

## ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 534.23

© Б. П. Шарфаренц

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА В ВИДЕ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОГО РЯДА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается асимптотическое решение двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца в пространстве  $\mathbf{R}^2$  с переменным показателем преломления. Объемная плотность источника отлична от нуля в конечной области  $D$ . Показано, что это асимптотическое решение может быть представлено в виде геометрикооптического ряда. Приводятся алгоритмы расчета всех характеристик этого ряда.

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее эффективным способом решения краевых задач для стационарного уравнения Шредингера (к ним относится и уравнение Гельмгольца с переменным показателем преломления) является метод канонического оператора (см., например, [1] и другие работы В.П. Маслова). Отметим, что решается в этих работах, как правило, однородное уравнение с некими неоднородными краевыми условиями. Полученное таким образом решение называется формальным асимптотическим (ФАР) либо квазиклассической асимптотикой. В работе [2] и ряде других получено ФАР для фундаментального решения (функции Грина) уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления в пространстве произвольной размерности. В случае произвольной функции источника решение формально может быть получено в виде свертки соответствующей функции Грина и объемной плотности источника. При этом остается открытым вопрос о возможности представления полученного решения в виде геометрикооптического ряда. В работе [3] для уравнения Гельмгольца произвольной размерности с постоянным показателем преломления этот вопрос решен положительно — решение соответствующих краевых задач представимо в виде геометрикооптического ряда.

В настоящей работе показана возможность представления ФАР неоднородного двумерного уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления в виде геометрикооптического ряда.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим задачу математически:

$$\begin{aligned} L(x, y, -j\partial/\partial x, -j\partial/\partial y)u(x, y) = \\ = [\Delta_2 + k^2 n^2(x, y)]u(x, y) = -f(x, y); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) = O(|\mathbf{r}|^{-1/2}), \\ (\partial/\partial|\mathbf{r}| - jk)u(x, y) = o(|\mathbf{r}|^{-1/2}), \\ \mathbf{r} = (x, y) \in \mathbf{R}^2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} n(x, y) \in \mathbf{C}^\infty, \quad n(x, y) > 0, \\ n(x, y) \rightarrow 1, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Delta_2 = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$  — оператор Лапласа;  $u(x, y)$  — поле звукового давления;  $k$  — волновое число;  $f(x, y)$  — объемная плотность источника, сосредоточенного в ограниченной области.  $D = \text{supp } f$ ;  $f(x, y)$  в общем случае может быть обобщенной функцией, тогда речь идет об обобщенном решении.

Рассмотрим уравнение для фундаментального решения уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} [\Delta_2 + k^2 n^2(x, y)]G(x, x_0, y, y_0) = \\ = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta$  — дельта-функция.

Получение ФАР задачи (4) основано на построении лагранжева многообразия, ассоциированного с нулевым уровнем гамильтониана

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -p_x^2 - p_y^2 + n^2(x, y), \quad (5)$$

соответствующего оператору [1, 2]

$$L = \Delta_2 + k^2 n^2(x, y).$$

Лагранжево многообразие соткано из бихарактеристик, являющихся решениями системы Гамильтона

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}/dt = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad d\mathbf{p}/dt = -\partial H / \partial \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_0 = \\ = (p_{0x}, p_{0y}) = (n(x_0, y_0) \cos \varphi, n(x_0, y_0) \sin \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $(t, \varphi)$  — координаты на лагранжевом многообразии,  $\varphi$  — полярный угол на окружности начальных импульсов  $|\mathbf{p}_0|^2 = n^2(x_0, y_0)$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  — вектор импульсов. Сделаем допущение, что при  $(x_0, y_0) \in D$  получающиеся лагранжевы многообразия однозначно проектируются на  $\mathbf{R}^2$ , и лучи, соединяющие точки  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$ , нигде не пересекаются, т.е. лежат в неособой карте.

Известно [2], что в неособой карте ФАР задачи (4) имеет вид

$$G_N(x, x_0, y, y_0) \cong \frac{-j}{2\sqrt{\pi k}} \frac{\exp(jkS - \pi/4)}{|J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|^{1/2}} \sum_{n=0}^N \frac{\varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{(jk)^n}. \quad (7)$$

Здесь  $S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t, \varphi))$  — эйконал по лучу, соединяющему точки  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$ ;  $\varphi_n$  — амплитуды переноса ( $\varphi_0 = 1$ , а остальные определяются рекурсией [2]);  $J(\mathbf{r}_0, t, \varphi) = D(x, y, \mathbf{r}_0) / D(t, \varphi)$  — якобиан перехода от координат  $(x, y)$  к координатам  $(t, \varphi)$ . Неособость карты говорит о том, что по всей траектории луча от  $\mathbf{r}_0$  до  $\mathbf{r}$  якобиан отличен от нуля.

