

УДК 537.533.32.

© М. С. Шалыгина, А. П. Щербаков

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ПУЧКА ТРАЕКТОРИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследованы особенности структуры пучка траекторий заряженных частиц в электростатическом поле. Установлены типы каустики вблизи плоскости фокусировки в зависимости от порядка фокусировки. На основе компьютерного моделирования и анализа структуры пучка траекторий исследуются фокусирующие и диспергирующие свойства поля цилиндрического конденсатора с торцевыми электродами. Предложены схемы зеркального энергоанализатора на его основе.

ВВЕДЕНИЕ

Представление о структуре пучка траекторий, характеристиками которых являются каустики и волновые фронты, не часто используются в задачах анализа и синтеза электронно-оптических систем. Между тем хорошо разработанный аппарат теории особенностей отображений дифференцируемых многообразий, более известной как "теория катастроф" [1], может стать мощным средством исследования электронно-оптических систем.

1. КАУСТИКИ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Понятие фокусировки тесно связано с понятием каустики. Каустика — ее форма и особенно сти — является важнейшей характеристикой пучка траекторий. Представление о каустике наиболее естественно возникает в гамильтоновой механике. Рассмотрим классическую задачу о движении заряженной частицы в электростатическом поле с потенциалом $U(\mathbf{r})$. Пусть $S(\mathbf{r}, a_1, a_2)$ — полный интеграл стационарного уравнения Гамильтона—Якоби этой задачи

$$(\nabla S)^2 = 2m(E - qU(\mathbf{r})) \equiv P(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где m — масса частицы, q — ее заряд, E — полная энергия частицы. Начальное условие для уравнения (1) $S = \text{const}$ на некоторой поверхности или в некоторой точке для центрального поля траекторий.

Траектории частицы определяются из уравнений

$$\partial S / \partial a_1 = 0, \quad \partial S / \partial a_2 = 0. \quad (2)$$

Параметры a_1 и a_2 задают совокупность траекторий, выходящих из заданной поверхности, координатами на которой можно считать эти парамет-

ры. Для центрального поля траекторий a_1 и a_2 определяют направление выхода траекторий из заданной точки.

Трубкой траекторий назовем совокупность траекторий, отвечающих параметрам a_1 и a_2 , меняющимся в бесконечно малых промежутках $a_1^{(0)} \leq a_1 \leq a_1^{(0)} + da_1$, $a_2^{(0)} \leq a_2 \leq a_2^{(0)} + da_2$.

Площадь нормального поперечного сечения трубки в точке $\mathbf{r}$

$$d\Sigma(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}) da_1 da_2, \quad (3)$$

где $I(\mathbf{r}) = |\partial \mathbf{r} / \partial a_1 \times \partial \mathbf{r} / \partial a_2|$ — расходимость поля траекторий, играющая важную роль в задачах о нахождении коротковолновых асимптотик уравнений Гельмгольца и Шредингера [2, 3].

Удобно перейти к лучевым координатам (a_1, a_2, S) , где S — величина действия вдоль траектории (экстремали), выходящей из начальной точки M_0 с координатами (a_1, a_2) и приходящей в заданную точку $\mathbf{r}$:

$$S = \int_{M_0}^{\mathbf{r}} P(\mathbf{r}) ds. \quad (4)$$

В лучевых координатах расходимость $I(\mathbf{r})$ пропорциональна якобиану перехода от декартовых координат к лучевым [2]:

$$I(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(a_1, a_2, S)} \right|. \quad (5)$$

Полагая, что $\mathbf{r}(a_1, a_2, S)$ удовлетворяет уравнениям (2), дифференцированием (2) по a_1 и a_2 из (5) получаем

$$I(\mathbf{r}) = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2 \right| \cdot \left| \nabla \frac{\partial S}{\partial a_1} \times \nabla \frac{\partial S}{\partial a_2} \right|^{-1}. \quad (6)$$

В тех точках, в которых обращается в нуль гессиан классического действия на траектории

$$H(S) = \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2 = 0, \quad (7)$$

обращается в нуль $I(\mathbf{r})$, а следовательно, и площадь поперечного сечения трубки траекторий. Трубка как бы "схлопывается", а траектории в этих точках "слипаются". Условие (7) вместе с системой (2) определяет каустики. Каустики являются огибающими данного семейства траекторий. На каустиках обращается в бесконечность кривизна волнового фронта $S(\mathbf{r}, a_1, a_2) = \text{const}$ [1].

