

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 621.391.266.037.372

© А. В. Меркушева

КЛАССЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Даны элементы теории двух классов преобразований — время-частотных и время-масштабных, — которые составляют основу анализа нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах. Показана взаимосвязь этих видов преобразований и метод создания преобразований по некоторым заданным их свойствам.

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы обработки сигналов, такие как кратковременное преобразование Фурье, преобразования Зака и Габора, билинейные преобразования класса Козна (преобразования Вигнера, Бесселя, Бертрона, Вилсона и их модификации), преобразования время—масштаб (разновидности вейвлет-преобразований и вейвлет-пакеты, обладающие хорошей локализацией свойств сигналов), не нашли пока широкого применения. Поэтому актуальной является задача разработки методического и алгоритмического обеспечения обработки локально-стационарных сигналов в информационных и информационно-измерительных системах (ИИС), в частности для контроля процессов со спорадическим характером изменения статистических свойств [1] и для фильтрации, основанной на контроле характеристик шума в течение кратковременных пауз полезной составляющей сигнала [2].

Перечисленные виды преобразований обеспечивают двумерное представление, которое в явной форме отражает динамику частотной структуры сигнала. Это может позволить решать задачи локализации свойств сигнала, например квазистационарных сегментов сигнала при контроле потока нефти с интервалами включения газовой фракции или пауз информационной компоненты речевого сигнала, для оценки характеристик шума с целью адаптивной формы его фильтрации.

Отдельным преобразованиям (Вигнера, Зака, вейвлет) посвящены обширные исследования [4–10], по другим имеются только сведения о структуре. Вместе с тем не существует однозначного преимущества и предпочтительности единого преобразования [11–12]. Поэтому для корректного применения преобразований нестационарных сигналов в ИИС предлагается краткая сводка элементов теории, а также взаимосвязи и свойств классов время-частотных и вейвлет-преобразований.

Оба класса преобразований дают представление сигнала $s(t) \in L^2$ в форме интеграла или дискретного разложения в виде суммы ряда по базисам соответствующих классов: один образован модулированием единой образующей функции (когерентными состояниями Вейля—Гейзенберга), другой образован сдвигом и растяжением (аффинным преобразованием времени) образующей функции, которая определяет тип преобразования. Анализ обнаруживает тесную взаимосвязь двух классов преобразований и помогает использовать различные формы их характеристик, которые наиболее соответствуют особенностям сигнала и требованиям задачи его обработки в ИИС. Среди таких требований может быть наличие быстрого алгоритма реализации, существенность фазовой информации или приоритет локализации энергетической характеристики сигнала.

КЛАССЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

Время-частотное преобразование (ВЧП) Габора [4, 13], его расширенная форма — кратковременное преобразование Фурье (КВПФ) $F_s(t, \omega)$ и время-масштабное (вейвлет) преобразование $T_s(t, a)$ сигнала $s(t)$ представляются в виде (1)–(3) при условном обозначении $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — для скалярного произведения и $\varphi_{t\omega}(\tau) = \varphi(\tau - t) \exp(-j\omega\tau)$ — для квазибазисного элемента разложения (где φ — временное окно):

$$G_s(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(\tau - t) \exp[-j\omega(\tau - t/2)] d\tau; \quad (1)$$

$$F_s(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \varphi^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2)$$

$$F_s(t, \omega) = \langle s, \varphi_{t\omega} \rangle, \quad \omega \in R;$$

$$T_s(t, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \psi^*\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau,$$

$$T_s(t, a) = \langle s, \psi_{t,a} \rangle, \quad (3)$$

$$\psi_{t,a}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right).$$

При этом для КВПФ и вейвлет-преобразования (ВП) необходимы условия:

$$C_\varphi = \int |\hat{\varphi}(\nu)|^2 d\nu < \infty \text{ — Фурье}, \quad (4)$$

$$C_\psi = \int |\hat{\psi}(\nu)|^2 |\nu|^{-1} d\nu < \infty \text{ — вейвлет}.$$

Таким образом, КВПФ и ВП — это различные, но в определенном смысле эквивалентные линейные преобразования, и возможно перейти от одного к другому без потери информации. Для нормировки $C_\varphi = C_\psi = 1$ взаимосвязь этих преобразований выражается соотношениями:

$$\underbrace{T_s(t, a)}_{\text{вейвлет}} = \iint \underbrace{F_s(\tau, \xi)}_{\text{КВПФ}} \underbrace{\langle \varphi_{\tau\xi}, \psi_{a\tau} \rangle}_{\text{вейвлет-преобр. окна КВПФ}} d\tau d\xi, \quad (5)$$

$$\underbrace{F_s(t, \omega a)}_{\text{КВПФ}} = \iint \underbrace{T_s(\tau, a)}_{\text{вейвлет}} \underbrace{\langle \psi_{\tau a}, \varphi_{t\omega} \rangle}_{\text{КВПФ от } \psi_{\tau a}} d\tau da / a^2. \quad (6)$$

