

ОБЗОРЫ

УДК 621.391;519.21;519.245

© А. В. Меркушева

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Обобщенная модификация традиционного преобразования Фурье — вращаемое преобразование Фурье, ВПФ, введенное математиками сравнительно давно, оставалось долго неизвестной в области обработки сигналов, в которой ВПФ имеет немалый потенциал применения. ВПФ зависит от параметра α и интерпретируется как вращение время-частотной плоскости. При $\alpha = \pi/2$ ВПФ соответствует обычному преобразованию Фурье, при $\alpha = 0$ — тождественному оператору, а углы последовательно выполняемых ВПФ аддитивны (как углы последовательного вращения). В аналитическом представлении ВПФ является разложением сигнала по базису, состоящему из набора сигналов с быстро изменяющейся частотой (СБИЧ-компонентов). Предлагаются основные элементы теории ВПФ, его свойства, виды интерпретации как оператора, соотношения взаимосвязи ВПФ с время-частотными распределениями нестационарных сигналов (с распределением Вигнера, кратковременным преобразованием Фурье и спектрограммой). Эти соотношения имеют замкнутую аналитическую форму. Даны примеры ВПФ ряда сигналов и приложения ВПФ.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ Фурье — одно из наиболее часто используемых средств при обработке сигналов и часто применяемых во многих других областях. Кроме самого преобразования Фурье (ПФ), часто применяются время-частотные представления нестационарных сигналов, такие как распределение Вигнера, кратковременное преобразование Фурье, скейлограмма [1–4]. Одно из направлений исследований, сравнительно широко использующих эти методы, связано с информационными системами, применяющими сложные речевые технологии. Другое направление применения перечисленных прикладных математических средств относится к квантовой физике и к оптике.

В отличие от математических и физических приложений, прошедших немалый период развития [5, 6], в области обработки сигналов (несмотря на значительные перспективы приложений) вращаемое преобразование Фурье (ВПФ) долго оставалось неизвестным и сравнительно недавно было переоткрыто в работах нескольких исследователей: Мак-Брайда (McBride), Мендловича (Mendlovic), Синкота (Cincott), Альмейды (Almeida) [7–10]. Почти одновременно и независимо ими систематизированы и установлены некоторые новые свойства ВПФ.

Поэтому в контексте применения ВПФ для обработки сигналов в информационно-измерительных системах (ИИС) (включая взаимосвязь ВПФ с время-частотными распределениями, преобразованием Радона и фильтрацией) полезна

краткая систематизация прикладных элементов теории ВПФ и основных его свойств. К ним относятся интерпретация ВПФ как вращение время-частотной плоскости; связь ВПФ с традиционным преобразованием Фурье и с поворотом координат время-частотных распределений (ВЧР); интерпретация сигнала, преобразованного ВПФ, в форме ортогонального разложения по базису, который образован сигналами с быстро изменяющейся частотой (СБИЧ).

ВРАЩАЕМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Известно, что при применении ВЧР для анализа нестационарных сигналов ИИС используется система координат, соответствующая времени и частоте (рис. 1). Если рассматривать представление сигнала $s(t)$ вдоль временной оси, то оператор его ПФ, который будет обозначаться F , преобразует сигнал и дает представление $F(s)(\omega)$ ¹⁾ вдоль оси

¹⁾ В использовании преобразования Фурье $S(\omega) = F[s(t)]$ встречаются написания, отличающиеся множителем 2π , который пишется альтернативно или в прямом, или обратном ПФ. Наиболее предпочтительной является симметричная форма, при которой множитель $(2\pi)^{1/2}$ пишется и в прямом ПФ, и обратном:

$$S(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt;$$

$$s(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Эта форма будет использована при получении всех соотношений, связанных с ВПФ.

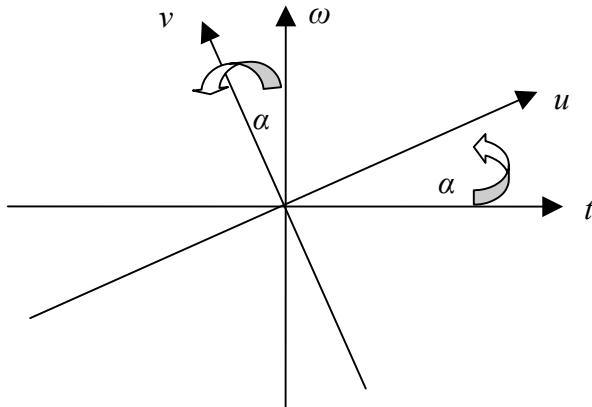


Рис. 1. Время-частотная плоскость и система координат (u, v) , повернутая на угол α относительно начальной системы координат (t, ω)

частот, имеющей угол $\pi/2$ с осью t . Это вполне соответствует тому, что повторное применение ПФ поворачивает основную ось представления сигнала $s(t)$ дважды на $\pi/2$, т.е. на угол π . Вследствие этого преобразованный сигнал отображается вдоль отрицательной оси $(-t)$, и имеет место соотношение $F S(\omega) = F F[s(t)] = s(-t)$.

ВПФ строится на основе поворота время-частотной плоскости на некоторый угол α , не равный (и не кратный) величине $\pi/2$. Если допустить, что оператор, действуя на сигнал $s(t)$, отображает его на ось u , повернутую на угол α относительно направления t (рис. 1), и, кроме того, этот оператор (обозначаемый F_α) обладает набором свойств (1–4), то такой оператор имеет выражение в форме интеграла от сигнала, умноженного на некоторое ядро (на функцию двух переменных: $K_\alpha(t, u)$), и является оператором вращаемого преобразования Фурье. Таким образом, оператор ВПФ F_α определяется требованием наличия у него набора следующих свойств.

- Эквивалентность нулевого вращения с тождественным оператором (I):

$$F_{\alpha=0} = I. \quad (1)$$

- Согласованность с обычным преобразованием Фурье (F):

$$F_{\alpha=\pi/2} = F. \quad (2)$$

- Аддитивность углов вращения у двух последовательно выполняемых ВПФ:

$$F_\alpha F_\beta = F_{\alpha+\beta}. \quad (3)$$

- Эквивалентность тождественному оператору вращаемого преобразования Фурье с углом 2π (или с любым другим углом, значение которого

кратно 2π)²⁾:

$$F_{2\pi} = I. \quad (4)$$

Показано, что оператор, обладающий такими свойствами, имеет вид интегрального преобразования сигнала $s(t)$ с ядром $K_\alpha(t, u)$:

$$(F_\alpha s)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_\alpha(t, u) dt. \quad (5)$$

Само преобразующее ядро выражается соотношением (6):

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \exp \left[j \frac{t^2 + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha - j u t \operatorname{cosec} \alpha \right], & \text{если } \alpha \text{ не является величиной, кратной } \pi; \\ \delta(t - u), & \text{если } \alpha \text{ не кратно значению } 2\pi; \\ \delta(t + u), & \text{если } \alpha + \pi \text{ не кратно значению } 2\pi. \end{cases} \quad (6)$$

Ядро ВПФ является непрерывной функцией угла α , в том числе при значениях α , кратных целому числу π

$$\lim_{\alpha \rightarrow n\pi} K_\alpha = K_{n\pi} \quad \text{для целых значений } n, \quad (7)$$

и обладает целым рядом полезных свойств, которые выражаются соотношениями (8–12):

$$K_\alpha(t, u) = K_\alpha(u, t), \quad (8)$$

$$K_{-\alpha}(t, u) = K_\alpha^*(u, t), \quad (9)$$

$$K_\alpha(-t, u) = K_\alpha(t, -u), \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, u) K_\beta(u, z) du = K_{\alpha+\beta}(t, z), \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, u) K_\alpha^*(t, u') dt = \delta(u - u'), \quad (12)$$

где $\delta(u - u')$ — дельта-функция³⁾; символ $*$ означает комплексное сопряжение.

²⁾ Свойство (4) для ВПФ можно считать следствием свойств (2) и (3), так как $F_{2\pi}$ равноценно четырехкратному выполнению $F_{\pi/2}$ ($F_{2\pi} = F_{4(\pi/2)}$), и поскольку $F_{\pi/2} = F$, то имеется эквивалентность $F_{2\pi} = FFFF$. Но повторное ПФ ведет только к перемене знака у сигнала ($FFs(t) = s(-t)$), поэтому $F_{2\pi}s(t) = s(t)$ и оператор $F_{2\pi}$ совпадает с тождественным оператором I .