ФАР  $G_N$  удовлетворяет уравнению

$$L G_N(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) + o(k^{-N-1}). \quad (8)$$

Зная  $G_N$ , решение уравнения (1) можно формально найти из следующей свертки

$$u_N = - \int_D f(\mathbf{r}_0) G_N(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0 = \beta \int_D f(\mathbf{r}_0) \frac{\exp(jkS(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}))}{|J(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})|^{1/2}} \sum_{n=0}^N \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{(jk)^n} d\mathbf{r}_0, \quad (9)$$

где  $u_N$  — ФАР уравнения (1) и удовлетворяет уравнению  $L u_N = -f(x, y) + o(k^{-N-1})$ , а  $\beta = -\frac{j}{2\sqrt{\pi k}} \exp(-j\pi/4)$ .

Как видно из (9), ФАР  $u_N$  не представлен в виде геометрикооптического ряда типа (7), для которого характерны следующие признаки [1]: ряд должен иметь форму (7); эйконал, амплитуды переноса и якобиан должны соответствовать лагранжеву многообразию, отвечающему системе Гамильтона (6); амплитуда переноса нулевого приближения  $\varphi_0$  должна сохранять постоянное значение на траектории луча, а остальные амплитуды переноса находятся с помощью  $\varphi_0$  из рекурсии.

Покажем, что при сделанных допущениях ФАР  $u_N$  допускает представление в виде геометрикооптического ряда.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Для приведения  $u_N$  к искомому виду проведем конформное отображение в (1), перейдя от координат  $(x, y)$  к координатам  $(\xi_1, \xi_2)$ . Пусть  $\omega = f(z) = \xi_1 + j\xi_2$  — конформное отображение комплексной переменной  $z = x + jy$ . Тогда лапласиан преобразуется к виду [4, с. 334, 474]

$$\Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 = 4\partial^2 / \partial z \partial \bar{z} = (\partial^2 / \partial \xi_1^2 + \partial^2 / \partial \xi_2^2) |d\omega / dz|^2.$$

Здесь  $\bar{z}$  — сопряженная с  $z$  переменная.

С учетом этого (1) преобразуется к виду

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{k^2 n^2(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))}{|d\omega / dz|^2} \right) \times \times u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = -\frac{1}{|d\omega / dz|^2} f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)). \quad (10)$$

Согласно [4, с. 475],

$$|dz / d\omega| = ((\partial x / \partial \xi_1)^2 + (\partial y / \partial \xi_1)^2)^{1/2} = ((\partial x / \partial \xi_2)^2 + (\partial y / \partial \xi_2)^2)^{1/2} = h_1 = h_2,$$

где  $h_1, h_2$  — коэффициенты Ламе, которые равны между собой для случая конформного отображения. Справедливо равенство [5]

$$J(\xi_1, \xi_2) = D(x, y) / D(\xi_1, \xi_2) = h_1 h_2.$$

Здесь  $J$  — якобиан перехода  $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ . Следовательно,  $J(\xi_1, \xi_2) = |dz / d\omega|^2$ .

Если потребовать выполнения условия для конформного преобразования

$$|d\omega / dz|^2 = n^2(x, y), \quad (11)$$

а следовательно,  $|d\omega / dz|^2 > 0$  (см. (3)), то (10) преобразуется к виду (алгоритм восстановления аналитической функции по ее модулю приведен в приложении):

$$\begin{aligned} & (\partial^2 / \partial \xi_1^2 + \partial^2 / \partial \xi_2^2 + k^2) \times \\ & \times u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \\ & = -J(\xi_1, \xi_2) f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)). \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (12), получено неоднородное уравнение Гельмгольца с постоянным показателем преломления. Очевидно, что при таком преобразовании лучи спрямляются, а волновые фронты, перпендикулярные лучам, в случае точечного источника представляют собой окружности.