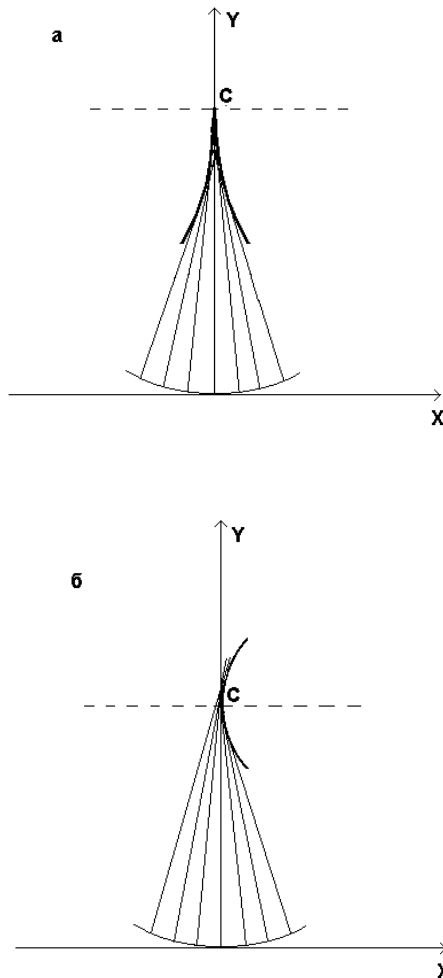


Рис. 1. Каустики семейства прямолинейных траекторий вблизи фокальной точки (а, б)

Рассмотрим семейство траекторий на плоскости. Пусть имеется кривая γ , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — волновой фронт семейства траекторий в бесполом пространстве, s — естественная параметризация кривой. Траектории ортогональны к кривой γ и прямолинейны. Огибающей семейства нормалей к кривой γ , т. е. каустикой рассматриваемого семейства траекторий, является эволюта [4]

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s), \quad (8)$$

где $k(s) = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|$ — кривизна кривой γ ,

$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$ — вектор нормали к кривой γ в точке $\mathbf{r}(s)$.

Допустим, что кривизна волнового фронта имеет экстремум в точке s_0 и

$$k'(s_0) = k''(s_0) = \dots = k^{(l-1)}(s_0), \quad k^{(l)}(s_0) \neq 0. \quad (9)$$

Поместим начало системы координат XY в точку $\mathbf{r}(s_0)$, направив ось X вдоль вектора касательной $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, а ось Y вдоль вектора нормали $\mathbf{n}(s_0)$ (рис. 1). Используя формулы Френе [4], легко показать, что при выполнении условия (9) для эволюты (8)

$$\tilde{\mathbf{r}}'(s_0) = \tilde{\mathbf{r}}''(s_0) = \dots = \tilde{\mathbf{r}}^{(l-1)}(s_0) = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(l)}(s_0) = \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} \mathbf{n}(s_0),$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(l+1)}(s_0) = \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l+1)} \mathbf{n}(s_0) - l k(s_0) \mathbf{t}(s_0) \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)}.$$

Поэтому в окрестности точки $\tilde{\mathbf{r}}(s_0)$ будем иметь

$$\begin{cases} \tilde{x}(s) = -\frac{l}{(l+1)!} k(s_0) \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} (s-s_0)^{l+1} + \dots, \\ \tilde{y}(s) = \tilde{y}_0 + \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} (s-s_0)^l + \dots \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\tilde{y}_0 = \tilde{y}(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} = R(s_0)$ — радиус кривизны кривой γ в точке s_0 .

В случае четного значения l каустика рассматриваемого семейства траекторий имеет при $s = s_0$

точку возврата (рис. 1, а). В частности, при $l=2$ имеем полукубическую параболу $\tilde{x} = c(\tilde{y}_0 - \tilde{y})^{3/2}$. Острие каустики направлено в сторону от волнового фронта, если его кривизна в точке s_0 имеет минимум. Если кривизна имеет максимум в точке s_0 , то острие направлено к волновому фронту.

Для случая нечетного значения l каустика изображена на рис. 1, б. Она может располагаться как слева, так и справа от оси Y в зависимости от знака $k^{(l)}(s_0)$.