³⁾ Основное и определяющее свойство дельта-функции выражается соотношением: $\int_a^b f(u) \delta(u - u') du = f(u')$, если $u' \in [a, b]$, и этот интеграл равен нулю, если $u' \notin [a, b]$. В некотором смысле дельта-функция является аналогом символа Кронекера, который используется для дискретных переменных с индексами.

Первые три свойства являются непосредственным следствием определения ядра. Соотношение, определяющее свойство (12), получается на основе преобразований с использованием выражений (8), (9), (11) и формы ядра K_α при $\alpha = 0$. Это свойство означает, что ядерные функции $K_\alpha(t, u)$, рассматриваемые как функции от t с параметром u , образуют ортонормированную систему. В силу свойства (8) (симметрии ядра относительно перестановки его аргументов) такую же ортонормированную систему образует набор ядерных функций $K_\alpha(t, u)$, рассматриваемых как функции от u с параметром t . Можно также заметить, что при $\alpha = \pi/2$ ядро $\exp(-jtu)$ совпадает с ядром обычного преобразования Фурье, хотя в приложениях ПФ переменную преобразованного сигнала (его частотной формы) принято обозначать ω , а не u .

Результат применения ВПФ к сигналу $s(t)$, $F_\alpha(s)(u)$, удобно обозначать $S_\alpha(u)$ ⁴⁾. Для обычного ПФ сигнала $s(t)$ (для его частотной формы) используется обозначение $S(\omega)$. С использованием этого вида обозначения и выражения (6) для ядра развернутая форма представления сигнала $s(t)$ в области вращаемого преобразования Фурье выражается соотношениями (13) и (14):

$$S_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_\alpha(t, u) dt; \quad (13)$$

$$S_\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\frac{t^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} e^{-jut \operatorname{cosec} \alpha} dt, & \text{если } \alpha \text{ не кратно величине } \pi; \\ s(t), & \text{если } \alpha \text{ кратно значению } 2\pi; \\ s(-t), & \text{если } \alpha + \pi \text{ кратно } 2\pi. \end{cases} \quad (14)$$

Соотношение (14) показывает, что для углов α , которые не являются кратными величине π , вычисление ВПФ соответствует выполнению следующих процедур.

- Умножение $s(t)$ на сигнал с быстро изменяющейся частотой (СБИЧ).
- Преобразование Фурье (с его аргументом, масштабированным множителем $\operatorname{cosec} \alpha$).
- Следующее умножение на СБИЧ.

⁴⁾ $S_\alpha(u)$ соответствует обозначению работ, связанных с первоначальным введением аналитической формы ВПФ и с применением его в квантовой физике и математике [5, 6]. Встречающееся для ВПФ название дробного (fractional) ПФ мотивировано тем, что иногда использовалось значение параметра ВПФ в единицах $\pi/2$ ($\alpha = p(\pi/2)$, $0 < p < 2$, $p \neq 1$), и тогда ВПФ определяется дробным (не целым) параметром p .

- Умножение на (комплексный) амплитудный множитель.

То, что СБИЧ имеют постоянную амплитуду, позволяет сделать довольно общее заключение о существовании ВПФ. Если сигнал $s(t)$ интегрируем по модулю (или просто, имея ограниченную энергию, интегрируем с квадратом), то умножение его на СБИЧ не меняет его свойство принадлежать пространству одного из этих видов (т.е. относиться к L_1 или к L_2 , как и до умножения на СБИЧ). Поэтому ВПФ может быть выполнено (т.е. ВПФ существует по математической терминологии) при тех же условиях, при которых может быть определено классическое преобразование Фурье⁵⁾.

С помощью выражений (13, 14) можно убедиться, что ВПФ действительно удовлетворяет приведенным выше свойствам (1–4). Свойство (1) прямо следует из определения ядра в (14); свойство (2) является следствием того факта, что для $\alpha = \pi/2$ ядро ВПФ совпадает с ядром обычного ПФ. Свойство (3) может быть выведено на основе использования выражения (11). Так, если обозначить $y(u) = S_\alpha(u)$, то для ВПФ от $y(u)$ с углом β (т.е. для Y_β) справедлива цепочка преобразований

$$\begin{aligned} Y_\beta &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\beta(u, z) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_\alpha(t, u) dt du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_\alpha(t, u) K_\beta(u, z) dt du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_{\alpha+\beta}(t, z) dt = S_{\alpha+\beta}(z). \end{aligned} \quad (15)$$

Начало и конец этой цепочки говорит, что последовательное выполнение ВПФ (ВПФ с углом β применительно к ВПФ с углом α , т.е. к $y(u) = S_\alpha(u)$) равноценно одному ВПФ с суммарным углом $\alpha + \beta$, что эквивалентно утверждению свойства (3). Свойство (4), как отмечалось выше, является следствием свойств (2) и (3).

Из этих свойств нетрудно вывести выражение, показывающее, что обратное ВПФ с углом α равно ППФ с углом $-\alpha$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(u) K_{-\alpha}(u, t) du. \quad (16)$$

⁵⁾ В контексте элементов теории ВПФ вопрос о существовании преобразования с набором рассмотренных свойств логически сопряжен с проблемой о его единственности. В упоминавшихся работах (физико-математического направления) Намиаса и Мак-Брайда [4, 5] показано, что в анализируемую форму ВПФ может быть введен дополнительный множитель $e^{j\pi n \alpha}$ с целым n , и при этом у такого модифицированного ВПФ сохраняются все свойства. Таким образом, вопросу о единственности дан отрицательный ответ, однако применение любого ВПФ, отличающегося от приведенной нами формы, приводит к значительному усложнению многих рассмотренных ниже соотношений, значимых для прикладного использования ВПФ.

Из выражения (16) видно, что ВПФ $S_\alpha(u)$ играет роль коэффициентов (для ортонормированного набора базисных функций $K_\alpha(u, t)$) в интегральном представлении сигнала $s(t)$. Базисные функции являются СБИЧ, т. е. комплексными экспонентами с линейным изменением (текущей) частоты. Для разных величин они отличаются только временным сдвигом (смещением аргумента по времени) и фазовым множителем, который зависит от u :

$$K_\alpha(t, u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\operatorname{tg}\alpha} K_\alpha(t - u \sec \alpha, 0). \quad (17)$$

ВПФ ТИПОВЫХ ФОРМ СИГНАЛОВ-ФУНКЦИЙ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

К перечню дополнительных свойств ВПФ можно прежде всего отнести соответствие некоторых часто встречающихся видов сигналов-функций и их образов при ВПФ. Список такого соответствия дан в табл. 1. Ее можно интерпретировать как расширение аналогичной формы соответствия для классического преобразования Фурье, поскольку ВПФ является обобщением последнего.

Свойство 6 (табл. 1) справедливо в том случае, если для $s(t)/t$ (с учетом сингулярности в нуле) существует обычное ПФ. Свойство 7 обеспечивает так называемое соответствие четности: если сигнал $s(t)$ является четной функцией, т. е. $s(-t) = s(t)$, то его ВПФ тоже четно $S_\alpha(-u) = S_\alpha(u)$, и, наоборот, при нечетном сигнале $s(-t) = -s(t)$ его образ при ВПФ тоже нечетен. Свойство 8 позволяет определять ВПФ при изменении единиц (масштабирование) независимой переменной — времени. При обычном ПФ такое изменение соответствует только изменению единиц (масштабированию) частотной переменной и масштабированию амплитуды в ПФ сигнала. В случае ВПФ результат масштабирования $s(t) \rightarrow s(ct)$ оказывается более сложным: масштабируется переменная u множителем $\sin \beta / c \sin \alpha$; амплитуда масштабируется умножением на (комплексный) СБИЧ и (что особенно важно) изменяется угол, при котором вычисляется ВПФ — вместо α берется $\beta = \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \alpha)$. Это изменение угла преобразования, связанное с получением свойства 8 для временного масштабирования сигнала, показано в Приложении. Такое изменение угла связано со сжатием (в c раз) временной оси время-частотной плоскости.

