРИ КОТОРОМ РЕШЕНИЕ
ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА УДОВЛЕТВОРЯЕТ
УСЛОВИЮ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗОММЕРФЕЛЬДА**

В работе приводится необходимое условие, при котором решение однородного уравнения Гельмгольца, определяемое заданным краевым условием на плоскости, удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Показано, что таковым является условие дважды непрерывной дифференцируемости произведения косинуса угла падения и двумерного фурье-образа значения поля на указанной плоскости в сферических координатах. Это позволяет корректно решать, например, такие задачи, как определение радиационного давления на частицы в произвольном падающем поле.

ВВЕДЕНИЕ

В теории волновых задач важное место отводится вопросам корректной постановки краевых задач для уравнения Гельмгольца. Существенную роль при постановке таких задач в неограниченных областях играют условия излучения Зоммерфельда [1], позволяющие выделять единственное решение.

Известно, что решение однородного уравнения Гельмгольца, определенное на всем пространстве $\mathbf{x} \in R^3$, называемое целым решением, условиями излучения Зоммерфельда не удовлетворяет. Решение однородного уравнения Гельмгольца, область определения которого составляет бесконечное подмножество R^3 , называется излученным решением (radiation solution), если оно удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [2]. В различных задачах излучения и рассеяния волн приходится оценивать акустическое поле в полупространстве по заданному его значению на плоскости, граничащей с этим полупространством. При этом необходимо определить по значению поля на плоскости, является ли решение в искомом полупространстве целым или излученным. Или, иными словами, удовлетворяет ли решение условиям излучения Зоммерфельда.

В настоящей работе предлагается довольно простое необходимое условие, позволяющее определить по значению поля на плоскости, удовлетворяет ли решение в полупространстве условиям излучения Зоммерфельда.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарный гармонический

процесс в однородном полупространстве $z \geq z_0$ с временным фактором $e^{-i\omega t}$, впредь опускаемым, удовлетворяющий однородному уравнению Гельмгольца. Пусть на плоскости $z = z_0$ задано поле

$$u(x, y, z_0) = y(x, y). \quad (1)$$

По функции $y(x, y)$ необходимо определить является ли решение $u(\mathbf{x})$ при $z \geq z_0$ излученным либо целым, т. е. удовлетворяет или нет решение $u(\mathbf{x})$ условию излучения Зоммерфельда при $z \geq z_0$, $r \rightarrow \infty$, $r = |\mathbf{x}|$. Точка наблюдения $\mathbf{x} = (x, y, z) = (r, q, j)$ соответственно в декартовых и сферических координатах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Краевое условие (1) позволяет однозначно построить решение u в полуплоскости $z \geq z_0$. Пусть существует преобразование Фурье функции $y(x, y)$ в обычном или обобщенном смысле [1] (см. также Приложение)

$$y(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (2)$$

где

$$\Psi(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (3)$$

Тогда решение при $z \geq z_0$ равно

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z(z-z_0))} dk_x dk_y, \quad (4)$$

т. к. (4) удовлетворяет краевому условию (1), уравнению Гельмгольца и физическому условию ограниченности решения (4) при $z \rightarrow \infty$, что достигается выбором знака плюс в радикале $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ($k = w/c$ — волновое число в однородном полупространстве $z \geq z_0$). Не снижая общности, можно принять $z_0 = 0$. Тогда (4) переписывается в виде

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y. \quad (4a)$$

Пусть волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k, a, b)$ соответственно в декартовых и сферических координатах. Тогда (4a) в сферических координатах переписывается в виде

$$u(x, y, z) = k^2 \times \int_0^{2p} \int_0^{\frac{p}{2} - i\infty} \Psi_1(a, b) \cos a e^{ik(x \sin a \cos b + y \sin a \sin b + z \cos a)} \times \sin a da db, \quad (5)$$

где $\Psi_1(a, b) = \Psi(k_x, k_y)$.

