

УДК 534.23

© Б. П. Шарфарец

О ВОЗМОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Приведены выражения, позволяющие представить логарифм показателя преломления в двумерно-неоднородной среде в виде суммы гармонической и негармонической функций. На примере трехмерного клина, расчет поля в котором приводит к системе двумерных уравнений Гельмгольца, продемонстрировано, что негармонические составляющие логарифмов показателей преломления этих уравнений остаются пренебрежимо малыми в достаточно широком диапазоне углов раскрытия клина.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой было показано, что в случае, если в конечной области $D \in R^2$ неоднородного двумерного пространства, включающей протяженный излучатель, показатель преломления $n(x, y)$, $x, y \in D$ подчиняется условию: $\ln n(x, y)$ — гармоническая функция, то поле излучателя в оставшейся области $R^2 \setminus D$ в неособых точках может быть представлено в виде геометрикооптического ряда. Однако на практике это условие может не выполняться. Тогда возникает задача представления в области D функции $\ln n(x, y)$ в виде суммы гармонической и негармонической составляющих, и, если последняя много меньше по абсолютной величине, чем гармоническая составляющая, то следует ожидать, что поле протяженного излучателя в области $R^2 \setminus D$ по-прежнему достаточно точно опишется геометрикооптическим рядом.

Таким образом, возникает задача представления

$$u(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y) \in D, \quad (1)$$

где $u = \ln n(x, y)$, φ — гармоническая функция, функции $u, \phi \in C^2(D)$, и если представление (1) не единственно, то возникает задача его оптимизации в каком-либо смысле.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ ГАРМОНИЧЕСКОЙ И НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Вначале выясним вопрос о единственности представления (1). Пусть в конечной области $D \in R^2$ с кусочно-гладкой границей задана функ-

ция $u(\mathbf{r}) \in C^2(D)$ (отметим, что на границе S области D требования к гладкости $u(\mathbf{r})$ могут быть ослаблены). Необходимо выяснить вопрос о единственности представления (1).

Для решения этого вопроса воздействуем на сумму (1) оператором Лапласа

$$\Delta u = \Delta \varphi + \Delta \phi. \quad (2)$$

Учитывая, что для гармонической функции φ справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0,$$

имеем

$$\Delta u = \Delta \phi = -f(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$\Delta \phi = -f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D.$$

Известно, что при сделанных допущениях справедлива следующая формула Грина в виде трех логарифмических потенциалов [2]

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{2\pi} \int_D \Delta u(\mathbf{r}_1) \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial u(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}} - \right. \\ & \left. - u(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{r_1}} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right] dS_{r_1}, \\ & \mathbf{r} \in D. \end{aligned} \quad (4)$$

В приведенном выражении интегралы по границе (потенциалы простого и двойного слоев) представляют собой гармонические внутри области D функции, и лишь первый интеграл (потенциал площади) гармонической функцией не является

и исчезает в случае, если функция u является гармонической [2].

Таким образом, негармоническая составляющая представления (4) функции u определяется с учетом замены лапласиана в потенциале площади на правую часть из (3) в следующем виде:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} f(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Покажем далее, что разложение (4) может быть получено как результат решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона (3) со следующим краевым условием:

$$u(\mathbf{r})|_S = u_0(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Решение задачи (3), (6) единственно и равно [2]

$$u(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_{r_1}} u_0(\mathbf{r}_1) dS_{r_1}, \quad (7)$$

где

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \quad (8)$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in D.$$

Здесь $E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2 ; $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — гармоническая функция в D , удовлетворяющая условию

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \Big|_{\mathbf{r} \in S}. \quad (9)$$

После подстановки в (7) вместо функции G ее значения в виде суммы (8), преобразования интеграла

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \int_D g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \\ &= - \int_D g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Delta u(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = - \int_D u(\mathbf{r}_1) \Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \\ &+ \int_S \left[\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_{r_1}} u_0(\mathbf{r}_1) - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial u_0(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}} \right] dS_{r_1}, \end{aligned}$$

учета равенства (9) для функции g на границе, ее симметрии по обеим переменным и гармоничности в области D [2] приходим от решения (7) задачи Пуассона с условием Дирихле в точности к сумме (4) негармонической (5) и гармонической составляющих. Единственность решения соответ-

ствующей задачи Дирихле для уравнения Пуассона (3), (6) подтверждает единственность разложения (4).