Табл. 1. ВПФ отдельных видов сигналов-функций (дополнительные свойства ВПФ)

№ п/п	Сигнал	Вращаемое преобразование Фурье с углом α
1	$s(t-\tau)$	$S_\alpha(u - \tau \cos \alpha) e^{j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\tau u \sin \alpha}$
2	$s(t)e^{jvt}$	$S_\alpha(u - v \sin \alpha) e^{-j\frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + jvu \cos \alpha}$
3	$s'(t)$	$S'_\alpha(u) \cos \alpha + ju S_\alpha(u) \sin \alpha$
4	$\int_a^t s(t') dt'$	$\sec \alpha e^{-j\frac{u^2}{2} \operatorname{tg} \alpha} \int_a^u S_\alpha(z) e^{j\frac{z^2}{2} \operatorname{tg} \alpha} dz$ — если $\alpha - \pi/2$ не кратно π ; если $\alpha - \pi/2$ кратно π , то применимо свойство классического ПФ
5	$t s(t)$	$u S_\alpha(u) \cos \alpha + j S'_\alpha(u) \sin \alpha$
6	$s(t)/t$	$-j \sec \alpha e^{j\frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} \int_{-\infty}^u s(z) e^{-j\frac{z^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} dz$ — если α не кратно π
7	$s(-t)$	$S_\alpha(-u)$
8	$s(ct)$	$\sqrt{\frac{1-j \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 - j \operatorname{ctg} \alpha}} e^{j\frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}\right)} S_\beta\left(u \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha}\right)$, где $\beta = \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \alpha)$

Известно, что при обычном ПФ при этом одновременно "растягивается" ось частотной переменной тоже в c раз. За счет этих двух процедур ось, вдоль которой вычисляется ВПФ (и которая первоначально была направлена под углом α к первоначальной системе координат), поворачивается в новое положение под углом $\beta = \arctg(c^2 \tg \alpha)$.

Полное обоснование соотношений, определяющих соответствие сигналов-функций и их ВПФ представлено в упоминавшихся выше работах физико-математического направления [5, 6, 7].

Из других свойств ВПФ представляет интерес соотношение Парсевала (известное в традиционных способах анализа сигналов). Для метода ВПФ это соотношение имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{1,\alpha}(u) S_{2,\alpha}^*(u) du. \quad (18)$$

Для получения этого выражения каждый из сигналов в виде обратного ВПФ (например, $s_1(t) = F_{\alpha}^{-1} S_1(u) = F_{-\alpha} S_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(u) K_{-\alpha}(u, t) du$) подставляется в левую часть (18), после чего использование соотношения (9) и небольшое преобразование приводят к правой части (18).

Следствием свойства Парсевала является свойство сохранения энергии при операции ВПФ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\alpha}(u)|^2 du. \quad (19)$$

Отметим, что свойство сохранения энергии для обычного преобразования Фурье имеет вид, аналогичный выражению (19), но с частотной формой сигнала $S(\omega)$ вместо $S_{\alpha}(u)$. И функция частоты $|S(\omega)|^2$, называемая спектром энергии сигнала, интерпретируется как распределение энергии по частотным компонентам $e^{j\omega t}$ (базисным функциям разложения сигнала). Соотношение (19) также позволяет называть $|S_{\alpha}(u)|^2$ энергетическим спектром ВПФ с углом α и интерпретировать этот спектр как распределение энергии сигнала по различным СБИЧ $K_{-\alpha}(t, u)$, которые образуют базис.

При обычном (не комплексном) сигнале для его ВПФ выполняется еще одно свойство в форме соотношения (20), которое является следствием выражения (9), определяющего свойства ядра ВПФ:

$$S_{-\alpha}(u) = S_{\alpha}^*(u). \quad (20)$$

Наиболее важные свойства ВПФ отражаются в двух правилах.

- Правило формирования ВПФ произведения двух функций, на которые факторизуется сигнал, другими словами, правило ВПФ для сигнала вида $s(t) = s_1(t) s_2(t)$.

- Правило формирования ВПФ для сигнала, представляющего свертку двух сигналов-функций:

$s(t) = (s_1 * s_2)(t)$. (Один из сомножителей может служить, например, передаточной функцией фильтра или другой системы преобразования).

ВПФ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СВЕРТКИ СИГНАЛОВ-ФУНКЦИЙ

В технологии обработки сигналов обычными являются операции умножения и свертки. Поэтому целесообразно проанализировать способы получения ВПФ результатов операций произведения и свертки двух сигналов, а также форму модификации полученных таким образом выражений для некоторых специальных соотношений величины углов, определяющих ВПФ функций, входящих в произведение и свертку. В качестве таких функций могут быть два сигнала, сигнал и мультипликативная помеха, временные (для свертки) или частотные формы (для произведения) сигнала и передаточной функции фильтра.

Преобразование произведения

Для получения вращаемого преобразования Фурье $S_{\alpha}(u)$ с углом α для произведения $s(t) = s^{(1)}(t) s^{(2)}(t)$ двух сигналов (функций) $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ можно использовать выражение, которое определяет ВПФ (при α , не кратном величине π):

$$S_{\alpha}(u) = \sqrt{\frac{1 - j \ctg \alpha}{2\pi}} e^{j(u^2/2) \ctg \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j(t^2/2) \ctg \alpha - jtu \operatorname{cosec} \alpha} dt.$$

После замены $s(t)$ на произведение $s^{(1)}(t) s^{(2)}(t)$ и выполнения преобразований это соотношение приобретает новую форму:

$$S_{\alpha}(u) = \frac{|\operatorname{cosec} \alpha|}{\sqrt{2\pi}} e^{j(u^2/2) \ctg \alpha} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(v) e^{-j(v^2/2) \ctg \alpha} S^{(2)}[(u-v) \operatorname{cosec} \alpha] dv, \quad (21)$$

где $S^{(2)}$ — это преобразование Фурье от $s^{(2)}$.

Соотношение (21) показывает, что ВПФ произведения $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ получается путем выполнения трех процедур: умножения ВПФ от $s^{(1)}$ на сигнал с быстрым изменением частоты от времени (СБИЧ)⁶⁾; последующей свертки с (масштабиро-

⁶⁾ СБИЧ — сигнал с быстрым изменением (текущего значения) частоты от времени, согласно терминологии американской научной литературы, называют чирп-сигналом. Первоначально это название сигналам (с линейной и квадратичной зависимостью изменения текущей частоты, а позднее и с полиномиальной зависимостью) было введено в связи с тем, что акустическое звучание такого сигнала напоминает чириканье (chirp). Этот жаргонный термин (из-за его краткости) иногда продолжает применяться.

ванным) ПФ от $s^{(2)}$ и затем снова умножения на СБИЧ и на масштабирующий множитель.

Другая форма выражения ВПФ для произведения получается, если произвести в правой части (21) замену переменных интегрирования $v \rightarrow u - v$. Это приводит к соотношению (22):

$$S_{\alpha}(u) = \frac{|\operatorname{cosec} \alpha|}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(u-v) S^{(2)}[v \operatorname{cosec} \alpha] e^{-j(uv-v^2/2)\operatorname{ctg} \alpha} dv. \quad (22)$$

После использования еще одной замены: $v \rightarrow v \sin \alpha$, получается соотношение (23), выражающее правило (алгоритм) получения вращаемого преобразования Фурье от произведения сигналов:

$$S_{\alpha}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(u-v \sin \alpha) S^2(v) e^{-j(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha + juv \cos \alpha} dv. \quad (23)$$

В силу метода формирования соотношений (21), (22), (23) сигналы $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ в них можно менять местами без изменения результата. Кроме того, следует учитывать, что эти соотношения выполняются при условии, если α не является кратным числом π .

Вращаемое преобразование Фурье от свертки функций

Для двух сигналов-функций $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ их свертка $s(t) = (s^{(1)} * s^{(2)})(t)$ определяется выражением

$$s(t) = (s^{(1)} * s^{(2)})(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s^{(1)}(\tau) s^{(2)}(t-\tau) d\tau.$$

При этом обычное ПФ — $S(\omega)$ (частотная форма от свертки $s(t)$) — выражается известным способом через произведение частотных форм сигналов: $S(\omega) = \sqrt{2\pi} S^{(1)}(\omega) S^{(2)}(\omega)$.