Для принятия решения о том, удовлетворяет ли (5) условиям излучения Зоммерфельда, воспользуемся тем, что излученное решение может быть представлено в виде [2]:

$$u(r, q, j) = k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(q, j), \quad (6)$$

$$q \in [0, p], \quad j \in [0, 2p],$$

а также следующим разложением [3, 4]:

$$\begin{aligned} \Pi_n^m(\mathbf{x}) &= h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(q, j) = \\ &= (-i)^{n+1} \frac{i}{2p} \int_0^{2p} db \int_0^{\frac{p}{2} - i\infty} Y_n^m(a, b) \times \\ &\quad \times e^{ik(x \sin a \cos b + y \sin a \sin b + z \cos a)} \sin a da \left. \right\}, \quad (7) \\ q &\in [0, p], \quad j \in [0, 2p], \end{aligned}$$

где $h_n^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля первого рода; a_n^m — постоянные коэффициенты;

$Y_n^m(q, j)$ — сферические функции на единичной сфере, равные

$$Y_n^m(q, j) = \sqrt{\frac{2n+1}{4p} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(q) e^{imj}.$$

Далее воспользуемся теоремой разложения функций $f(q, j)$, $q \in [0, p]$, $j \in [0, 2p]$ в ряд Фурье по сферическим функциям [1, 5, 6]:

$$f(q, j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m Y_n^m(q, j). \quad (8)$$

Известно, что существуют две крайние по степени жесткости требования версии теоремы разложения функции $f(q, j)$ по сферическим функциям (8). По первой версии [1], функция $f(q, j)$ должна принадлежать множеству $f(q, j) \in L_2[q, j]$, $q \in [0, p]$, $j \in [0, 2p]$ интегрируемых по модулю во второй степени функций. По второй версии [5], требования к функции $f(q, j)$ жестче — она должна быть дважды непрерывно дифференцируемой по своим аргументам q, j .

Разложим по сферическим функциям в ряд (8) функцию $\Psi_1(a, b) \cos a$ из (5) на множестве $a \in [0, p]$, $b \in [0, 2p]$ (область видимости), полагая, что она удовлетворяет одному из приведенных выше требований:

$$\Psi_1(a, b) \cos a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m Y_n^m(a, b). \quad (9)$$

Далее, подставляя (9) в (5) и воспользовавшись тождеством (7), получаем

$$u(r, q, j) = 2pk^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(q, j). \quad (10)$$

Как видно, (10) имеет вид (6) излученного решения, т. е. функция $u(r, q, j)$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, если справедливо разложение (9).

Чтобы выбрать требование, которому должна удовлетворять функция $\Psi_1(a, b) \cos a$, применим к интегралу (5) метод стационарной фазы. Получаем

$$u(r, q, j) = \frac{2pk}{i} \Psi_1(q, j) \cos q \frac{e^{ikr}}{r} + o(r). \quad (11)$$

Получен ожидаемый результат: функция $\frac{2pk}{i} \Psi_1(q, j) \cos q$ представляет собой фактор углового распределения (или амплитуду рассеяния, или диаграмму направленности) поля $u(r, q, j)$,

про которую известно, что она является целой аналитической функцией комплексных переменных q и j [7]. Отсюда следует более жесткое требование к функции $\Psi_1(q, j)$ при разложении произведения $\Psi_1(q, j) \cos q$ в ряд (9) по сферическим функциям: она должна быть дважды непрерывно дифференцируемой по своим аргументам q, j . В этом случае ряд (9) является равномерно и абсолютно сходящимся, и это позволяет его почленно интегрировать, что не оговаривалось при подстановке ряда (9) в интеграл (5).

Отсюда следует искомое необходимое условие удовлетворения функции $u(x, y, z)$ условиям излучения Зоммерфельда: *произведение $\Psi_1(q, j) \cos q$, где $\Psi_1(q, j)$ — двумерный фурье-образ в сферических координатах функции $y(x, y) = u(x, y, z_0)$, должно быть дважды непрерывно дифференцируемым по своим аргументам q, j .*

ПРИМЕРЫ

Полученное условие рассмотрим применительно к случаю плоской бегущей волны с гауссовым распределением амплитуды по фронту. Пусть плоская волна e^{ikz} при $z = 0$ пропускается через маску с функцией прозрачности $y(x, y)$, т. е. амплитуда падающей волны при $z = 0$ равна

$$u(x, y, 0) = y(x, y). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие гауссовости амплитуды $u(x, y, 0)$:

$$y(x, y) = \frac{1}{2ps_x s_y} e^{-\frac{x^2}{2s_x^2} - \frac{y^2}{2s_y^2}}. \quad (13)$$