Взаимосвязь преобразований явно отражается случаем, когда не нужна фазовая информация и важны только энергетические характеристики сигнала. При этом используется спектрограмма — квадрат модуля КВПФ $|F_s(t, \omega)|^2$ и скейлограмма — квадрат модуля вейвлет-преобразования $|T_s(t, a)|^2$. Равноценность полученных оценок величины энергии сигнала связана с применением нормировки $C_\varphi = C_\psi = 1$, при которой оба преобразования могут быть обращены и восстановлено (7) одно и то же значение сигнала $s(t)$, и с изоморфизмом преобразований (т.е. с равенством нормы сигнала и его преобразования в L^2) — согласно соотношению (8):

$$\begin{aligned} s(t) &= \iint F_s(\tau, \xi) \cdot \varphi_{\tau\xi}(t) d\tau d\xi, \\ s(t) &= \iint T_s(\tau, a) \cdot \psi_{\tau a}(t) \frac{d\tau da}{a^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_s &= \int s^2(t) dt = \iint |F_s(t, \omega)|^2 dt d\omega = \\ &= \iint |T_s(t, a)|^2 \frac{dt da}{a^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Использование спектрограммы и скейлограммы занимает значительное место в представлении энергетического состава речевых сигналов людям с повреждением слуха. Однако это только одна из форм совместного время-частотного и время-масштабного анализов.

Обширный подкласс время-частотных преобразований составляют билинейные ВЧП, представителем которых является преобразование Вигнера—Вилле [3, 12, 15]

$$W_s(t, \omega) = \int s(t + \tau/2) \cdot s^*(t - \tau/2) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9)$$

Преобразование имеет ряд свойств. Это — вещественность, корректность маргиналов, согласно соотношениям (10), (11), инвариантность к сдвигам по времени (согласно выражению (12)) и по частоте (13), а также выполнение соотношения Мойела (14), которое отражает унитарность преобразования Вигнера [16]:

$$\int W_s(t, \omega) dt = |\hat{s}(\omega)|^2, \quad (10)$$

$$\int W_s(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_{t,\omega}(\tau) &= s(\tau - t) \cdot e^{-j\omega\tau} \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_{s_{t,\omega}}(\tau, \xi) = W_s(\tau - t, \xi - \omega), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} s_a(\tau) &= |a|^{1/2} \cdot s(a\tau) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_{s_a}(\tau, \xi) = W_s(a\tau, \frac{\xi}{a}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle W_s, W_{s_1} \rangle\rangle &= \iint W_s(\tau, \xi) \cdot W_{s_1}(\tau, \xi) d\tau d\xi = \\ &= |\langle s, s_1 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Свойство корректности маргиналов дает основание называть преобразование Вигнера распределением, т. к. интегрирование его по времени дает мощность сигнала по частоте (10), а интегрирование по частоте дает мощность по времени (11).

Из определения спектрограммы, свойства инвариантности к временному сдвигу (12) и из соотношения Мойела (14) следует, что спектрограмма кратковременного преобразования Фурье имеет три эквивалентные формы выражения:

$$\begin{aligned} |F_s(t, \omega)|^2 &= |\langle s, \varphi_{t,\omega} \rangle|^2 \stackrel{\text{по (14)}}{=} \\ &= \langle\langle W_s, W_{\varphi_{t,\omega}} \rangle\rangle = \\ &= \iint W_s(\tau, \xi) \cdot W_{\varphi}(\tau - t, \xi - \omega) d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогичным образом из определения скейлограммы, из свойств корректности маргиналов (10), (11) и из ковариантности к изменению масштаба (13) могут быть получены три формы выражения скейлограммы:

$$\begin{aligned} |T_s(t, a)|^2 &= |\langle s, \psi_{t,a} \rangle|^2 = \\ &= \langle \langle W_s, W_{\psi_{t,a}} \rangle \rangle = \\ &= \iint W_s(\tau, \xi) \cdot W_{\psi} \left(\frac{\tau - t}{a}, a\xi \right) d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) отражают взаимосвязь кратковременного преобразования Фурье (основу построения спектрограммы) и вейвлет-преобразования (основу скейлограммы) с преобразованием Вигнера—Вилле. Спектрограмма получается через распределение Вигнера—Вилле путем корреляции последнего, а скейлограмма получается с помощью так называемой аффинной корреляции двух распределений Вигнера (с масштабированием аргументов одного из них). Аффинная корреляция — это корреляция с частичной зависимостью, т.к. при ее получении масштабируется частота.

Для хорошо локализованных базовых функций вейвлет-преобразования соответствующее распределение Вигнера можно интерпретировать как низкочастотные функции (размерности два), действующие как локальные сглаживающие фильтры. Это и объясняет более высокую разрешающую способность ВЧП Вигнера сравнительно со спектрограммой и скейлограммой.