Поскольку ПФ — это ВПФ с углом $\pi/2$, и, следовательно, временная форма сигнала (как обратное ПФ) равна ВПФ с углом $-\pi/2$, то выражение вращаемого преобразования Фурье с углом α от сигнала эквивалентно ВПФ с углом $\alpha - \pi/2$ от частотной формы того же сигнала. Поэтому использование (21) позволяет получить один из видов выражения преобразования свертки:

$$S_{\alpha}(u) = |\sec \alpha| e^{-j(u^2/2)\operatorname{tg} \alpha} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(v) s^{(2)}[(u-v) \sec \alpha] e^{j(v^2/2)\operatorname{tg} \alpha} dv. \quad (24)$$

Это значит, что для того чтобы вычислить ВПФ от свертки, следует взять ВПФ одного из сигна-

лов, умножить его на СБИЧ, осуществить операцию свертки с (масштабированным) другим сигналом и после этого снова умножить (этот промежуточный результат) на СБИЧ и общий множитель.

Аналогично тому как это сделано выше при получении различных форм выражения ВПФ от произведения, можно путем процедуры замены переменных в интеграле, входящем в (24), получить еще две разновидности соотношений, выражающих ту же функцию ВПФ от свертки. Первое из этих соотношений получается при введении замены переменных $v \rightarrow u - v$ и дает выражение (25):

$$S_{\alpha}(u) = |\sec \alpha| \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(u-v) s^{(2)}(\sec \alpha) e^{j[(v^2-2uv)/2]\operatorname{tg} \alpha} dv. \quad (25)$$

С помощью выполнения процедуры новой замены переменных $v \sec \alpha \rightarrow v$ в правой части (25) получается вторая форма выражения для ВПФ от свертки:

$$S_{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(u-v \cos \alpha) s^{(2)}(v) e^{j(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha - juv \sin \alpha} dv. \quad (26)$$

Каждое из выражений (24)–(26) отражает характер взаимосвязи ВПФ свертки двух сигналов с ВПФ одного из них и ВПФ другого. В силу симметрии свертки относительно порядка сигналов, участвующих в ней, в приведенных соотношениях без изменения результата могут быть заменены $s^{(1)}$ на $s^{(2)}$ и $s^{(2)}$ на $s^{(1)}$, т. е. в правой части в (24)–(26) могут использоваться $S_{\alpha}^{(2)}$ и $s^{(1)}$. Как и для ВПФ произведения, выражения ВПФ свертки справедливы, только если $\alpha - \pi/2$ не является кратным числу π .

БОЛЕЕ ОБЩИЕ ФОРМЫ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ВПФ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СВЕРТКИ

В зависимости от вида сигналов — особенностей их динамики как функций времени — с вычислительной точки зрения может оказаться предпочтительной та или другая форма выражения взаимосвязи ВПФ произведения или свертки сигналов с их ВПФ и ПФ, вычисленными отдельно для компонент произведения или свертки. Поэтому в отдельных случаях могут быть полезны альтернативные формы аналитических зависимостей, выражающих такие взаимосвязи.

ВПФ от произведения функций (общая форма)

Чтобы получить более общие выражения для

ВПФ произведения, нужно снова использовать исходное соотношение $s(t) = s^{(1)}(t)s^{(2)}(t)$ двух сигналов (функций) $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$.

Если выбрать углы β и γ так, чтобы $\cos \beta + \cos \gamma = \cos \alpha$, то можно представить ВПФ $S_\alpha(u)$ произведения $s(t) = s^{(1)}(t)s^{(2)}(t)$ в форме выражения

$$S_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-j\cos\alpha}{2\pi}} e^{j(u^2/2)\text{ctg}\alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} s^{(1)}(t) e^{j(t^2/2)\text{ctg}\beta} s^{(2)}(t) e^{j(t^2/2)\text{ctg}\gamma} e^{-jut\text{cosec}\alpha} dt.$$

Интеграл в правой части является (умноженным на $\sqrt{2\pi}$) обычным ПФ с аргументом $u \text{ cosec } \alpha$ от произведения $a(t) = s^{(1)}(t) e^{j(t^2/2)\text{ctg}\beta}$ и $b(t) = s^{(2)}(t) e^{j(t^2/2)\text{ctg}\gamma}$. Поэтому $S_\alpha(u)$ может трактоваться как свертка $(A*B)$ преобразований Фурье от этих функций $a(t)$ и $b(t)$. Таким образом, ВПФ $S_\alpha(u)$ представляется в виде соотношения

$$S_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-j\cos\alpha}{2\pi}} e^{j(u^2/2)\text{ctg}\alpha} (A*B)(u \text{ cosec } \alpha),$$

в котором A и B служат как раз образами Фурье-преобразований приведенных выше функций — соответственно $a(t)$ и $b(t)$. Если теперь раскрыть выражение для $A(\omega)$ как ПФ от $a(t)$ (в соответствии с данным выше определением $a(t)$), то после некоторых преобразований получается представление $A(\omega)$ через ВПФ одного из множителей произведения $S_\beta^{(1)}$:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s^{(1)}(t) e^{j(t^2/2)\cos\beta - j\omega t} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-j\cos\beta}} e^{-j(\omega^2/2)\sin\beta\cos\beta} S_\beta^{(1)}(\omega \sin \beta).$$

Если осуществить такую же процедуру для получения ПФ от $b(t)$, то получится аналогичная форма выражения для $B(\omega)$ через ВПФ $S_\gamma^{(2)}$ с той разницей, что вместо β в этом выражении будет фигурировать угол γ .

Для получения окончательной формы выражения для $S_\alpha(u)$ остается произвести свертку $A(\omega)$ и $B(\omega)$, записать результат при значении аргумента свертки, равном $u \text{ cosec } \alpha$, и провести необходимые преобразования. Выполнение этой процедуры дает новый вид ВПФ $S_\alpha(u)$ произведения двух сигналов:

$$S_\alpha(u) = \frac{\sqrt{1-j\text{ctg}\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-j\text{ctg}\beta}\sqrt{1-j\text{ctg}\gamma}} \times \\ \times e^{j(u^2/2)(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\gamma)/\cos^2\alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} S_\beta^{(1)}(v \sin \beta) S_\gamma^{(2)}[(u \text{ cosec } \alpha - v) \sin \gamma] \times \\ \times \exp[-j(v^2/2)(\sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) + \\ + juv \sin\gamma\cos\gamma/\sin\alpha] dv. \quad (27)$$

Как обычно, выражение (27) справедливо при условии, что α , β и γ не являются кратными π .

Для выражения (27) можно рассмотреть два частных случая.

■ Так, если $\beta = \alpha$, $\gamma = \pi/2$, то (27) несколько упрощается и принимает вид

$$S_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j(u^2/2)\text{ctg}\alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha^{(1)}(v \sin \alpha) S_\gamma^{(2)}(u \text{ cosec } \alpha - v) e^{-j(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha} dv.$$

Это выражение совпадает с (21), в котором следует изменить переменную $v \rightarrow v \sin \alpha$.

■ В другом случае если положить $\beta = \pi/2$, $\gamma = \alpha$, то выражение (27) совпадает с выражением (23) после перемены в нем местами x и y .

