

УДК 004.932: 512.81: 621.318.4

© М. Я. Марусина, Н. Д. Скалецкая, А. О. Казначеева

КОРРЕКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ТОМОГРАФИИ

Рассмотрены вопросы коррекции пространственных искажений томографических изображений. Для коррекции искажений применен аппарат теории групп Ли. Преобразование изображений выполнено с помощью аффинной и проективной групп, а также с помощью импримитивной группы № 19. Проанализирована проблема точного и однозначного определения координат реперных точек на произвольных изображениях.

ВВЕДЕНИЕ

Основная проблема при совмещении изображений объектов в томографии заключается в том, что разные изображения одного и того же объекта могут существенно отличаться друг от друга. Причинами этих отличий являются искажения, связанные с техническими погрешностями системы получения и передачи изображения, яркостные искажения, вызванные изменением освещенности распознаваемого объекта, и пространственные искажения, связанные с изменением взаимного положения в пространстве исследуемого объекта и устройства получения изображения.

В силу того что пространственные искажения изображений меняются плавно, их можно описать некоторыми непрерывными групповыми преобразованиями [1, 2, 3]. Покажем, что группы Ли являются эффективным математическим аппаратом при решении задач обработки изображений исследуемых объектов, полученных с помощью магнитно-резонансных (МРТ), позитронно-эмиссионных (ПЭТ) и рентгеновских компьютерных томографов (РКТ).

Анализ групп преобразований и возможных изменений их параметров позволяет выделить следующие подходы к решению задачи коррекции пространственных искажений [4]: разложение полной группы преобразования на подгруппы и их последовательная компенсация; нахождение параметров полной группы преобразований по координатам характерных (реперных) точек на изображении исследуемого объекта.

Проблема выбора реперных точек изображений является актуальной, потому как общий способ их определения на произвольных изображениях неизвестен. Зная эти точки, можно не только преобразовывать и совмещать изображения, полученные в процессе определенного томографического исследования, но и совмещать изображения, полученные различными томографическими методами.

ГРУППЫ ЛИ НА ПЛОСКОСТИ

Группы Ли на плоскости делятся на два класса: примитивные и импримитивные (С. Ли привел 38 основных типов групп, В.С. Файн [2] — их конечные уравнения). К примитивным группам Ли относятся следующие.

— Аффинная группа:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a_1x + a_2y + b_1, \\ \tilde{y} = a_3x + a_4y + b_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$ — исходные и преобразованные аффинной группой координаты точки изображения, $a_1, \dots, a_4, b_1, b_2$ — параметры аффинной группы. При преобразовании аффинной группой сохраняется параллельность прямых.

— Аффинная унимодулярная группа: конечные уравнения те же, что и у аффинной группы, но с условием $a_1a_4 - a_2a_3 = 1$, которое обеспечивает сохранение площади изображения при таком преобразовании.

— Проективная группа:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{a_1x + a_2y + b_1}{a_5x + a_6y + 1}, \\ \tilde{y} = \frac{a_3x + a_4y + b_2}{a_5x + a_6y + 1}, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_1, \dots, a_6, b_1, b_2$ — параметры проективной группы. При преобразовании данной группой непрерывная линия на плоскости остается непрерывной, однако параллельность линий не сохраняется.

Основной особенностью импримитивных групп является то, что одна координата меняется по линейному закону, а вторая — по нелинейному. Из 20 импримитивных групп Ли на плоскости наибольшее распространение для целей опи-

сания искажений в силу своей универсальности получили группы № 13 и № 19 по классификации Ли—Файна [2].

— Импримитивная группа № 13:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a_1 x + b_1, \\ \tilde{y} = a_2 y + b_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3 + \dots + a_n x^{n-2}, \end{cases}$$

где n — число параметров группы.

— Импримитивная группа № 19:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{a_2 x + b_1}{1 - a_1 x}, \\ \tilde{y} = \frac{a_3 y + b_2 + a_4 x + a_5 x^2 + \dots + a_n x^{n-3}}{(1 - a_1 x)^{n-3}}, \end{cases} \quad (3)$$

где n — число параметров группы.