Введем обозначение

$$\rho = ((\xi_1 - \xi_{01})^2 + (\xi_2 - \xi_{02})^2)^{1/2},$$

где  $(\xi_{01}, \xi_{02}) \in \bar{D}$ , точка  $(\xi_{01}, \xi_{02})$  на плоскости  $\omega$  соответствует точке  $(x_0, y_0)$  на плоскости  $z$ , а  $\bar{D}$  — область на плоскости  $\omega$ , соответствующая области  $D$  на плоскости  $z$ . Согласно работе [3], решение уравнения (12) может быть представлено в виде следующего геометрикооптического ряда

$$\begin{aligned} \bar{u}(\rho, \varphi') & \approx \frac{-j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \times \\ & \times \exp(-j\pi/4) \frac{\exp(jk\rho)}{\rho^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n(\varphi')}{(k\rho)^n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $(\rho, \varphi')$  — полярные координаты на  $\omega$ -плоскости относительно точки  $(\xi_{01}, \xi_{02})$ ;  $\bar{u}(\rho, \varphi') = u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$ ; функция  $D_0(\varphi')$  определяется из выражения

$$D_0(\varphi) = \int_{\bar{D}} \bar{f}(\hat{\mathbf{r}}) J(\hat{\mathbf{r}}) \exp(-jk(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)) d^2 \xi. \quad (14)$$

В (14)  $\hat{\mathbf{r}} = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = (\xi_{01}, \xi_{02})$ ,  $\bar{f}(\hat{\mathbf{r}}) = f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$ ,  $\mathbf{k} = (k, \psi)$ . Высшие амплитуды переноса определяются рекурсией [3]

$$D_{n+1}(\varphi') = \frac{(\partial^2 / \partial \varphi'^2 + n(n+1) + 1/4)}{2j(n+1)} D_n(\varphi'). \quad (15)$$

#### РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ В ИСХОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теперь, чтобы получить геометрикооптическое представление поля в исходном пространстве  $(x, y)$ , необходимо вернуться к нему в выражении (13), произведя соответствующие замены переменных. Однако проще это сделать, сравнивая ФАР фундаментальных решений в обоих конфигурационных пространствах, так как законы пре-

образований эйконалов и амплитуд переноса остаются неизменными вследствие неизменности уравнений эйконала и переноса для обоих конфигурационных пространств.

Отметим, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (12) меняется не только конфигурационное пространство (в случае (1) это плоскость  $(x, y)$ , в случае (11) это плоскость  $(\xi_1, \xi_2)$ ), но вследствие изменения гамильтониана меняется и соответствующее лагранжево многообразие. Гамильтониан в случае уравнения (12) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{r}}) = -p_{\xi_1}^2 - p_{\xi_2}^2 + 1, \quad \mathbf{p} = (p_{\xi_1}, p_{\xi_2}). \quad (16)$$

Однако вследствие гладкой замены переменных, а также неособости соответствующих карт существует взаимно однозначное соответствие (диффеоморфизм) между точками соответствующих бихарактеристик на обоих лагранжевых многообразиях.

Решение системы Гамильтона (6) для гамильтониана (16) с начальным условием  $\hat{\mathbf{r}}|_{t'=0} = \hat{\mathbf{r}}_0$  дает  $J(\hat{\mathbf{r}}_0, t', \varphi') = D(\xi_1, \xi_2, \hat{\mathbf{r}}_0) / D(t', \varphi') = 4t'$ ,  $\rho = 2t'$ ,  $S(\hat{\mathbf{r}}_0, \varphi', t') = 2t'$ . Здесь  $(\varphi', t')$  — координаты на лагранжевом многообразии, соответствующем гамильтониану (16). Поскольку преобразование  $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$  конформно, то углы  $\varphi$  на окружности начальных импульсов  $p_{0x}^2 + p_{0y}^2 = n^2(x_0, y_0)$  и углы  $\varphi'$  на окружности начальных импульсов  $p_{\xi_{01}}^2 + p_{\xi_{02}}^2 = 1$  отличаются на константу  $\alpha$ :  $\varphi = \varphi' + \alpha$ . Примем для простоты, что после соответствующего смещения имеет место равенство  $\varphi = \varphi'$ . Тогда в силу описанного выше диффеоморфизма существует гладкая зависимость между параметрами  $t$  и  $t'$  на соответствующих бихарактеристиках.