ВПФ от свертки двух функций (общая форма)

Общая форма выражений для ВПФ свертки сигналов (функций) получается примерно таким же путем, как и ВПФ от произведения. При этом рассматривается общая форма свертки двух сигналов $s(t) = (s^{(1)} * s^{(2)})(t)$ с компонентами $s^{(1)}(t)$ и $s^{(2)}(t)$. Преобразование Фурье переводит свертку в произведение частотных форм сворачиваемых функций: $S(\omega) = \sqrt{2\pi} S^{(1)}(\omega) S^{(2)}(\omega)$. После этого вместо использования выражения (21) (как это делалось выше при выводе канонической формы ВПФ от свертки) преобразование осуществляется на основе выражения (27). Как отмечено при первом выводе ВПФ свертки, при использовании (27) нужно учитывать, что ВПФ частотной формы любой функции равно ВПФ самой функции при угле, уменьшенном на $\pi/2$, т. е. действует символическое правило

$$\left\{ s(t) \xrightarrow{\text{ПФ}} S(\omega) \xrightarrow{\text{ВПФ}} S_\alpha \right\} \equiv \left\{ S(t) \xrightarrow{\text{ВПФ}} S_{\alpha-\pi/2} \right\}.$$

Выполнение соответствующих процедур в описанном порядке приводит к более общей форме выражения для вращаемого преобразования Фурье от свертки:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha}(u) = & \frac{\sqrt{1+j \operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{1+j \operatorname{tg} \beta} \sqrt{1+j \operatorname{tg} \gamma}} \times \\
& \times \exp[-j(u^2/2)(\sin \alpha \cos \alpha - \sin \gamma \cos \gamma) / \sin^2 \alpha] \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\beta}^{(1)}(v \cos \beta) S_{\gamma}^{(2)}[(u \sec \alpha - v) \cos \gamma] \times \\
& \times \exp[-j(v^2/2)(\sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma) - \\
& - juv \sin \gamma \cos \gamma / \cos \alpha] dv.
\end{aligned} \quad (28)$$

В выражении (28) для углов должно выполняться соотношение $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha$. Аналогично некоторым упрощениям, полученным выше для соотношения (27), могут быть рассмотрены два частных случая.

■ Для величины углов $\beta = \alpha, \gamma = 0$ ВПФ свертки принимает вид

$$\begin{aligned}
S_{\alpha}(u) = & e^{-j \frac{u^2}{2}} \operatorname{tg} \alpha \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^{(1)}(v \cos \alpha) s^{(2)}(u \sec \alpha - v) e^{-j(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha} dv.
\end{aligned}$$

Это выражение совпадает с (24) с заменой переменной $v \rightarrow \cos v \alpha$.

■ Аналогичное упрощение общего выражения для ВПФ свертки (28) получается для другого специального соотношения углов $\beta = 0; \alpha, \gamma = \alpha$. В этом случае (28) приобретает форму выражения (26), в котором меняются местами x и y .

ПРИМЕНЕНИЕ ВРАЩАЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ТИПОВЫХ СИГНАЛОВ

В качестве примеров выполнения ВПФ систематизированы результаты применения преобразования для группы сигналов с аналитической формой, которая часто встречается в практических приложениях, связанных с обработкой сигналов ИИС (табл. 2). Отсутствие в таблице импульса прямоугольной формы связано с тем, что сложность выражения его ВПФ слишком затрудняет практическое применение, и поэтому целесообразна непосредственная компьютерная реализация ВПФ прямоугольного импульса с использованием выражений (13), (14).

Табл. 2. Вращаемое преобразование Фурье для некоторых сигналов общего вида

№ п/п	Сигнал	Вращаемое преобразование Фурье с углом α
1	$\delta(t - \tau)$	$\sqrt{\frac{1-j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{j \frac{\tau^2 + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha - ju\tau \operatorname{cosec} \alpha}$, если α не является кратным π
2	1	$\sqrt{1+j \operatorname{tg} \alpha} e^{-j \frac{u^2}{2} \operatorname{tg} \alpha}$, если $\alpha - \pi/2$ не является кратным π
3	$e^{jv\tau}$	$\sqrt{1+j \operatorname{tg} \alpha} e^{-j \frac{v^2 + u^2}{2} \operatorname{tg} \alpha + juv \sec \alpha}$, если $\alpha - \pi/2$ не является кратным π
4	$e^{jc \frac{t^2}{2}}$	$\sqrt{\frac{1-j \operatorname{tg} \alpha}{1+c \operatorname{tg} \alpha}} e^{j \frac{u^2}{2} \frac{c - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}}$, если $\alpha - \operatorname{arctg} c - \pi/2$ не является кратным π
5	$e^{-t^2/2}$	$e^{-u^2/2}$
6	$H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$	$e^{-j n \alpha} H_n(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$, H_n — полином Эрмита
7	$e^{-c \frac{t^2}{2}}$	$\sqrt{\frac{1-j \operatorname{ctg} \alpha}{c - j \operatorname{ctg} \alpha}} e^{j \frac{u^2}{2} \frac{(c^2 - 1) \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} e^{-\frac{u^2}{2} \frac{c \operatorname{cosec}^2 \alpha}{c^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$

ВЗАИМОСВЯЗЬ ВРАЩАЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СИГНАЛА

Время-частотные распределения (ВЧР)⁷⁾ принадлежат различным классам, имеют определенное разнообразие типов [4] и служат одной из форм обработки и анализа нестационарных сигналов в ИИС. Встречается применение ВЧР (а точнее время-частотных преобразований) и в других областях (от оптики и обработки информации радарного зондирования до квантовой механики). Наиболее важным можно считать ВЧР Вигнера⁸⁾, которое, помимо широты сферы потенциального применения, тесно связано со структурой других ВЧР, многие из которых могут быть выражены через ВЧР Вигнера [1, 11]. Здесь будет анализироваться связь ВЧР Вигнера с ВПФ.

ВЧР Вигнера W_s сигнала $s(t)$ определяется выражением (29) или (после замены переменной $t + \tau/2 \rightarrow \tau$) выражением (30):

$$W_s(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau/2) s^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (29)$$

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s^*(2t - \tau) e^{-2j\omega\tau} d\tau. \quad (30)$$

Соответствие масштабирования и смещения переменной сигнала (времени) с отражением этой процедуры в ВПФ представлено свойством 1 (табл. 1). Это соответствие позволяет сформировать соотношение (31):

$$s^*(2t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2j t^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2j z t \sin \alpha} K_{\alpha}(\tau, z) dz. \quad (31)$$

С учетом (31) выражение (30) для ВЧР Вигнера преобразуется сначала в форму соотношения (32), а затем в форму соотношения (33):

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) S_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2j t^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2j z t \sin \alpha} \times K_{\alpha}(\tau, z) e^{-2j\omega\tau} d\tau dz, \quad (32)$$

⁷⁾ Понятие время-частотного распределения (ВЧР) используется для обозначения результата процедуры время-частотного преобразования сигнала (формы его представления во время-частотной области). ВЧР здесь заменяет понятие время-частотного преобразования (ВЧП), чтобы избежать частого применения слова "преобразования" к обычному и к вращаемому (обобщенному) ПФ, к разновидностям ВЧП и преобразованию Радона.

⁸⁾ Это преобразование называют также преобразованием Вигнера—Вилле [3, 4].

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2j t^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2j z t \sin \alpha} \times \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2j\omega\tau} K_{\alpha}(\tau, z) d\tau dz. \quad (33)$$

Использование свойства (2) (табл. 1) позволяет снять внутреннее интегрирование в выражении (33) и привести его к виду (34):

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}(z + 2\omega \sin \alpha) S_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) \times e^{-2j(\omega^2 - t^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2j z t \sin \alpha - 2j z \omega \cos \alpha} dz. \quad (34)$$

Для получения конечного результата, выражающего связь ВЧР Вигнера сигнала $s(t)$ общего вида с вращаемым преобразованием Фурье этого сигнала, остается сначала сделать упрощение (34) и приведение его к виду (35) путем введения новой переменной $\varepsilon = z + 2\omega \sin \alpha$, а после этого в правой части (35) перейти к новой системе координат путем вращения время-частотной плоскости (t, ω) к новым переменным (u, v) (как это показано на рис. 1). Выполнение намеченной последовательности процедур дает сначала выражение (35):

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \times \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}(\varepsilon) S_{\alpha}^*(-\varepsilon + 2t \cos \alpha + 2\omega \sin \alpha) \times e^{2j(\omega^2 - t^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2j\varepsilon(t \sin \alpha - \omega \cos \alpha) - 4j\omega t \sin^2 \alpha} d\varepsilon. \quad (35)$$

А потом проведение замены переменных в правой части (35) от (t, ω) к (u, v) по соотношению (36), соответствующему вращению системы координат на угол α , дает возможность получить требуемую форму взаимосвязи ВЧР Вигнера с ВПФ в виде соотношения (37). Таким образом, осуществляемая замена переменных следует соотношению (36):

$$u = t \cos \alpha + \omega \sin \alpha; \quad v = -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha, \quad (36)$$

а конечное соотношение, выражающее ВЧР Вигнера через ВПФ с углом α , имеет вид

$$W_s(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}(\varepsilon) S_{\alpha}^*(2u - \varepsilon) e^{2jv\varepsilon} d\varepsilon. \quad (37)$$

Правая часть этого соотношения представляет ВЧР Вигнера для S_{α} , вычисленное с аргументами (u, v) . Левая часть — это ВЧР Вигнера сигнала s с аргументами (t, ω) . Таким образом, уравнение (37) показывает, что результат время-частотного преобразования Вигнера от S_{α} совпадает с ВЧР Вигнера для сигнала s , если принять во внимание вращение (на угол α), в силу которого использу-

ются различные оси координат в левой и правой частях этого уравнения. Фактически это эквивалентно тому, что ВЧР Вигнера для S_α равноценно ВЧР Вигнера для s , повернутому на угол $-\alpha$, т. е. просто равноценно ВЧР Вигнера для s , выраженному в новых координатах (u, v) .