Кроме основных групп, на плоскости могут действовать группы, сопряженные с перечисленными [3, 5, 6].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ АФФИННОЙ ГРУППОЙ

Аффинное преобразование плоскости задается системой линейных уравнений (1). Если значения параметров $a_1, \dots, a_4, b_1, b_2$ элемента g аффинной группы G ($g \in G$) известны, то восстановление изображения не вызывает проблем. Достаточно применить аффинное преобразование $X' = g * X$ последовательно ко всем точкам X : (x, y) восстанавливаемого изображения [1].

Если известны координаты трех соответственных точек на двух изображениях, то, сравнивая их координаты на искаженном изображении с координатами на исходном изображении, можно составить для каждой пары точек по два уравнения вида

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = a_1 x_i + a_2 y_i + b_1, \\ \tilde{y}_i = a_3 x_i + a_4 y_i + b_2, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, 3$, из которых вычисляются все шесть параметров аффинной группы, после чего искаженное изображение подвергается преобразованию элементом g^{-1} :

$$\begin{cases} x = \frac{a_4(\tilde{x} - b_1) + a_2(b_2 - \tilde{y})}{a_1 a_4 - a_2 a_3}, \\ y = \frac{-a_3(\tilde{x} - b_1) - a_1(b_2 - \tilde{y})}{a_1 a_4 - a_2 a_3}, \end{cases}$$

что позволяет нейтрализовать действие аффинной группы и восстановить исходное изображение.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППОЙ

Преобразование плоскости проективной группой задается системой дробно-линейных уравнений (2). Число параметров проективной группы равно восьми, следовательно, для нахождения этих параметров требуется знать положения до и после преобразования четырех точек на изображении: 1-1', 2-2', 3-3', 4-4'. Составив для каждой пары точек по два уравнения относительно параметров проективной группы, получим восемь уравнений вида

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = \frac{a_1 x_i + a_2 y_i + b_1}{a_5 x_i + a_6 y_i + 1}, \\ \tilde{y}_i = \frac{a_3 x_i + a_4 y_i + b_2}{a_5 x_i + a_6 y_i + 1}, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, 3, 4$. Решение системы из восьми уравнений позволяет найти параметры проективной группы. Выразив x и y через $\tilde{x}, \tilde{y}, a_1, \dots, a_6, b_1, b_2$, найдем обратное преобразование g^{-1} , восстанавливающее положение всех точек на изображении:

$$\begin{cases} x = \frac{(b_1 - \tilde{x})(\tilde{y} a_6 - a_4) - (b_2 - \tilde{y})(\tilde{x} a_6 - a_2)}{(\tilde{x} a_5 - a_1)(\tilde{y} a_6 - a_4) - (\tilde{y} a_5 - a_3)(\tilde{x} a_6 - a_2)}, \\ y = \frac{(b_1 - \tilde{x})(\tilde{y} a_5 - a_3) - (b_2 - \tilde{y})(\tilde{x} a_5 - a_1)}{(\tilde{x} a_6 - a_2)(\tilde{y} a_5 - a_3) - (\tilde{y} a_6 - a_4)(\tilde{x} a_5 - a_1)}. \end{cases}$$

ОШИБКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ РЕПЕРНЫХ ТОЧЕК

При работе с томографическими изображениями координаты реперных точек, как правило, определяются с ошибкой, которая приводит к ошибке при определении параметров группового преобразования и, как следствие, к ошибке коррекции координат всех точек изображения [4, 7]. Зависимость ошибки коррекции пространственных искажений точек изображения (Δl) от величины ошибки определения координат реперов (Δr) носит прямо пропорциональный характер, причем коэффициент пропорциональности зависит от вида группового преобразования.

Необходимо отметить, что в случае одинаковой величины Δr для всех реперов при аффинном преобразовании все точки изображения имеют одинаковую ошибку коррекции Δl , а при проективном величина ошибки зависит от положения точки на плоскости. На практике Δr , как правило, отличаются для каждого репера, но характер прямой пропорциональной за-

висимости между Δr и Δl для точек плоскости сохраняется.