К недостаткам преобразования Вигнера следует отнести появление кросс-членов, связанных с интерференцией отдельных частот сложного сигнала, а также возможность появления отрицательных значений, которые трудно интерпретировать. Первый недостаток успешно преодолевается существующими модификациями распределения Вигнера—Вилле (преобразования псевдо-Вигнера и сглаженное псевдо-Вигнера) [3, 14, 16].

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \Rightarrow & R_s(t, \omega) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ s_{\tau\omega_1} = s(t - \tau)e^{-j\omega_1 t} & \Rightarrow & R_{s_{\tau\omega_1}}(t, \omega) = R_s(t - \tau, \omega - \omega_1). \end{array} \quad (18)$$

Использование этой схемы показывает, что любое ядро (с четырьмя параметрами) должно удовлетворять свойству (19)

$$K(\tau, \tau'; t, \omega) = K(\tau - t, \tau' - t; 0, 0) \exp[-j\omega(\tau - \tau')] \quad (19)$$

и, следовательно, должно зависеть только от двух

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Возможна другая форма представления распределения энергии сигнала. Показано, что спектрограмма и скейлограмма — результат некоторой корреляции (в случае вейвлет-преобразования это аффинная корреляция) между двумя распределениями Вигнера—Вилле (от сигнала и от базисной функции). Это может быть обобщено и на другие распределения (результаты преобразований) при условии, что они инвариантны к сдвигу по времени, ковариантны к изменению масштаба и унитарны, т.е. удовлетворяют соотношениям (12)–(14). При таких условиях могут быть созданы группы распределений энергии [12], а спектрограмма и скейлограмма будут только частным случаем. Метод такого подхода заключается в следующем [14, 15].

1. Спектрограмма, скейлограмма и распределение Вигнера — это нелинейные преобразования, и при использовании ядра общего вида $K(\tau, \tau', t, \omega)$ все они могут быть представлены в единой форме соотношением

$$\begin{aligned} R_s(t, \lambda) &= \\ &= \iint K(\tau, \tau', t, \lambda) \cdot s(\tau) s^*(\tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (17)$$

2. На распределение накладываются требования ковариантности к сдвигу по времени и по частоте. Исходя из этих требований определяются необходимые свойства допустимого ядра.

3. Добавочные требования на распределение (преобразование) в некоторых случаях приводят к единственному решению для ядра.

Такой способ определения общей формы ядра приводит в качестве частных случаев к известным преобразованиям. Для время-частотного преобразования требования ковариантности по времени реализуются по схеме, представленной выражениями (18):

независимых переменных. Это можно сравнить с инвариантностью к сдвигу времени, которая превращает линейный оператор в фильтр.

Так получается обширный класс допустимых время-частотных преобразований, которые определяются произвольной функцией от двух переменных [12, 14, 15]. Это класс Козна. Самая

простая форма преобразования этого класса имеет вид

$$C_s(t, \omega, \Pi) = \iint W_s(\tau, \xi) \Pi(\tau - t, \xi - \omega) d\tau d\xi. \quad (20)$$

Соотношение (20) подчеркивает значимость распределения Вигнера, т. к. любое преобразование класса Козна может быть представлено как корреляция преобразования Вигнера W_s с произвольным ядром Π . Другое представление распределения (т. е. результата время-частотного преобразования Козна) для любого сигнала $s(t)$ может быть получено из выражения (21)

$$C_s(t, \omega, \Pi) = \iint A_s(\xi, \tau) f(\xi, \tau) e^{-j(\xi t + \tau \omega)} d\tau d\xi, \quad (21)$$

в котором $A_s(\xi, \tau)$ — двумерное преобразование Фурье от распределения Вигнера

$$W_s(t, \omega) \Rightarrow A_s(\xi, \tau) = \hat{W}_s(\tau, \xi),$$

$f(\xi, \tau)$ — двумерное преобразование Фурье от ядра Π , которым определено преобразование Козна:

$$\Pi(t, \omega) \Rightarrow f(\xi, \tau) = \hat{\Pi}(\tau, \xi).$$

После того как класс преобразований определен, на него можно наложить дополнительные требования и найти соответствующие им условия, которые должны выполняться для ядра $\Pi(t, \omega)$ или для его Фурье-преобразованной частотной формы $f(\xi, \tau)$. При этом представляется возможным накладывать либо все, либо часть из перечисленных ниже условий, которые могут задавать набор желательных свойств преобразования. Каким условиям должна удовлетворять частотная форма ядра $f(\xi, \tau)$ для реализации различных свойств преобразования, показывают соотношения (22)–(29).