То, что ВПФ вызывает простое вращение распределения Вигнера, является таким свойством вращаемого преобразования Фурье, которое лишней раз подтверждает правильность интерпретации действия ВПФ как выполнения вращения оси, вдоль которой представлен сигнал. Вместе с тем это свойство показывает, что после поворота (осей координат) ВЧР Вигнера остается распределением Вигнера.

Распределение Вигнера симметрично относительно времени и частоты. Дополнительно к этому соотношение (37) показывает, что справедлива не только симметрия между временем и частотой, но ВЧР Вигнера симметрично относительно вращения.

Как отмечено выше, многие время-частотные распределения могут быть получены из ВЧР Вигнера. Соотношения, определяющие взаимосвязь вращаемого преобразования Фурье с различными время-частотными распределениями, получаются на основе использования выражения этих ВЧР через ВЧР Вигнера и того факта, что ВПФ индуцирует вращение распределения Вигнера. С помощью этой схемы показано, например, что применение ВПФ (к сигналу) соответствует простому вращению (плоскости) аргументов ВЧР, называемого функцией двойственности [4].

СООТНОШЕНИЕ ВПФ С КРАТКОВРЕМЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ И СПЕКТРОГРАММОЙ

Кратковременное преобразование Фурье (КПФ) служит другим важным средством время-частотного анализа сигналов в информационных системах (например, при обработке речевых сигналов, которые являются нестационарными и не допускающими даже приближенного построения адекватной стационарной модели) и во многих других приложениях. Близкой по области использования является спектрограмма, определяемая как квадрат модуля КПФ⁹⁾.

Выполнение КПФ сигнала $s(t)$ осуществляется в соответствии с соотношением

$$\text{КПФ}_s(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (38)$$

в котором $w(t)$ — окно анализа¹⁰⁾. Окно анализа выбирается из соображений компромисса между разрешающей способностью по частоте и дисперсией оценки амплитуды текущего (время-частотного) состояния сигнала.

КПФ может также вычисляться на основе использования значений классического преобразования Фурье сигнала $s(t)$. Соотношение (39), которое служит для этой цели, является отражением одного из свойств КПФ:

$$\begin{aligned} \text{КПФ}_s(t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} S(v) W^*(\omega - v) e^{jv t} dv, \end{aligned} \quad (39)$$

где S и W — ПФ сигнала s и окна w , т. е. $S(v) = (Fs)(v)$ и $W(\omega - v) = (Fw)(\omega - v)$.

Уравнение (39) сходно с (38) за исключением множителя $e^{-j\omega t}$. Эта асимметрия между временем и частотой мешает выполнению прямого непосредственного вращения время-частотной плоскости для получения соотношения, определяющего взаимосвязь КВПФ сигнала и ВПФ (с углом α) сигнала и ВПФ окна ($W_\alpha = F_\alpha w$). Для того чтобы исключить нежелательную асимметрию, вводится модифицированное КПФ (удобное сокращение — МКПФ). Модификация состоит в перераспределении фазового множителя $e^{-j\omega t}$ поровну между двумя формами (38) и (39) представления КВПФ. Таким образом, выполнение МКПФ определяется любым из двух соотношений (40) и (41):

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} S(v) W^*(\omega - v) e^{jv t} dv. \end{aligned} \quad (41)$$

¹⁰⁾ Как правило, окно анализа выбирается вещественным. Однако знак комплексной сопряженности (*) не только предполагает возможность использования комплекснозначного окна, но в большей степени соответствует случаю комплексного сигнала, например при представлении двумерного сигнала в виде одного комплекснозначного или в случае, если сигнал, анализируемый средствами ВПФ, сам уже является частотной формой, т. е. (возможно) комплекснозначной величиной преобразования Фурье некоторого первичного сигнала. Это же соображение относится, конечно, и к знакам комплексного сопряжения в выражениях для ВЧР Вигнера (например, в выражениях (30, 31, 37)).

⁹⁾ Более полная информация по разновидностям (классам и видам) время-частотных преобразований и по особенностям ВЧР, которые эти преобразования обеспечивают при представлении нестационарных процессов, может быть получена из работ [1, 2, 4].

При этом сохраняется симметрия между этими двумя соотношениями, поскольку теперь у каждого из них нет избыточного множителя, не уравновешенного в другом соотношении для МКПФ.

Взаимосвязь между вращаемым преобразованием Фурье и модифицированным кратковременным преобразованием Фурье выражается соотношением

$$\text{МКПФ}_s(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{uv}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(z) W_a^*(u-z) e^{-jzv} dz, \quad (42)$$

где $W_a(u-z)$ — ВПФ с углом α окна преобразования сигнала (методом КПФ)¹¹⁾. Метод получения этого соотношения показан в Приложении.

Соотношение (42) отражает следующее (после анализированных выше) свойство ВПФ. Правая часть в (42) является МКПФ от S_α , вычисленного с окном W_α и с аргументами (u, v) . Левая часть — это МКПФ сигнала $s(t)$, вычисленное с окном w и с аргументами (t, ω) . Аналогично случаю с распределением Вигнера это соотношение показывает, что МКПФ от S_α по сути дела такое же, как МКПФ от s , если принять во внимание вращение. Другими словами, МКПФ от S_α является повернутой копией МКПФ от s , или она просто эквивалентна МКПФ от s , выраженному в повернутых (на угол α) осях (u, v) . Это обстоятельство служит дополнительным подтверждением правильности интерпретации ВПФ как оператора вращения (на угол α , для которого выполняется ВПФ).

Спектрограмма представляет ВЧР, выполнение которого соответствует квадрату модуля КПФ или квадрату модуля модифицированного КПФ (КПФ и МКПФ отличаются между собой на фазовый множитель $\exp(j\omega t/2)$, и его модуль равен единице). Поэтому результат, полученный для МКПФ, позволяет заключить, что действие ВПФ на спектрограмму равноценно действию ВПФ на МКПФ: спектрограмма от S_α , вычисленная с окном W_α , является повернутым вариантом спектрограммы, вычисленной с окном w .

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВРАЩАЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Одним из примеров применения ВПФ может служить изучение фильтров с качающейся частотой.

¹¹⁾ Когда вычисляется МКПФ от S_α , используется (как видно из (42)) преобразованное окно W_α . При этом даже при вещественном окне w его ВПФ W_α будет чаще всего комплексным. Если используется окно в форме гауссиана $w = \exp(-t^2/2)$, то его ВПФ W_α будет просто равно w при любом α . Поэтому в этом случае ВПФ вызывает простое вращение для МКПФ без какого-либо изменения окна.

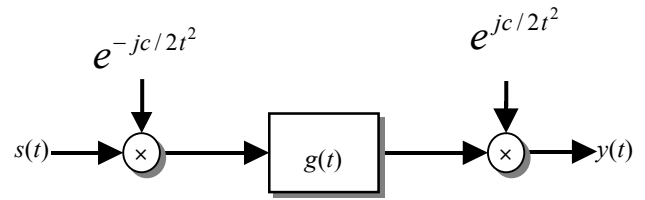


Рис. 2. Представление системы с качающейся частотой. Входной сигнал сначала модулируется экспоненциальным множителем с линейно изменяющейся мгновенной частотой, затем передается через линейный времянезависимый фильтр, и сигнал, выходящий после фильтра, модулируется таким же экспоненциальным множителем с противоположным знаком показателя экспоненты. Постоянная c управляет скоростью развертки ("качания") частоты системы

Эти фильтры используются, в частности, в анализаторах частоты для высокочастотных сигналов. Фильтры с качающейся частотой — это линейные изменяющиеся во времени (динамические) системы, которые могут быть представлены в форме, показанной на рис. 2.