Методы коррекции пространственных искажений изображений, основанные на вычислении параметров обратного преобразования по координатам характерных точек, позволяют скомпенсировать искажения, описываемые полной аффинной и проективной группами. Избыточность реперных точек позволяет значительно повысить точность вычисления параметров преобразования

КОРРЕКЦИЯ ИСКАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕПЕРНЫХ ТОЧЕК

Для описания методики коррекции пространственных искажений воспользуемся МРТ-снимками фантома, полученными на МР-томографе GE Signa Infinity 1.5 Тл (рис. 1). Фантом представляет собой шесть шприцев, заполненных водой и жестко скрепленных между собой.

Выберем на изображениях реперные точки и относительно них найдем параметры группового преобразования. Вычисленные параметры применим к центральным точкам элементов фантома и

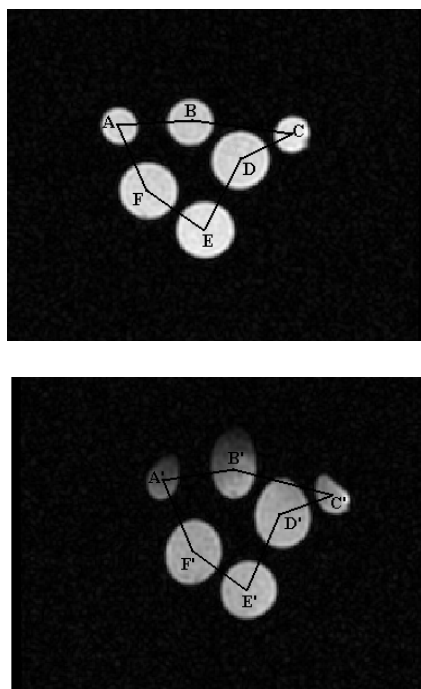


Рис. 1. Эталонное (а) и искаженное (б) изображения фантома. А, В, С, D, E, F — центры элементов фантома на эталонном изображении; А', В', С', D', E', F' — на искаженном изображении

проверим, соответствует ли преобразованное изображение снимку, полученному в процессе исследования. Погрешность определения координат точек $\Delta = \pm 1$ пикс. $= \pm 0.6$ мм.

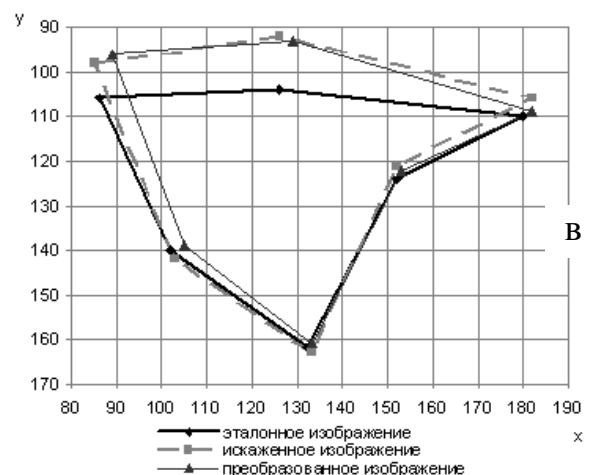
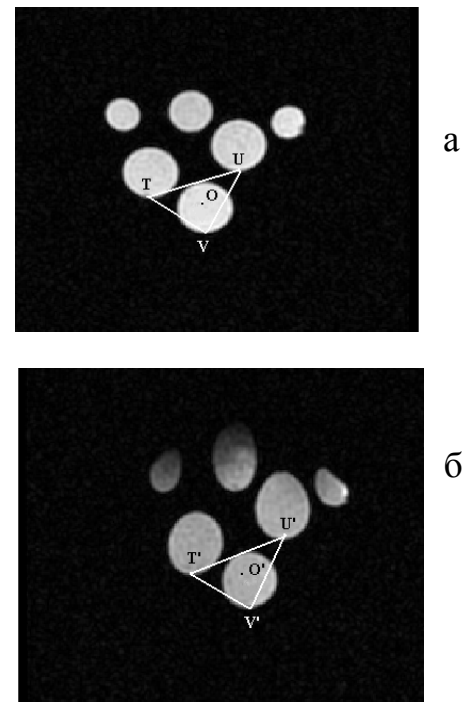
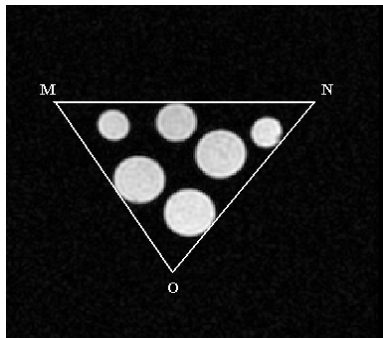