Из соотношений (10) легко получить зависимость от параметра s угла с осью Y траектории, проходящей через точку $\mathbf{r}(s)$ волнового фронта и касающейся каустики в точке $\tilde{\mathbf{r}}(s)$:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\tilde{x}}{ds} \bigg/ \frac{d\tilde{y}}{ds} = -k(s-s_0).$$

Координата точки пересечения траектории с прямой $y = \tilde{y}(s_0)$:

$$x = \tilde{x} + (\tilde{y} - \tilde{y}(s_0)) \operatorname{tg} \alpha = \frac{(-1)^{l+1}}{k^l} \left(\frac{1}{k} \right)_{s_0}^{(l)} \alpha^{l+1}. \quad (11)$$

Этот вид зависимости координаты точки прихода означает наличие в плоскости $y = \tilde{y}(s_0)$ фокусировки l -го порядка.

Таким образом, каустика для семейства прямолинейных траекторий на плоскости в окрестности их точки фокусировки нечетного порядка (фокусировка первого, третьего и т. д. порядков) имеет вид, изображенный на рис. 1, б. Для случая фокусировки четного порядка каустика имеет вид, изображенный на рис. 1, а. В этом случае имеется точка возврата.

Все сказанное выше, очевидно, имеет место и для осесимметричных систем для прямолинейных траекторий в меридиональной плоскости.

В терминах теории катастроф [1] точки каустики являются точками "складки". Таковой же является точка фокуса (точка С на рис. 1) при $l=1$.

При $l=2$ точка фокуса является точкой "сборки".

При $l=3$ точка фокуса — точка типа "ласточкин хвост". Каустика такой особенности имеет три существенных внешних параметра (кратность особенности равна трем) и представляется в виде сложной поверхности в трехмерном пространстве. Версальная деформация (производящая функция) этой особенности имеет вид $\alpha^5 + u\alpha^3 + v\alpha^2 + w\alpha$, где u, v, w — внешние параметры (пространство каустики). В нашем случае мы имеем сечение каустики плоскостью $u=0$, которое имеет вид $27v^4 = 80w^3$ (роль параметра v в нашем случае играет $\tilde{y} - \tilde{y}(s_0)$, роль параметра w играет $\tilde{x}$).

При $l=4$ точка фокуса — точка типа "бабочка". Каустика такой особенности — поверхность в четырехмерном пространстве.

Плотность траекторий $j \sim (dx/d\alpha)^{-1}$ на каустике обращается в бесконечность. Используя формулу (11), легко получить порядок особенности:

— в плоскости фокусировки

$$j \sim \alpha^{-1} \sim x^{-1/(l+1)}, \quad \alpha, x \rightarrow 0;$$

— в плоскости $y = y_1$ вблизи фокуса ($y_1 \neq \tilde{y}(s_0)$)

$$j \sim (\alpha - \alpha_1)^{-1} \sim (x - x_1)^{-1/2}, \quad \alpha \rightarrow \alpha_1, x \rightarrow x_1,$$

где x_1 — координата пересечения каустики плоскостью, α_1 — соответствующий угол траектории.

Независимость порядка особенности от l вне фокальной точки означает однотипность точек каустики: все точки каустики, кроме, может быть, фокальной, — точки "складки".

Задачи электронной оптики — это, как правило, исследования особенностей отображения двумерных многообразий (например, направление луча, выходящего из заданной точки, представляется некоторой областью на единичной сфере) на двумерные (например, плоскость фокусировки). Устойчивыми особенностями таких отображений, согласно теореме Уитни [1], являются только "складка" и "сборка". Все остальные "малым шевелением" распадаются на эти две. Это означает, в частности, что фокусировка третьего и более высокого порядка в реальных системах недостижима, мы лишь можем приблизиться к ней, максимально сжав каустическую структуру из точек "складки" и "сборки". В этом, по-видимому, заключается суть известной теоремы Шерцера [5] о неустраимости сферической аберрации.

2. ПРИМЕР

В этом разделе в качестве примера на основе компьютерного моделирования рассматриваются фокусирующие и диспергирующие свойства полевой структуры, образованной на основе простой электродной конфигурации: двух ограниченных по длине коаксиальных цилиндрических поверхностей с плоскими торцевыми электродами (рис. 2), используемой в качестве зеркала с источником на оси. Такого рода системы рассматривались в работах [6, 7]. Однако найденные там схемы далеко не исчерпывают всего многообразия схем с широким диапазоном электронно-оптических свойств, которые могут быть построены на основе этой простой электродной конфигурации.