Фильтры с качающейся частотой могут описываться своей импульсной передаточной функцией (зависящей от времени). Для времени τ поступления сигнала такая передаточная функция будет иметь выражение (43):

$$h(t, \tau) = e^{j(c/2)(t^2 - \tau^2)} g(t - \tau), \quad (43)$$

где $g(t)$ — импульсная передаточная функция фильтра, инвариантного к сдвигу времени (рис. 2). Выход фильтра с качающейся частотой определяется выражением

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t, \tau) d\tau. \quad (44)$$

Чтобы получить соотношение между вращаемыми преобразованиями Фурье входного и выходного сигналов фильтра с качающейся частотой, можно выполнить (в соответствии с выражениями (13, 14)) ВПФ с углом $\alpha = -\arctg c$ выходного сигнала фильтра $y(t)$, используя при этом его выражение (43). Преобразования, связанные процедурой выполнения ВПФ таким способом, представляют последовательность соотношений

$$Y_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1 - j \ctg \alpha}{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\frac{t^2 - \tau^2}{2} \ctg \alpha} g(t - \tau) e^{j\frac{t^2 + u^2}{2} \ctg \alpha - jut \operatorname{cosec} \alpha} dt d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-j u t \operatorname{cosec} \alpha} dt d\tau = \\
&= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} e^{-j u t \operatorname{cosec} \alpha} G(u \operatorname{cosec} \alpha) d\tau. \quad (45)
\end{aligned}$$

Первое и последнее звенья в цепи соотношений (45) дают взаимосвязь образов вращаемого преобразования Фурье для входного сигнала s , выходного сигнала u и передаточной функции g инвариантного блока фильтра с качающейся частотой. Эта взаимосвязь определяется выражением

$$Y_a(u) = S_a(u) G(u \operatorname{cosec} \alpha), \quad (46)$$

в котором G — обычное преобразование Фурье импульсной передаточной функции g , т. е. $G(u \operatorname{cosec} \alpha) = (Fg)(u \operatorname{cosec} \alpha)$. В связи с этим $G(u \operatorname{cosec} \alpha)$ интерпретируется как передаточная функция фильтра с качающейся частотой в области ВПФ. Использование ВПФ и этой передаточной функции позволяет анализировать фильтры с качающейся частотой таким же образом, как и обычные (инвариантные к сдвигу времени) фильтры анализируются с помощью преобразования Фурье.

Свойство тесной взаимосвязи ВПФ с время-частотными распределениями используется для улучшения их функциональных характеристик. В этом направлении осуществляется такая модификация ВЧР, при которой эти распределения имеют обобщенные маргиналы (частные распределения при проинтегрированной одной из переменных). Эти маргиналы рассматриваются не в привычной время-частотной области, а в области ВПФ, т. е. при вращении исходной системы координат. В результате у модифицированной формы ВЧР с обобщенными маргиналами значительно меньше (или просто нет) элементов интерференции, которые иногда затрудняют интерпретацию динамического спектра наиболее сложных нестационарных сигналов.

Кроме обработки сигналов в ИИС, к области приложения методов ВПФ относится решение некоторого класса дифференциальных уравнений, связанных с оптикой и квантовой механикой [6–9]. ВПФ сравнительно легко выполняется оптическим методом, и использование этого метода для осуществления в области ВПФ ряда операций (свертки, фильтрации, мультиплексирования сигналов) в отдельных случаях дает лучшие результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ концепции, элементов прикладной теории и свойств вращаемого преобразования Фурье (ВПФ) показывает, что метод ВПФ является обобщением традиционного преобразования Фурье. Это линейное преобразование зависит от параметра α и может интерпретироваться как вращение на угол α время-частотной плоскости. При этом для $\alpha = \pi/2$ ВПФ совпадает с традиционной формой преобразования Фурье (ПФ); для $\alpha = 0$ ВПФ соответствует единичному оператору (оставляющему сигнал без изменения). Выполняется свойство аддитивности параметра ВПФ: последовательное применение ВПФ с углами α и β эквивалентно одной операции ВПФ с углом $\alpha + \beta$. Показано, что операция ВПФ при применении ее к время-частотному распределению Вигнера или к кратковременному преобразованию Фурье вызывает вращение плоскости переменных (время—частота), сохраняя структуру формирования этих преобразований.

Отображение сигнала в область ВПФ дает представление сигнала в ортонормированном базисе, который образован набором смещенных по времени сигналов с быстро меняющимся значением текущей частоты.

Проанализирован метод получения нескольких форм аналитических соотношений, которые определяют взаимосвязь ВПФ произведения сигналов с ВПФ и ВП компонент-сомножителей. Таким же образом проанализирован метод получения аналогичных соотношений для свертки двух сигналов.

Показано, как типовые виды преобразования сигнала (временное запаздывание или изменение временного масштаба, частотное модулирование, дифференцирование или интегрирование) отражаются на виде ВПФ сигнала. Дана аналитическая форма ВПФ некоторых сигналов (типа δ -функции, гармонического и импульсно-экспоненциального сигналов, сигнала с линейно изменяющейся частотой).

К области применения методов ВПФ относится обработка сигналов ИИС (свертка, фильтрация, мультиплексирование); использование таких же операций на основе оптической технологии с получением быстрого результата при высокой точности, а также решение некоторого класса дифференциальных уравнений, связанных с оптикой и квантовой физикой.

Приложение.

ИЗМЕНЕНИЕ ВПФ, СВЯЗАННОЕ С ИЗМЕНЕНИЕМ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ АНАЛИЗИРУЕМОГО СИГНАЛА

Часто встречающаяся необходимость измене-

ния временного масштаба анализируемого сигнала требует возможности использования в этих случаях аналитической формы ВПФ модифицированного (масштабированного) сигнала, исходя из начального вида ВПФ сигнала. Таким образом, целесообразно получить ВПФ $s_{масшт.}(t) = s(ct)$, где c — параметр изменения временного масштаба сигнала. (При $c > 1$ это — сжатие сигнала, а при $c < 1$ — растяжение). Как и в основном тексте, удобнее обозначить масштабированный сигнал через $y(t)$: $y(t) \equiv s_{масшт.}(t) = s(ct)$. Вычисление ВПФ $(F_\alpha y)(u) \equiv (F_\alpha s_{масшт.})(u)$ может быть проведено на основе использования выражения (14), которое определяет ВПФ через его ядро. При этом в качестве переменной интегрирования используется t' , поскольку будет проводиться ВПФ на функции $s(ct)$:

$$Y_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(ct') e^{j \frac{t'^2 + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} e^{-ju t' \operatorname{cosec} \alpha} dt'. \quad (\text{П1})$$

Последующие этапы получения выражения ВПФ масштабированного сигнала $s(ct)$ сводятся к введению новой переменной $t \rightarrow ct'$, а точнее

$t' \rightarrow t/c$, и к определению нового значения переменной β , связанной с углом α выражением $\beta = \arccot[(\operatorname{ctg} \alpha)/c^2] = \arctg(c^2 \operatorname{tg} \alpha)$.