1. Вещественность преобразования Козна:

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \Rightarrow & R_s(t, a) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ s_{\alpha\tau} = |\alpha|^{-1/2} s\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) & \Leftrightarrow & R_{s_{\alpha\tau}}(t, a) = R_s\left(\frac{t-\tau}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right). \end{array} \quad (27)$$

Так же как и во время-частотном классе, после определенных преобразований можно получить для ядра условие, выполнение которого гарантирует желательные свойства время-масштабного преобразования. Требование ковариантности преобразования к изменению параметра масштаба по соотношениям (27) можно привести к условию (28), необходимому в этом случае для ядра. Условие получается после преобразований, аналогич-

$$C_s(t, \omega; \Pi) \in R \Leftrightarrow f(\xi, \tau) = f(-\xi, -\tau). \quad (22)$$

(тогда и только тогда)

2. Согласованность преобразования (в качестве время-частотного распределения) с энергией сигнала E_s :

$$\iint C_s(t, \omega; \Pi) dt d\omega = E_s \Leftrightarrow f(0, 0) = 1. \quad (23)$$

3. Корректность маргиналов, т. е. верное представление энергии сигнала в частотной и временной областях (при проинтегрированной второй переменной распределения):

$$\begin{aligned} \int C_s(t, \omega; \Pi) dt &= |\hat{s}(\omega)|^2 \Leftrightarrow f(0, \tau) = 1, \\ \int C_s(t, \omega; \Pi) d\omega &= |s(t)|^2 \Leftrightarrow f(\xi, 0) = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

4. Ковариантность к изменению масштаба:

$$C_{s_a}(t, \omega; \Pi) = C_s(at, \frac{\omega}{a}; \Pi) \Leftrightarrow f(\xi, \tau) = f_0(\xi\tau), \quad (25)$$

где f_0 — функция одного параметра.

5. Выполнение соотношения Мойела (унитарность):

$$\langle\langle C_s(\Pi), C_{s_1}(\Pi) \rangle\rangle = |\langle s, s_1 \rangle|^2 \Leftrightarrow |f(\xi, \tau)| = 1. \quad (26)$$

Преобразования Козна являются обобщением широкого класса время-частотных преобразований. Но преобразования Козна могут таким же образом характеризовать и класс время-масштабных преобразований. Изменяя обозначение $\lambda \rightarrow a$ в соотношении (17) и в полученных из него выражениях и заменяя сдвиг по частоте операцией изменения масштаба, можно получить требование ковариантности к сдвигу времени и масштаба в форме, представленной соотношением (27):

ных выполненным выше при рассмотрении время-частотного распределения Вигнера:

$$K(\tau, \tau', t, a) = |a|^{-1} \cdot K\left(\frac{\tau-t}{a}, \frac{\tau'-t}{a}, 0, 1\right). \quad (28)$$

Условие (28) снова снижает до двух число переменных и определяет класс время-масштабных преобразований Ω в виде (29):

$$\begin{aligned}\Omega_s(t, a; \Pi) &= \\ &= \iint W_s(\tau, \xi) \cdot \Pi\left(\frac{\tau - t}{a}, a\xi\right) d\tau d\xi = \\ &= \iint A_s(\xi, \tau) \cdot f\left(a\xi, \frac{\tau}{a}\right) \cdot e^{-j(\xi t + \tau a)} d\tau d\xi. \quad (29)\end{aligned}$$

При этом время-масштабное преобразование оказывается выраженным либо через преобразование Вигнера (путем взвешивания его ядром Π), либо через преобразования Фурье: (двумерные) A_s и f от преобразования Вигнера (W) и от ядра (Π) соответственно.

В этом классе также можно ввести дополнительные требования на свойства преобразования и привести их в дополнительные условия, которым должно удовлетворять ядро. Требование вещественности преобразования соответствует условию сопряженной четности двумерного преобразования Фурье $f(\xi, \tau)$ ядра Π :

$$\Omega_s(t, a; \Pi) \in R \Leftrightarrow f(\xi, \tau) = f^*(-\xi, -\tau). \quad (30)$$

Согласованность преобразования с полной величиной энергии сигнала соответствует (аналогично (23)) условию (31) для ядра $\Pi(t, a)$ этого преобразования:

$$\iint \Omega_s(t, a; \Pi) \frac{dt da}{a^2} = E_s \Leftrightarrow \iint \Pi(t, a) \frac{dt da}{|a|} = 1, \quad (31)$$

где $E_s = \int s(t)^2 dt = \int |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega$.