Отметим далее, что подстановка негармонической составляющей ϕ (5) в интегралы по границе (гармоническую составляющую) формулы Грина (4) приводит к ожидаемому результату

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}} - \phi(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{r_1}} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right] d\mathbf{r}_1 = 0,$$

что говорит о полном отсутствии в этой функции гармонической составляющей. Этот результат легко получается после подстановки в последний интеграл выражения (5), изменения порядка интегрирования и применения второй формулы Грина [2, с. 329] к функциям $E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ и $E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$.

Таким образом, выражение (4) представляет собой искомого единственное разложение исходной функции u в виде суммы гармонической и негармонической составляющих.

Поскольку вопрос о единственности представления (1) решен положительно, то гармоническую составляющую нет необходимости вычислять из (4). Достаточно вычислить $\phi(\mathbf{r})$ из более простого выражения (5) и, воспользовавшись (1), найти гармоническую составляющую φ в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}).$$

Это тем более целесообразно, что не всегда может быть необходимо точно вычислять и интеграл (5), а достаточно получить его мажорантную оценку при максимальном по абсолютной величине значении функции $f(\mathbf{r})$. Так, например, в случае, когда $f(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$, а D представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq R^2$, справедлива оценка [3]

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \rho (R^2 \ln R - \frac{R^2 - r^2}{2}). \quad (10)$$

ВЫДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ОКЕАНИЧЕСКОМ КЛИНЕ

Рассмотрим соотношения между негармонической и гармонической составляющими логарифма показателей преломления на примере простейшего трехмерного нерегулярного волновода, представляющего собой жидкий клин с абсолютно мягкой верхней и абсолютно жесткой нижними границами. Ось Ox направлена по ребру клина, ось Oy перпендикулярна ребру клина с началом координат на ребре клина. Раствор угла клина $\alpha = 0.02$.

В волноводе на глубине z_0 расположена горизонтальная линейная антенна, ориентированная вдоль оси Oy . Центр антенны находится на удалении 30 км от ребра клина. Поле такой антенны в клине описано в работе [4]. После квазиразделения переменных в клине расчет поля антенны сводится к решению конечного числа двумерных уравнений Гельмгольца вида [5]:

$$[\Delta_2 + \xi^2_n(y)]\Psi_n(\mathbf{r}) = -d_n(\mathbf{r}), \quad n \in \overline{1, N}, \quad (11)$$

где N — число мод в области апертуры антенны;

$$\xi^2_n(y) = k^2 \left(1 - \left(\frac{(2n-1)}{2H(y)k} \pi \right)^2 \right); \quad H(y) = H_0 + \alpha y.$$

Очевидно, что показатели преломления равны

$$n(y) = \left(1 - \left(\frac{(2n-1)}{2H(y)k} \pi \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{и соответственно их}$$

логарифм равен

$$l_n(y) = \ln(n(y)) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \left(\frac{(2n-1)}{2H(y)k} \pi \right)^2 \right),$$

$$n \in \overline{1, N}.$$

Получим средние оценки гармонической и негармонической составляющих функции $l_n(y)$ для

средней по апертуре антенны глубины волновода $H_0 = 300$ м.

Вводя обозначения $C_n = \left(\frac{(2n-1)}{2k} \pi \right)$ и $\beta_n = H^2(y)/C_n^2$, имеем

$$\Delta l_n(y) = \partial^2 l_n(y) / \partial y^2 = - \frac{\alpha^2 (3\beta_n - 1)}{H^2(y)(\beta_n - 1)^2}. \quad (12)$$

При частоте $f = 15$ Гц в области апертуры антенны существует шесть однородных нормальных волн. В табл. 1 сведены средние значения функций $l_n(y)$, $\partial^2 l_n(y) / \partial y^2$ и их отношения $(\partial^2 l_n(y) / \partial y^2) / l_n(y)$ при $H(y) = H_0$ для каждой из них.