■ Замена переменной $t' \rightarrow t/c$ в соотношении (П1) приводит к (П2):

$$\begin{aligned} Y_\alpha(u) &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \frac{1}{|c|} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j \frac{(t^2/c^2) + u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} e^{-ju(t/c) \operatorname{cosec} \alpha} dt = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j \frac{t^2 + c^2 u^2}{2} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{c^2} - ju \frac{t}{c} \operatorname{cosec} \alpha} dt. \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

■ После определения $\beta = \arccot[(\operatorname{ctg} \alpha)/c^2] = \arctg(c^2 \operatorname{tg} \alpha)$ можно получить последовательность соотношений (П3–П7), каждое из которых является результатом небольших преобразований предшествующего выражения:

$$Y_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j \frac{t^2 + c^2 u^2}{2} \operatorname{ctg} \beta} e^{-ju \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta} \operatorname{cosec} \beta} dt = \quad (\text{П3})$$

$$= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j \frac{t^2 + \left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta}\right)^2}{2} \operatorname{ctg} \beta - j \left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta}\right) t \operatorname{cosec} \beta - j \frac{\left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta}\right)^2}{2} \operatorname{ctg} \beta + j \frac{c^2 u^2}{2} \operatorname{ctg} \beta} dt = \quad (\text{П4})$$

$$= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi c^2}} e^{j \frac{c^2 u^2}{2} \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha}{c^4 \operatorname{cosec}^2 \beta}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j \frac{t^2 + \left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta}\right)^2}{2} \operatorname{ctg} \beta - j \left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta}\right) t \operatorname{cosec} \beta} dt = \quad (\text{П5})$$

$$= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 (1 - j \operatorname{ctg} \beta)}} e^{j \frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha}{c^4 \operatorname{cosec}^2 \beta}\right)} S_\beta \left(u \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{c \operatorname{cosec} \beta} \right) = \quad (\text{П6})$$

$$= \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 - j \operatorname{ctg} \alpha}} e^{j \frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}\right)} S_\beta \left(u \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha} \right). \quad (\text{П7})$$

Объединение в этой цепочке соотношений левой части выражения (П3) и выражения (П7) приводит к (П8), которое отражает правило (алгоритм) получения новой аналитической формы ВПФ, выражающейся через ВПФ исходного сигнала при изменении в нем масштаба времени:

$$Y_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 - j \operatorname{ctg} \alpha}} e^{j \frac{u^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}\right)} S_\beta \left(u \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha} \right). \quad (\text{П8})$$

Это свойство приведено под номером 8 в табл. 1 основного текста.

СООТНОШЕНИЕ ВПФ СИГНАЛА С ЕГО МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФОРМОЙ КРАТКОВРЕМЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Одним из достаточно часто применяемых время-частотных распределений (ВЧР) нестационарных сигналов ИИС является кратковременное

преобразование Фурье (КПФ). Поскольку анализ методов ВПФ показывает тесную связь этого типа преобразований с ВЧР, то полезно проследить логику аналитического построения соотношения, которое определяет связь КПФ сигнала с его вращаемым преобразованием Фурье.

Как отмечено в основном тексте, для получения такого соотношения целесообразно использовать так называемую симметризованную (относительно КПФ, выраженного через частотные формы сигнала и окна преобразования) форму КПФ. Эта форма условно называется модифицированным кратковременным преобразованием Фурье (МКПФ), и ее отличие от "простого" КПФ состоит во введении дополнительного гармонического множителя:

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= e^{j\frac{\omega t}{2}} \text{КПФ}_s(t, \omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Получение соотношения, определяющего взаимосвязь ВПФ и МКПФ сигнала, начинается с выражения (32), в котором заменяется сигнал $s(t)$ на его ВПФ S_α с углом $-\alpha$:

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(z) K_{-\alpha}(z, \tau) dz \right] w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(z) \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^*(z, \tau) w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dz. \quad (\text{П9}) \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в (П9) представляет из себя комплексно-сопряженную величину ВПФ с углом α от конструкции $w(t - \tau)e^{j\omega\tau}$, рассматриваемой как функция аргумента τ . Это ВПФ вычислено для значения z . Если использовать правило получения ВПФ для сигнала с временным запаздыванием и для сигнала, модулированного частотой ω (свойства 1 и 2 из табл. 1), то можно преобразовать этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^*(z, \tau) w^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= W_\alpha^*(-z + t \cos \alpha + \omega \sin \alpha) \times \\ &\times e^{j\frac{\omega^2 - t^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + jz(t \sin \alpha - \omega \cos \alpha) - j\omega t \sin^2 \alpha}. \quad (\text{П10}) \end{aligned}$$

Поэтому соотношение, выражающее взаимосвязь (модифицированного) кратковременного преобразования Фурье с ВПФ сигнала, определя-

ется выражением (П11), а затем при замене переменных (ω, t) на (u, v) (которые связаны между собой поворотом системы координат по (36)¹²⁾) соотношение (П11) приобретает окончательную форму в виде выражения (П12). Таким образом, использование (П9) и (П10) приводит МКПФ_s к виду

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(z) W_\alpha^*(-z + t \cos \alpha + \omega \sin \alpha) \times \\ &\times e^{j\frac{\omega^2 - t^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + jz(t \sin \alpha - \omega \cos \alpha) - j\omega t \sin^2 \alpha} dz, \quad (\text{П11}) \end{aligned}$$

а замена переменных $(\omega, t) \rightarrow (u, v)$ в этом соотношении дает компактную форму одного из свойств ВПФ, которое выражает связь время-частотного распределения МКПФ с вращаемым преобразованием Фурье сигнала:

$$\begin{aligned} \text{МКПФ}_s(t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{uv}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(z) W_\alpha^*(u - z) e^{-jzv} dz. \quad (\text{П12}) \end{aligned}$$

Это соотношение завершает вывод аналитической формы свойства связи (модифицированного) кратковременного преобразования Фурье с вращаемым преобразованием Фурье сигнала и ВПФ окна преобразования. Выражение (П12) соответствует выражению (42) основного текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hlawatsch F., Boudreaux-Bartels G.F. Linear and quadratic time-frequency signal representation // IEEE Signal Processing Magazine. 1992. V. 9, N 4. P. 21–67.
2. Loughlin P. Non negative time-frequency representation // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. V. 42, N 10. P. 2697–2701.
3. Guanaud G.C., Strifors H.C. Signal analysis by means of time-frequency transformation of Wigner type // Proceedings of IEEE. 1996. V. 84, N 9. P. 1231–1247.
4. Меркушева А.В. Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные

¹²⁾ Для удобства прочтения деталей последовательности преобразований, ведущих к основному соотношению МКПФ с ВПФ сигнала, здесь воспроизводятся два выражения из (28) для связи переменных (ω, t) и (u, v) при вращении системы координат (время-частотной плоскости) на угол α :

$$u = t \cos \alpha + \omega \sin \alpha; \quad v = -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha.$$

- преобразования // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 59–70.
5. *Wiener N.* Hermit polynomials and Fourier analysis // *Journal of Mathematical Physics MIT*. 1929. V. 8. P. 70–73.
 6. *Namias V.* The fractional Fourier transform and its application to quantum mechanics // *Journal of Institute of Mathematical Applications*. 1980. V. 25. P. 241–265.
 7. *McBride A.C., Kerr F.H.* On Namias' fractional Fourier transforms // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1987. V. 39. P. 159–175.
 8. *Mendlovic D., Ozaktas H.M.* Fractional Fourier transformations and their optical applications // *Journal of Optical Society of America A*. 1993. V. 10. P. 1875–1881.
 9. *Cincott G., Gori F., Santarsiero M.* Generalized self-Fourier functions // *Journal of Physics A*. 1992. V. 25. P. 1191–1194.
 10. *Almeida L.B.* The fractional Fourier transform and time-frequency representations // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1994. V. 42. P. 3084–3091.
 11. *Меркушева А.В.* Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. I. Элементы теории // *Научное приборостроение*. 2002. Т. 12, № 2. С. 50–58.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 28.03.2005.

ANALYTICAL FORMS OF SIGNAL PROCESSING FOR IMS BASED ON GENERALIZED MODIFICATION OF THE FOURIER TRANSFORM

A. V. Merkusheva

Saint-Petersburg

Generalized modification of the traditional Fourier transform (rotational Fourier transform, RFT) introduced by mathematicians comparatively long ago remained long unknown in the field of signal processing where RFT has quite a great potential for application. RFT depends on parameter α and is interpreted as time-frequency plane rotation. For $\alpha = \pi/2$, RFT is a usual Fourier transform, for $\alpha = 0$ — identity operator, and the angles of RFT implemented sequentially are additive (as the angles of successive rotation). In analytical representation, RFT is a series expansion of signal in the basis consisting of a set of signals with rapidly changing frequency (into SRCF components). The basic elements of the theory of RFT, its properties, types of interpretation as operator, interrelations of RFT with time-frequency distributions of non-stationary signals (with Wigner' distribution, short-time Fourier transform and spectrogram). These relations have closed analytical forms. RFT examples for some signals and RFT applications are given.