Требование правильности соответствия маргиналов преобразования и мощности сигнала при ее выражении во временной и в частотной областях приводит к условиям (32) и (33):

$$\int \Omega_s(t, a; \Pi) dt = \left| \hat{s}\left(\frac{a_0}{a}\right) \right|^2 \Leftrightarrow f(0, \tau) = e^{-2\pi j a_0 \tau}, \quad (32)$$

$$\int \Omega_s(t, a; \Pi) \frac{da}{a^2} = |s(t)|^2 \Leftrightarrow \int f\left(a\xi, \frac{\tau}{a}\right) \frac{da}{a^2} = \delta(\tau). \quad (33)$$

Требование унитарности, которое фактически выражается формулой Мойела и в рассматриваемом случае имеет вид (34), приводит к условию (35), выражающему ортогональность двумерных преобразований Фурье f от ядра Π :

$$\iint \Omega_s(t, a; \Pi) \cdot \Omega_{s_1}^*(t, a; \Pi) \frac{dt da}{a^2} = |\langle s, s_1 \rangle|^2 \quad (34)$$

$\Updownarrow$

$$\iint f\left(a\xi, \frac{\tau}{a}\right) \cdot f^*\left(a\xi, \frac{\tau'}{a}\right) \frac{d\xi da}{a^2} = \delta(\tau - \tau'). \quad (35)$$

Класс преобразований Коэна относится в основном к время-частотным преобразованиям и да-

ет соответствующее распределение нестационарного измерительного сигнала в плоскости время—частота. Как видно из соотношений (25), (27)–(29), класс построенный по тому же принципу, но с использованием аффинной ковариантности приводит к время-масштабным преобразованиям. Эти два класса имеют внутреннюю взаимосвязь. Можно, например, считать, что преобразование Вигнера принадлежит обоим классам. Кроме того, в некоторых случаях распределению энергии при преобразовании класса время—масштаб может быть дана время-частотная интерпретация в форме, аналогичной маргинальному свойству по соотношению (23).

С некоторой степенью условности возможно формально идентифицировать масштаб и обратную частоту по выражению $\omega = \omega_0 / a$, где ω_0 — некоторая частота. При такой интерпретации оказывается, что все время-масштабные распределения (преобразования с корректными маргиналами) характеризуются функцией такого ядра, которое в частотной области представляется в виде (36):

$$f(\xi, \tau) = f_0(\xi\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau}, \quad (36)$$

где f_0 — функция одного аргумента: произведения $\xi\tau$ [12, 16]. Эта функция такова, что служит для создания ядра Π время-масштабного преобразования. Это ядро выражается через ядро типа Коэна Π_0 , но для получения весовой функции Π_0 , образующей это ядро, используется ее время-частотное представление f_0 . Это утверждение выражается соотношением

$$\Omega_s(t, a; \Pi) = C_s\left(t, \frac{\omega_0}{a}; \Pi_0\right), \quad (37)$$

где Π_0 — время-частотное представление функции f_0 , т. е. $\Pi_0 = \text{БПФ}^{-1}(\text{БПФ}^{-1} f_0)$.

Эта взаимосвязь преобразований (или распределений энергии сигнала в двух формах) объясняется тем, что распределения имеют общность, связанную с требованиями ковариантности к сдвигу частоты (ВЧП) и ковариантности к изменению масштаба (ВП). Такая интерпретация может быть дана не всем время-частотным распределениям. Так, скейлограмма не ковариантна к сдвигу частоты.

Считается, что ограниченность частотной полосы вейвлет-преобразования достаточна для интерпретации его в терминах фильтрации. Однако это справедливо для одномодального спектра вейвлет-базиса, но не выполняется при многомодальном спектре у вейвлет-функции.

В работах по анализу взаимосвязи двух классов преобразований проводилась известная аналогия переменной масштаба с аккордами, поэтому ее соотношение с частотой лучше для понимания

в форме обратного отношения $\omega_1 / \omega_2 = a_2 / a_1$. Это соотношение подчеркивает также характер преобразования частот в операциях, связанных с изменением масштаба. Делая функцию ядра зависящей от некоторой частоты ω_0 , можно получить распределение, основанное на частотной переменной ω_0 / a . Эта частотная переменная может быть формально идентифицирована с обычной частотой в преобразовании Фурье с той разницей, что она не может быть отделима от частотного разрешения $\Delta\omega$, так что относительная ширина полосы $\Delta\omega / \omega$ постоянна (постоянное качество анализа во всем частотном диапазоне, характерное для вейвлет-преобразования). С формальной точки зрения результирующие распределения могут быть использованы как определения время-частотных распределений независимо от способа их получения.

НЕСГЛАЖЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (РАСПРЕДЕЛЕНИЯ)

Как показано выше, время-масштабные распределения (аффинный класс) получаются из распределения Вигнера—Вилле действием оператора корреляции. Часто эта корреляция принимает форму сглаживания, как в случае скейлограммы. Но это бывает не всегда. В классе время-масштабных преобразований можно рассматривать подкласс такой, что ядро, определяющее его, имеет форму

$$f(\xi, \tau) = G(\xi) \cdot e^{-2\pi j H(\xi) \tau}, \quad (38)$$

где $H(\xi)$ и $G(\xi)$ — произвольные функции.