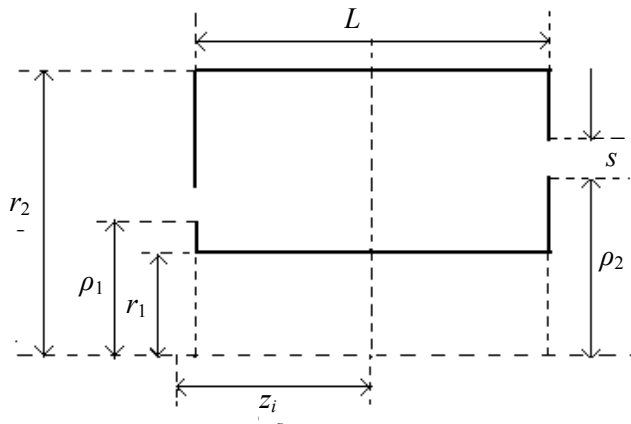


Рис. 2. Схема электродной конфигурации на основе цилиндрического конденсатора с торцевыми электродами

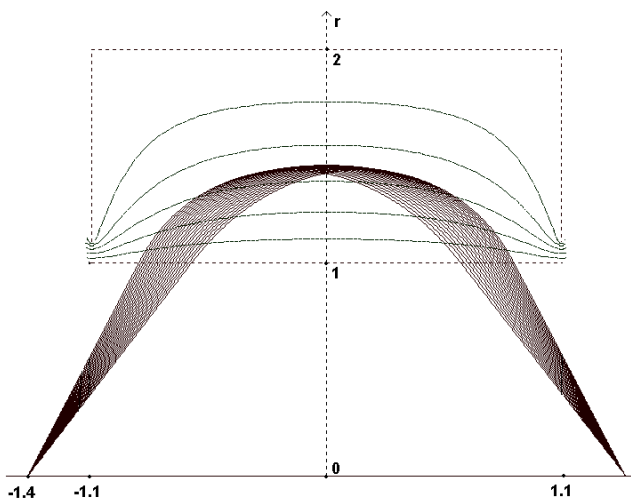


Рис. 3. Полевая структура (эквипотенциали), обеспечивающая обращение траекторий по направлениям

Актуальность задачи обусловлена значительным расширением области применения электростатических спектрометров для анализа потоков заряженных частиц по энергиям и повышенными требованиями к энергоанализаторам. Главные из них — высокое разрешение при максимально воз-

можной светосиле — стимулируют поиски новых полевых структур, обеспечивающих сочетание высокой энергетической дисперсии с высоким качеством фокусировки пучков с большим угловым раствором. Проведенный в предыдущем разделе анализ особенностей семейства траекторий диктует определенную стратегию при осуществлении компьютерного моделирования. Проводится траекторный анализ пучка с широким угловым раствором. Визуализируются его каустики. А затем путем целенаправленного изменения параметров задачи производится деформация структуры каустик в нужном направлении. Так, для получения фокусировки второго порядка необходимо, чтобы семейство траекторий имело две огибающих — две ветви каустики. Варьированием полевой структуры и энергии пучка мы добиваемся формирования в нужном месте острия, подобного изображенному на рис. 1, а.

Параметрами задачи являются (рис. 2): r_1 и r_2 — радиусы цилиндров, L — их длина, z_i — координата источника, ρ_1 и ρ_2 — внутренние радиусы кольцевых разрывов соответственно на левом и правом торцевых электродах, s — величина разрыва, а также E/U — отношение энергии заряженных частиц к разности потенциалов между электродами.

На рис. 3 изображена схема, обеспечивающая "обращение" траекторий пучка по направлениям в диапазоне углов (α_1, α_2) , $\alpha_1 = 52.5^\circ$, $\alpha_2 = 62.5^\circ$: траектория с начальным углом α к оси вращательной симметрии системы при выходе из области поля направлена под углом $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha$. Семейство траекторий имеет каустическую — огибающую, расположенную в области поля, и каустическую в виде полукубического острия в окрестности точки фокусировки. Эмиттанс пучка в этой окрестности приведен на рис. 4.

На рис. 5 изображена схема, осуществляющая фокусировку ось—ось в диапазоне углов $39.5^\circ \leq \alpha \leq 51^\circ$. Параметры пучка на выходе: диапазон углов $32.4^\circ \leq \alpha' \leq 38.5^\circ$, размеры фокального пятна $\Delta z = 0.015$, $\Delta r = 0.011$, линейная дисперсия $D = 8r_1$, что обеспечивает разрешение $\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-3}$. На рис. 6 представлен эмиттанс пучка

в наименьшем его сечении. Семейство траекторий имеет каустическую в виде полукубического острия.

Моделирование показало, что даже варьирование только радиусов кольцевых разрывов ρ_1 и ρ_2 торцевых электродов дает широкий спектр схем с большим диапазоном электронно-оптических параметров.