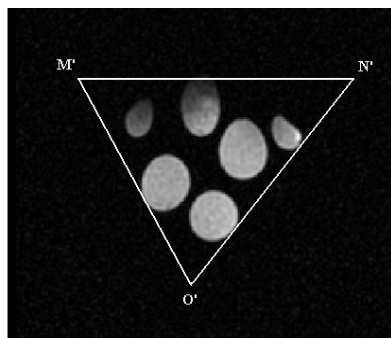
Рис. 2. Эталонное (а) и искаженное (б) изображения фантома. Т, U, V, O, Т', U', V', O' — реперные точки. в — положение точек фантома на плоскости после аффинного преобразования

Вычисление параметров аффинного преобразования

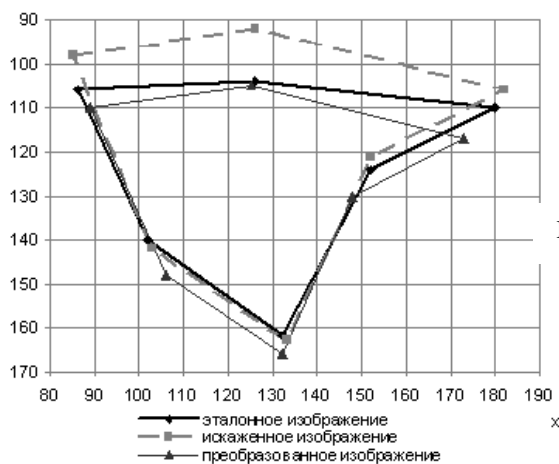
1. Предположим, что точки T, U, V эталонного изображения соответствуют точкам T', U', V' искаженного изображения (рис. 2). Выберем эти точки в качестве реперных и относительно них найдем параметры аффинного преобразования.



а



б



в

Рис. 3. Эталонное (а) и искаженное (б) изображения фантома. М, N, O, М', N', O' — реперные точки. в — положение точек фантома на плоскости после аффинного преобразования

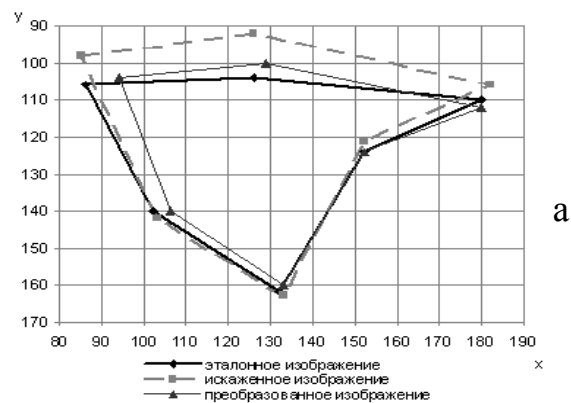
Параметры аффинного преобразования:
 $a_1 = 1.035$, $a_2 = 0.045$, $a_3 = -0.065$, $a_4 = 1.045$,
 $b_1 = -11.596$, $b_2 = 3.604$.

Рис. 2, в иллюстрирует положение центров элементов фантома на плоскости для эталонного, искаженного и преобразованного изображений.