Если подставить значения функции $\rho = f(\mathbf{r}) = -\Delta \phi = -\partial^2 l_n(y) / \partial y^2$ из второй строчки табл. 1 в формулу (8) и проводить интегрирование в сегменте круга шириной l , включающего антенну, то получающаяся величина интеграла при условии, что $l \ll R$, примерно в $\pi R / 2l$ раз меньше значения негармонической составляющей для круга радиусом R , полученной из формулы (10) (этот факт подтвержден численными экспериментами).

Табл. 1. Результаты расчета для $H_0 = 300$ м, $f = 15$ Гц

Номер моды n	$l_n(y)$	$\partial^2 l_n(y) / \partial y^2$	$\frac{\partial^2 l_n(y) / \partial y^2}{l_n(y)}$
1	$-3.5 \cdot 10^{-3}$	$-2.3 \cdot 10^{-11}$	$6.7 \cdot 10^{-9}$
2	$-3.2 \cdot 10^{-2}$	$-2.3 \cdot 10^{-10}$	$7.3 \cdot 10^{-9}$
3	$-9.5 \cdot 10^{-2}$	$-7.9 \cdot 10^{-11}$	$8.4 \cdot 10^{-9}$
4	$-2.1 \cdot 10^{-1}$	$-2.3 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$
5	$-4.1 \cdot 10^{-1}$	$-8.1 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-8}$
6	$-9.2 \cdot 10^{-1}$	$-7.9 \cdot 10^{-8}$	$8.6 \cdot 10^{-8}$

Табл. 2. Средние отношения негармонической составляющей функции $I_n(y)$ к ней самой для шести мод в зависимости от длины антенны

Номер моды n	Длина антенны, м		
	2000	4000	8000
1	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
2	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$
3	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-5}$	$8.1 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
5	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
6	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$

В табл. 2 приведены средние отношения негармонической составляющей функции $I_n(y)$ к ней самой для всех шести мод в зависимости от длины антенны (2000, 4000, 8000 м). Ширина сегмента принималась равной $l = \pi / 2$.

Как видно из таблицы, негармоническая составляющая на 3–5 порядков меньше логарифма показателя преломления для каждой из мод, что позволяет считать эти функции практически гармоническими, что разрешает использовать технику геометрических представлений, развитую в работе [1].

Заметим:

1) как следует из выражения (12), при увеличении величины α на порядок, величина негармонической составляющей растет на два порядка, однако, как видно из табл. 2, по-прежнему остается намного меньше гармонической составляющей.

2) область D в рассмотренных рассуждениях должна быть ограниченной, т. к. по аналогу теоремы Лиувилля для гармонических функций [2] не существует ограниченной во всем пространстве R^2 гармонической функции, отличной от константы и вследствие ограниченности показателя преломления во всем пространстве его гармоническая составляющая при неограниченном D может быть только постоянной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарфарец Б.П. Геометрооптическое представление поля протяженного источника в двумерно-неоднородной среде // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 6. С. 735–740.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982. 256 с.
4. Блажкун А.Д., Громашева О.С., Косырев Б.А., Шарфарец Б.П. Расчет поля линейной антенной решетки в трехмерном клине // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 5. С. 828–833.
5. Шарфарец Б.П. Поле протяженного излучателя в нерегулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 345–349.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 10.01.2004.

**ABOUT THE POSSIBILITY OF APPROXIMATION
OF THE INDEX OF REFRACTION IN THE TWO-DIMENSIONAL
NON-UNIFORM SPACE**

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The expressions allowing one to present the logarithm of an index of refraction in two-dimensional non-uniform environment as a sum of harmonic and non-harmonic functions are given. By the example of a three-dimensional wedge, in which the calculation of the field of a directed source results in a system of two-dimensional Helmholtz' equations, it is shown that non-harmonic components of the refraction index logarithms in these equations remain negligible in a wide enough range of wedge opening corners, which permits one to obtain solutions in the form of geometric-optical series.