Это очень существенно отличается от аффинного сглаживания распределения Вигнера тем, что этот вид двумерного преобразования от ядра не соответствует низкочастотной функции пропускания — фильтру. Вместе с тем эта форма определения ядра в частотной области дает широкий набор преобразований. Для полученных преобразований имеется возможность формировать их полезные свойства, накладывая требования на ядро в частотной форме (38). Согласно данному определению ядра, соответствующее преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_s(t, a; \Pi) &= \\ &= \int G(a\xi) \hat{s}\left(\frac{H(a\xi)}{a} - \frac{\xi}{2}\right) \cdot \hat{s}^*\left(\frac{H(a\xi)}{a} + \frac{\xi}{2}\right) \times \\ &\times \exp(-2\pi j \xi t) d\xi. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, формирование новых преобразований с хорошими свойствами получается на основе приведения желаемых свойств к форме требований к ядру и выражения их в виде требо-

ваний к функциям $H(\xi)$ и $G(\xi)$, определяющим частотную форму ядра.

СОЗДАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Создание преобразований при использовании рассмотренной последовательности действий сводится к решению уравнений, составленных для функций $H(\xi)$ и $G(\xi)$, которые входят в частотное представление ядра формируемого преобразования. Выполнение процедур, связанных с созданием преобразований на основе описанного принципа, можно проследить на процедуре получения двух время-масштабных преобразований: преобразования Бертрона и преобразования, введенного Фландрином [16, 18].

Такой же метод применим для получения время-частотных преобразований.

1. Преобразование Бертрона [17] может быть получено на основе требования унитарности, т. е. выполнения соотношения Мойела, и требования высокой локализации преобразования по времени (высокой его разрешающей способности). Использование выражения (26) и частотной формы ядра в виде (38) приводит к дифференциальному уравнению (40), определяющему связь функций $H(\xi)$ и $G(\xi)$:

$$G^2(\xi) = H(\xi) - \xi \cdot \frac{dH(\xi)}{d\xi}. \quad (40)$$

Ограничение на временную локализацию, состоящее в выполнении (41), ведет к условию (42):

$$\begin{aligned} \hat{S}(v) &= |v|^{-1/2} \exp(-2\pi j v t_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_s(t, a; \Pi) &= |a| \cdot \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (41)$$

$$G^2(\xi) = H^2(\xi) - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2. \quad (42)$$

Отметим, что (42) приводит к дополнительному требованию $H(\xi) > |\xi| / 2$. Сравнение выражений (40) и (42) для $G^2(\xi)$ приводит к дифференциальному уравнению для $H(\xi)$, решение которого определяет функцию $H(\xi)$ в виде (43)

$$H(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right) \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (43)$$

После этого $G(\xi)$ может быть выражено соотношением (44)

$$G(\xi) = \frac{\frac{\xi}{2}}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{2}\right)}. \quad (44)$$

Подстановка этих выражений в ядро, форма которого приведена в (39), и использование получившейся аналитической формы ядра для создания преобразования приводит к окончательному выражению для преобразования Бертрана [9, 16, 18]. Преобразование Бертрана (или распределение Бертрана в плоскости время—масштаб) определяется соотношением (45):

$$B_s(t, a) = \frac{1}{|a|} \times \\ \times \int \frac{\xi}{2} \hat{S} \left(\frac{\xi}{2} \exp \left(-\frac{\xi}{2} \right) \right) \cdot \hat{S}^* \left(\frac{\xi}{2} \cdot \exp \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) \times \\ \times \exp \left(-2\pi j \xi \cdot \left(\frac{t}{a} \right) \right) d\xi. \quad (45)$$

2. Преобразование Фландрина описано, в частности, в [9, 16, 18]. Создание время-масштабного преобразования Фландрина (и соответствующего распределения для сигнала) основано на требовании наличия корректного временного маргинала. В то же время не используется ограничивающее требование унитарности, формализованное соотношением Мойела. Согласованность интеграла преобразования по параметру масштаба с энергией сигнала

$$\int \Omega_s(t, a; \Pi) \frac{da}{a^2} = |s(t)|^2 \quad (46)$$

накладывает условие (47) на ядро (более точно, на его частотную форму, которая является двумерным преобразованием Фурье от ядра):

$$\int f \left(a\xi, \frac{\tau}{a} \right) \frac{da}{a^2} = \delta(t). \quad (47)$$

Можно показать, что это ведет к условию

$$G(\xi) = H(\xi) - \xi \frac{dH(\xi)}{d\xi}. \quad (48)$$

Дополнительным требованием к преобразованию является временная локализация, которая, как и в случае преобразования Бертрана, приводит к соотношению (42). Совместно выражения (42) и (48) позволяют решить уравнение для $H(\xi)$ и затем найти $G(\xi)$.

$$H(\xi) = 1 + \left(\frac{\xi}{4} \right)^2 \Rightarrow G(\xi) = 1 - \left(\frac{\xi}{4} \right)^2. \quad (49)$$