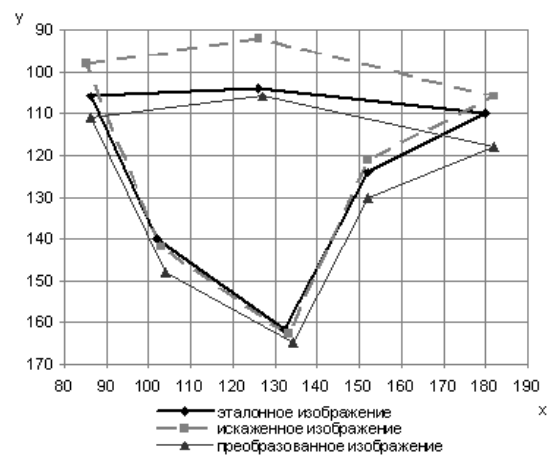
2. Предположим, что точки М, N, O эталонного изображения соответствуют точкам М', N', O' искаженного изображения (рис. 3). Выберем эти точки в качестве реперных и относительно них найдем параметры аффинного преобразования.

Параметры аффинной группы: $a_1 = 1.157$,
 $a_2 = -0.025$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1.179$, $b_1 = -15.46$,
 $b_2 = -32.071$.

Рис. 3, в иллюстрирует положение центров элементов фантома на плоскости для эталонного, искаженного и преобразованного изображений.



а



б

Рис. 4. Положение точек фантома на плоскости после проективного преобразования

Вычисление параметров проективного преобразования

1. Предположим, что точки T, U, V эталонного изображения соответствуют точкам T', U', V' искаженного изображения (рис. 2). Тогда точка O, являющаяся центром треугольника TUV, будет соответствовать точке O' — центру треугольника T'U'V'. Выберем эти четыре точки в качестве реперных и относительно них найдем параметры проективного преобразования.

Параметры проективной группы: $a_1 = 1.68$, $a_2 = 0.463$, $a_3 = 0.04$, $a_4 = 2.118$, $a_5 = 0.0008$, $a_6 = 0.003$, $b_1 = -88.947$, $b_2 = -89.384$.

Рис. 4, а иллюстрирует положение центров элементов фантома на плоскости для эталонного, искаженного и преобразованного изображений.

2. Предположим, что точки Q, R, S, T эталонного изображения соответствуют точкам Q', R', S', T' искаженного изображения (рис. 5). Выберем эти четыре точки в качестве реперных и относительно них найдем параметры проективного преобразования.

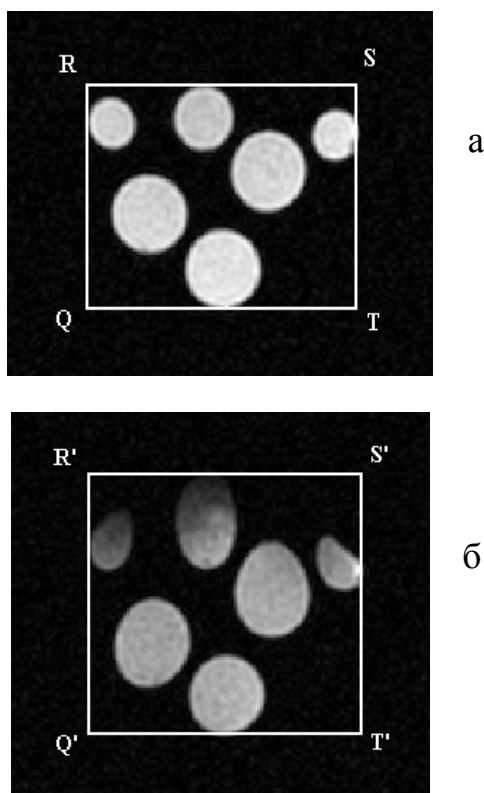


Рис. 5. Эталонное (а) и искаженное (б) изображения фантома. Q, R, S, T, Q', R', S', T' — реперные точки

Параметры проективного преобразования: $a_1 = 0.481$, $a_2 = 2.484 \times 10^{-7}$, $a_3 = -0.142$, $a_4 = 0.76$, $a_5 = -0.002$, $a_6 = 1.188 \times 10^{-9}$, $b_1 = 27.433$, $b_2 = 3.582$.