Пусть имеет место зависимость  $t' = \psi(\varphi, t)$ . Найдем ее. Выпишем выражение для фундаментального решения в плоскости  $\omega$ , т.е. в (12) функция источника равна  $f(x, y) = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ . Тогда, учитывая равенство [4, с. 769]

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{\delta(\xi_1 - \xi_{01})\delta(\xi_2 - \xi_{02})}{|dz/d\omega|^2},$$

получаем уравнение для фундаментального решения

$$\begin{aligned} & (\partial^2 / \partial \xi_1^2 + \partial^2 / \partial \xi_2^2 + k^2) \times \\ & \times G(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \\ & = \delta(\xi_1 - \xi_{01})\delta(\xi_2 - \xi_{02}), \end{aligned} \quad (17)$$

которое известно [4]:

$$G(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \frac{-j}{4} H_0^{(1)}(k\rho),$$

или, если воспользоваться разложениями (13)–(15), в геометрикооптическом виде:

$$G \approx \frac{-j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \exp(-j\pi/4) \frac{\exp(jk\rho)}{\rho^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(k\rho)^n}, \quad (18)$$

где  $d_0 = 1$ ,  $d_n$  — амплитуды переноса.

Естественно, что (18) с точностью до константы описывает асимптотику функции Ханкеля. Если теперь в выражение (18) подставить соответствующие значения  $J(\hat{\mathbf{r}}_0, t', \varphi') = 4t'$ ,  $\rho = 2t'$ ,  $S = 2t'$  и сравнить его с эквивалентным ему выражением (7), то получим следующие соотношения:

$$t' = |J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|/4, \quad d_0 = \varphi_0 \equiv 1, \\ \varphi_n = d_n \frac{j^n}{(|J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|/2)^n}, \quad (19)$$

С учетом (19) можно теперь записать решение (13) в исходном пространстве  $(x, y)$

$$u(x, y) \approx \frac{-j}{2\sqrt{\pi k}} \times \\ \times \frac{\exp(jkS(\mathbf{r}_0, \varphi, t) - \pi/4)}{|J(\mathbf{r}_0, \varphi, t)|^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(\mathbf{r}_0, \varphi, t)}{(jk)^n}, \quad (20)$$

где

$$\Phi_0 = D_0 = \int_{\bar{D}} \bar{f}(\hat{\mathbf{r}}) J(\hat{\mathbf{r}}) \exp(-jk(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)) d^2\xi, \quad (21)$$

а  $D_n$  и  $\Phi_n$  связаны соотношением (19):

$$\Phi_n = D_n \frac{j^n}{(|J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|/2)^n}. \quad (22)$$

### ПРАКТИЧЕСКИЙ ПУТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Проведенные рассуждения показали, что ФАР задачи (1) может быть представлено в виде геометрикооптического ряда, для чего, кроме обычных характеристик ФАР, не зависящих от свойств источника (эйконал, фазовые траектории, якобиан), необходимо вычислять значение амплитуды переноса нулевого приближения (21), характеризующей собственно свойства источника. Выражение (21) необходимо вычислять в пространстве  $(\xi_1, \xi_2)$ , для чего необходимо проводить соответствующее конформное преобразование, что не всегда может быть удобным. Опишем, каким об-

разом эта трудность может быть преодолена. Для этого выясним, чему в исходном пространстве  $(x, y)$  соответствуют плоские волны  $\exp(-jk(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0))$  в пространстве  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Ключевым обстоятельством в этих рассуждениях является тот факт, что если на пути фазовой траектории гладко варьировать показатель преломления, то значение амплитуды переноса нулевого приближения остается неизменным в отличие от остальных характеристик ФАР, т.е. амплитуда переноса нулевого приближения является неким инвариантом ФАР, не реагирующим на гладкие возмущения на пути фазовой траектории. Таким образом, возникает возможность такого варьирования показателя преломления на пути фазовых траекторий, которое максимально облегчает вычисление значений амплитуд переноса нулевого приближения. Такой вариацией является гладкое приведение показателя преломления к стационарному значению  $n(x, y) \equiv 1$  за пределами  $D_1 = D \cup \partial D$ , а  $\partial D$  некая малая окрестность  $D$ . Тогда плоская волна  $\exp(-jk(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0))$  в плоскости  $\omega$  будет соответствовать плоской волне в деформированном описанным образом пространстве  $(x, y)$ , рефразирующей на области  $D_1$ . Таким об-