Тогда из (3) находим

$$\Psi(k_x, k_y) = \frac{1}{4p^2} e^{-\frac{1}{2}(k_x^2 s_x^2 + k_y^2 s_y^2)}. \quad (14)$$

Из (4) находим:

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y, \quad (15)$$

$$z \geq 0.$$

В дальнейшем примем для упрощения условие радиальной симметричности законов (13), (14):

$$s_x = s_y = s. \quad (16)$$

Переходя к сферическим координатам в (14) получаем:

$$\Psi_1(a, b) = \frac{1}{4p^2} e^{-\frac{1}{2}k^2 s^2 \sin^2 a}. \quad (17)$$

Функция $\Psi_1(a, b)$ является целой аналитической функцией своих аргументов, и по необходимому условию решение (15) удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Контрпримером является случай распространения плоской волны e^{ikz} со стороны отрицательных z и условии прозрачности маски. Тогда имеем

$$y(x, y) \equiv 1$$

и из (3) имеем

$$\Psi(k_x, k_y) = \frac{1}{4p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = d(k_x) d(k_y),$$

и, следовательно, в сферической системе координат

$$\Psi_1(q, j) = \frac{d(a)}{k^2 \sin a} d(b), \quad (18)$$

что легко проверяется подстановкой (18) в (5):

$$u(x, y, z) = k^2 \int_0^{2p} \int_0^{\frac{p}{2} - i\infty} \frac{d(a)}{k^2 \sin a} d(b) \cos a \times \\ \times e^{ik(x \sin a \cos b + y \sin a \sin b + z \cos a)} \sin a da db = \\ = e^{ikz}.$$

Из (18) очевидно, что $\Psi_1(a, b)$ не удовлетворяет необходимому условию.

ВЫВОДЫ

В работе приведено достаточно простое необходимое условие того, удовлетворяет ли условиям излучения Зоммерфельда решение однородного уравнения Гельмгольца, определяемое своим значением на плоскости. А это в свою очередь позволяет корректно решать, например, такие задачи, как определение радиационного давления на частицы в произвольном падающем поле.

Приложение

Пусть $u(x)$ является излученным решением. Известно [7], что значение этого поля $y(x, y) = u(x, y, z_0)$ на плоскости $z = z_0$ не является абсолютно интегрируемой функцией. Более того, она не является квадратично интегрируемой функцией, т. е. функция $y(x, y)$ не имеет классического фурье-образа. Однако, если в интеграле (3) перейти к полярной системе координат, то порядок ин-

тегрирования, вследствие того что $u(x, y)$ не является абсолютно интегрируемой функцией, играет существенную роль. А именно, верный спектр (3) получается только при интегрировании вначале по $j = \arctan(y/x)$, а затем по $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [7].

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-03-33108) и целевой научно-технической программы Российской Федерации "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы" (лот 2, шифр «2007-2-2.2-04-08»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 521 с.
2. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer, New York, 1998. 331 p.
3. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole Expansions and Plane Wave Representations of the Electromagnetic Field // J. Math. Phys. 1974. V. 15, N 2. P. 235–244.
4. *Шарфарец Б.П.* О некоторых свойствах амплитуды рассеяния // Научное приборостроение. 2007. Т. 17, № 4. С. 55–60.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
6. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
7. *Hansen T.B., Yaghjian A.D.* Plane-Wave Theory of Time-Domain Fields. New York: IEEE Press, 1999. 367 p.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 30.11.2007.

ON THE NECESSARY CONDITION WHEN THE HOMOGENEOUS HELMHOLTZ EQUATION SATISFIES THE SOMMERFELD RADIATION CONDITION

B. P. Sharfarets

Saint Petersburg

The paper presents the necessary condition providing that the homogeneous Helmholtz equation solution determined by a preset plane boundary condition satisfies the Sommerfeld radiation condition. We have shown that this is a condition of double-continuous differentiability of the product of cosine of angle of incidence by the two-dimensional Fourier-image of field on the specified plane in spherical coordinates. This makes it possible to correctly solve such problems as, for instance, determination of radiation pressure upon particles in an arbitrary incident field.