Выражения для $H(\xi)$ и $G(\xi)$ полностью определяют ядро преобразования. Знание аналитического

выражения ядра (в частотной форме) позволяет с помощью соотношения (39) получить окончательное выражение преобразования Фландрина [8, 16, 18]:

$$D_s(t, a) = \\ = \int \frac{1 - \left(\frac{\xi}{4} \right)^2}{|a|} \hat{S} \left(\frac{1}{a} \left(1 - \frac{\xi}{4} \right)^2 \right) \cdot \hat{S}^* \left(\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\xi}{4} \right)^2 \right) \times \\ \times \exp \left(-2\pi j \xi \left(\frac{t}{a} \right) \right) d\xi. \quad (50)$$

ОБЩИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Проведенный анализ показывает основную методическую схему создания различных преобразований нестационарного сигнала в ИИС на основе обобщенной формы представления классов преобразований и введения некоторых требований к математическим свойствам преобразования. Это — требования унитарности (выражающейся соотношением Мойела), временной локализации, выполнения у маргиналов соотношений, отражающих правильное выражение энергии сигнала в частотной и временной областях. Преобразования с корректными маргиналами наиболее обосновано называют распределениями, хотя в области обработки сигналов распределениями называют и другие преобразования, имея в виду представление результата преобразования сигнала в координатах время—частота или время—масштаб.

Некоторые замечания могут быть сделаны о свойстве локализации распределения энергии сигнала в результате преобразований рассмотренного класса. В отношении локализации по частоте и предела ширины полосы разрешения имеет значение различие между двумя концепциями — частоты и масштаба, которые связаны с двумя общими классами преобразований и которые естественным образом входят в способ интерпретации понятий локализации и разрешения. Если рассматривать преобразования время-частотного класса (аффинные), то общая форма их выражения может быть представлена различным образом:

— как свертка аффинно-преобразованного ядра с преобразованием Вигнера от сигнала;

— как обратное преобразование Фурье (БПФ⁻¹) от скалярного произведения частотной формы преобразования Вигнера с аффинным преобразованием частотной формы ядра;

— как преобразование Вигнера от частотной формы сигнала с включением весовой функции.

Первые две формы представления преобразования даны выражением (51), а третья форма представления — выражением (52):

$$\begin{aligned}\Omega_s(t, a; \Pi) &= \\ &= \iint W_s(\tau, \xi) \cdot \Pi\left(\frac{\tau - t}{a}, a \cdot \xi\right) d\tau d\xi = \\ &= \iint A_s(\xi, \tau) \cdot f\left(a \cdot \xi, \frac{\tau}{a}\right) e^{2\pi j \xi t} d\xi d\tau, \quad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_s(t, a; \Pi) &= \\ &= \iint \psi(a\xi, \nu) \cdot \hat{S}\left(\frac{\nu}{a} - \frac{\xi}{2}\right) \cdot \hat{S}^*\left(\frac{\nu}{a} + \frac{\xi}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp(-2\pi j \xi t) d\xi d\nu. \quad (52)\end{aligned}$$

Здесь $\psi(\xi, \nu)$ заменяет произвольную функцию ядра, зависящую от двух частот.

В случае сигнала, состоящего из одной спектральной линии $\hat{S}(\nu) = \delta(\nu - \nu_1)$, выражение (52) сводится к $a \cdot \psi(0, a\nu_1)$. Это означает, что если для функции выполняется условие $\psi(0, \nu) = \delta(\nu - \nu_0)$, то само распределение точно локализовано по частоте согласно выражению (53):

$$\Omega_x(t, a; \Pi) = \delta\left(\frac{\nu_0}{a} - \nu_1\right), \quad \nu_1 = \frac{\nu_0}{a}, \quad a = \frac{\nu_0}{\nu_1}. \quad (53)$$

Справедливо более общее положение. Если анализируемый сигнал узкополосный и спектр его занимает малую окрестность около некоторой центральной для него частоты, то эффективное интегрирование по ξ ограничено малой областью вокруг начала. В этом случае влияние функции ядра главным образом зависит от локальных свойств его разложения Тэйлора:

$$\psi(a\xi, \nu) = \psi(0, \nu) + a\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0, \nu). \quad (54)$$

Тогда, если можно принять, что $\psi(0, \nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ и $\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)(0, \nu) = 0$, то получится аппроксимация преобразования в форме выражения

$$\begin{aligned}\Omega_s(t, a; \Pi) &\cong \\ &\cong \int \hat{S}\left(\frac{\nu_0}{a} - \frac{\xi}{2}\right) \hat{S}^*\left(\frac{\nu_0}{a} + \frac{\xi}{2}\right) \exp(-2\pi j \xi t) d\xi = \\ &= W_s\left(t, \frac{\nu_0}{a}\right). \quad (55)\end{aligned}$$

Оказывается, что при принятом выше условии обычное преобразование Вигнера—Вилле может рассматриваться как узкополосный предел некоторого время-масштабного преобразования (и расщепления как результата этого преобразования). В этом смысле время-масштабные преобразования можно интерпретировать как время-частотные путем формальной идентификации $\nu = \nu_0/a$. Вследствие этого о них можно говорить как о широкополосных разложениях преобразования Вигнера—Вилле или как о время-частотных преобразованиях, приспособленных к широкополосным сигналам.