разом, эйконал  $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)$  в области  $\omega$  преобразуется к эйконалу  $\bar{S}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \varphi) = S(\mathbf{r}, \varphi) - S(\mathbf{r}_0, \varphi)$ . Здесь  $S(\mathbf{r}, \varphi)$  — значение эйконала в точке  $\mathbf{r}$  на фазовой траектории, проходящей через точку  $\mathbf{r}_0$  при рассеянии плоской волны  $\exp(-jk\mathbf{x})$ , проходящей из бесконечности с такого направления, чтобы при рассеянии ее на области  $D_1$  луч прошел через точку  $\mathbf{r}_0$  под искомым углом  $\varphi$ . Тогда, если вернуться в интеграле (14) к переменным  $(x, y)$ , получим:

$$\Phi_0(\varphi) = D_0(\varphi)\varphi = \\ = \int_D f(\mathbf{r}) \exp(-jk\bar{S}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \varphi)) dx dy. \quad (23)$$

После нахождения величины  $\Phi_0(\varphi)$  можно вернуться в первоначальное конфигурационное пространство  $(x, y)$  и воспользоваться выражением (20) для нахождения ФАР уравнения (1).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показана возможность представления ФАР задачи (1) для распределенного источника в виде геометрикооптического ряда, "привязанного" к точке  $\mathbf{r}_0$ .

При выборе точки  $\mathbf{r}_0 \in D$  был допущен произвол, поэтому при таком выборе необходимо исходить из некоего критерия, например минимизации невязки между усеченным рядом ФАР (20) и точным решением задачи (1). Впрочем, это представляет собой тему для отдельной публикации.

### Приложение

Пусть задан модуль аналитической функции  $f(z): \rho(x, y) = |f(z)|$ . Необходимо восстановить по модулю функцию  $f(z)$ . Запишем  $f(z)$  в показательной форме:  $f(z) = \rho(x, y) \exp(j\theta(x, y))$ . Тогда действительная и мнимая составляющие выражаются в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \rho(x, y) \cos(\theta(x, y)), \\ v(x, y) &= \rho(x, y) \sin(\theta(x, y)). \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Запишем для этих функций условия Коши—Римана:

$$du/dx = dv/dy; \quad du/dy = -dv/dx. \quad (\text{П2})$$

После подстановки (П1) в (П2) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \theta - \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta &= \frac{\partial \rho}{\partial y} \sin \theta + \rho \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos \theta - \rho \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta &= -\frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \theta - \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Выражая в (П3)  $\tan \theta$  получаем

$$\frac{\rho'_x - \rho\theta'_y}{\rho'_y + \rho\theta'_x} = \frac{\rho'_y + \rho\theta'_x}{-(\rho'_x - \rho\theta'_y)},$$

или

$$-(\rho'_x - \rho\theta'_y)^2 = (\rho'_y + \rho\theta'_x)^2. \quad (\text{П4})$$

В (П4) равенство может быть удовлетворено только при равенстве нулю обеих частей вследствие

того, что в нем фигурируют только действительные функции. Отсюда получаем выражения для вычисления  $\theta$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Окончательно для  $\theta$  имеем

$$\theta = \int \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \right) = \int \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} dx + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} dy \right).$$

Таким образом, однозначно восстановлена исходная аналитическая функция

$$f(z) = \rho(x, y) \exp(j\theta(x, y)).$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 292 с.
2. Кучеренко В.В. Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера // Теоретическая математическая физика. 1969. Т. 1, № 3. С. 384–406.
3. Косырев Б.А., Шарфарец Б.П. Поле протяженного источника в нерегулярных океанических волноводах (препринт). Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1991. 46 с.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1958. 930 с.
5. Арфкен Г.А. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 08.10.2001.

## REPRESENTATION OF THE PRESSURE FIELD OF AN EXTENDED SOURCE AS A GEOMETRIC-OPTICAL SERIES IN THE TWO-DIMENSIONAL CASE

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The asymptotical solution of two-dimensional nonuniform Helmholtz' equation in  $\mathbf{R}^2$  space with a variable refraction index is considered. Volumetric density of a source is different from zero in a finite region  $D$ . It is shown that this asymptotical solution can be represented as a geometric-optical series. The algorithms for calculation of all characteristics of this series are given.