Рис. 4, б иллюстрирует положение центров элементов фантома на плоскости для эталонного, искаженного и преобразованного изображений.

Вычисление параметров импримитивной группы № 19

Преобразование плоскости импримитивной группой №19 задается системой уравнений (3). Предположим, что точки T, U, V эталонного изображения соответствуют точкам T', U', V' искаженного изображения (рис. 2). Выберем эти точки в качестве реперных и относительно них найдем параметры группового преобразования.

Параметры импримитивной группы № 19: $a_1 = -3.278 \times 10^{-3}$, $a_2 = 1.859$, $a_3 = 1.523$, $a_4 = 0.413$, $b_1 = -54.871$, $b_2 = -66.298$.

Рис. 6 иллюстрирует положение центров элементов фантома на плоскости для эталонного, искаженного и преобразованного изображений.

Различие преобразованного и эталонного изображений обусловлено, во-первых, тем, что координаты реперных точек найдены с ошибкой из-за невозможности их однозначного определения на произвольном изображении; во-вторых, на результаты оказывает влияние ошибка "размытия" искаженного изображения.

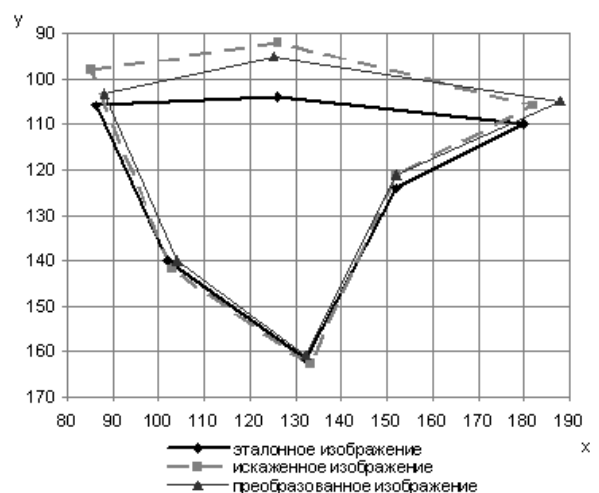


Рис. 6. Положение точек фантома на плоскости после преобразования импримитивной группой № 19

ВЫВОДЫ

Наилучшие результаты были получены после преобразования изображения импримитивной группой № 19, т. к. соответствующие четыре точки (A, D, E, F) на двух изображениях совместились. Несовпадение двух точек (B, C) обусловлено сильным "размытием" искаженного изображения. Поэтому наиболее достоверные данные могут быть получены при комбинации различных групповых преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайцев В.Ф.* Введение в современный групповой анализ. 2 ч. Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы: Учебное пособие. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена, 1996. 83 с.
2. *Файн В.С.* Опознавание изображений: Основы непрерывно-групповой теории и ее применение. М.: Наука, 1970. 296 с.
3. *Чеботарев И.Г.* Теория групп Ли. М.: ГИТТЛ, 1940. 396 с.
4. *Ерош И.Л.* Элементы теории дискретных групп: Учебное пособие. СПб.: СПбГУАП, 1998. 40 с.
5. *Иванов В.А., Марусина М.Я.* Применение теории групп при решении задач реализации измерительных преобразований // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 6. С. 36–39.
6. *Иванов В.А., Марусина М.Я., Липиньски А.Г.* Групповые свойства измерительных преобразований // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 5. С. 32–35.
7. *Иванов В.А., Марусина М.Я., Флегонтов А.В.* Инвариантные аппроксимации и их применение в МР-томографии // Научное приборостроение. 2003. Т. 13, № 2. С. 22–26.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики

Материал поступил в редакцию 21.03.2005.

SPATIAL DISTORTION CORRECTION IN TOMOGRAPHY

M. Ya. Marusina, N. D. Skaletskaya, A. O. Kaznacheeva

Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics

The questions of tomography image distortion correction are considered. The Lee group theory tools are used for image correction. Image transformation is done with the help of affine and projective groups and imprimitive group No. 19. The problem of precise and unequivocal definition of fiducial points coordinates on arbitrary images is analyzed.