В случае локализованных ядер, зависящих от двух частот, типа

$$f(\xi, \tau) = G(\xi) \cdot \exp[-2\pi j \cdot H(\xi)\tau], \quad (56)$$

условие (57)

$$\psi(0, \nu) = \delta(\nu - \nu_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0, \nu) = 0 \quad (57)$$

может быть представлено в виде (58):

$$H(0) = \nu_0, \quad G(0) = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi}(0) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(0) = 0. \quad (58)$$

В такой форме эти условия выполняются при создании уже упоминавшегося преобразования Бертрона (45). Используемые при его получении соотношения $\psi(0, \nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ и $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0, \nu) = 0$ при интерпретации время-масштабного преобразования в терминах времени и частоты могут служить для выбора ν_0 в качестве единицы измерения частоты. При этом само значение ν_0 можно брать произвольно в соответствии с общим представлением о частотном диапазоне контролируемого в ИИС нестационарного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малыхина Г.Ф., Меркушева А.В.* Детектирование речевого сигнала и фильтрация с адаптивным порогом // Микропроцессорные средства измерений: Сб. научн. трудов. СПбГТУ, 2001. Вып. 2. С. 26–35.
2. *Кратиров Д.В., Меркушева А.В.* Нейросетевой алгоритм на вейвлет-отображении сигнала в ИИС для контроля параметров двухфазного потока // Сб. докладов МНТК: Датчики и системы. СПбГТУ, 2002 (в печати).
3. *Gaundaurd G.C., Strifors H.C.* Signal Analysis by Means of Time — Frequency Transformation of Wigner Type // Proceedings of IEEE. 1996. V. 84, N 9. P. 1231–1247.
4. *Quian S., Chen D.* Discrete Gabor Transform //

- IEEE Trans. Signal Processing. 1993. V. 41. P. 2429–2435.
5. Zibulski M., Zeevi Y.Y. Frame Analysis of Discrete Gabor Scheme // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42, N 4. P. 942–945.
6. Daubechies I. Orthogonal Basis and Wavelets // SIAM Journal of Math. Anal. 1993. V. 24, N 2. P. 499–512.
7. The Wigner Distribution / Eds W. Mecklenbrauker, F. Hlawatsch. N. Y., 1997. 79 p.
8. Jawerth B., Sweldens W. Wavelet-Based Multiresolution Analysis // SIAM Review. 1994. V. 36, N 3. P. 377–401.
9. Recent advanced wavelet analysis / Ed. L.L. Schumaker. Boston: Academic Press, 1994. 254 p.
10. Strang G. // Bull. American Mathematical Society. 1993. V. 28. P. 288.
11. Исмаилов Ш.Ю., Меркушева А.В. Анализ время-частотных преобразований для обработки сигнала // Тезисы МНТК "Пятьдесят лет развития кибернетики". СПбГТУ, 1999. С. 14–15.
12. Cohen L. Time-frequency analysis. N. Y.: Prentice Hall, 1995. 95 p.
13. Quian S., Chen D. Signal Representation Using the Gaussian Functions // Signal Processing. 1994. V. 36. P. 1–11.
14. Loughlin P. Non Negative Time-Frequency Representation // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42, N 10. P. 2697–2704.
15. Cohen L. Time-Frequency Distribution // Proceedings of IEEE. 1989. V. 77, N 7. P. 941–952.
16. Flandrin P., Gonsalves P. // Proc. IEEE Intern. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis. Philadelphia, 1994. P. 80.
17. Bertrand J., Bertrand P. A Class of Wigner Functions with Extended Covariance Properties // Journ. Math. Phys. 1992. V. 33, N 7. P. 2515–2520.
18. Rioul O., Flandrin P. Time-Scale Energy Distributions: General Class Extending Wavelet Transforms // IEEE Trans. Signal Processing. 1992. V. 40, N 7. P. 1746–1757.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 04.03.2002.

TRANSFORMATION CLASSES FOR NONSTATIONARY SIGNALS IN INFORMATION MEASUREMENT SYSTEMS. I. ELEMENTS OF THEORY

A. V. Merkusheva

Saint-Petersburg

The elements of theory are given for two classes of transformations: time-frequency and time-scale, which form the basis for analysis of nonstationary signals in information measurement systems. The interrelation of such transformations is shown and a method is given for transform construction on the basis of some of their properties.