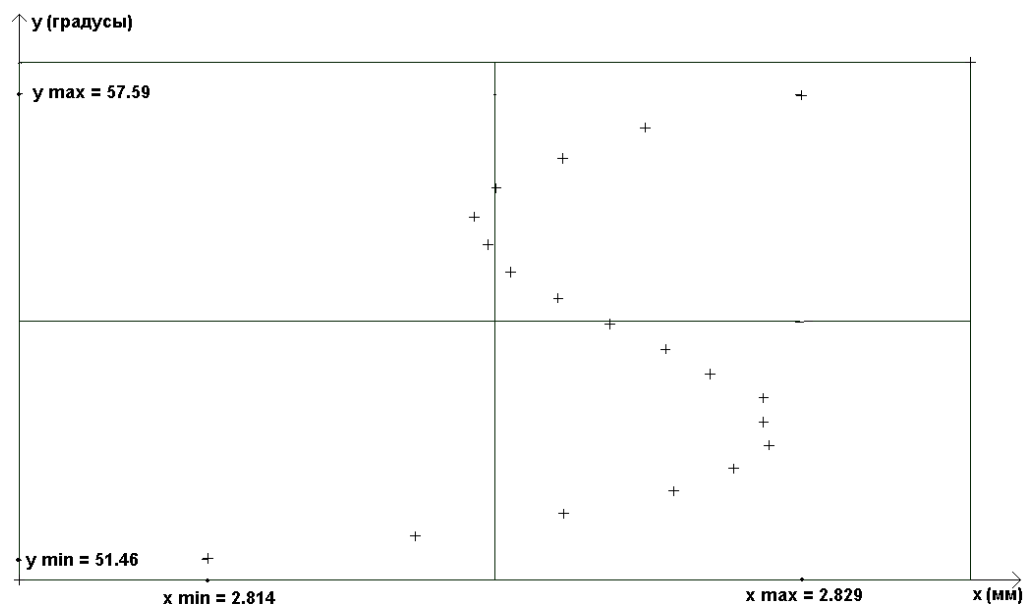


Рис. 4. Эмиттанс пучка вблизи фокальной точки для схемы рис. 3

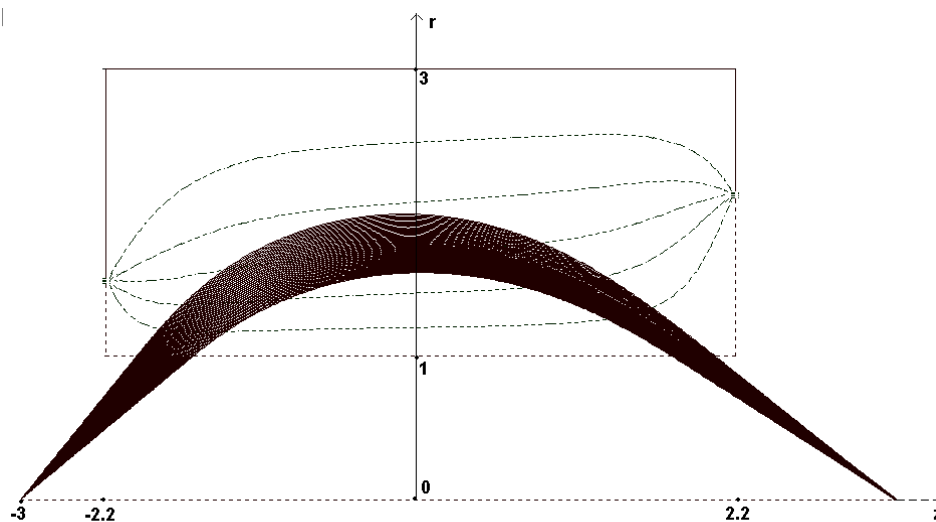


Рис. 5. Полевая структура (эквипотенциали), обеспечивающая фокусировку ось—ось второго порядка

ВЫВОДЫ

1. На основе представлений о трубках траекторий в рамках гамильтоновой механики получены общие выражения для нахождения каустик семейства траекторий в электростатическом поле.

2. Для семейств прямолинейных траекторий на плоскости исследована структура каустик

вблизи фокальных точек. Показано что острие (точка возврата) у каустик формируется в случае угловой фокусировки четного порядка.

3. На основе компьютерного моделирования исследованы фокусирующие и диспергирующие свойства поля цилиндрического конденсатора с торцевыми электродами. Предложены схемы зеркального энергоанализатора на его основе.

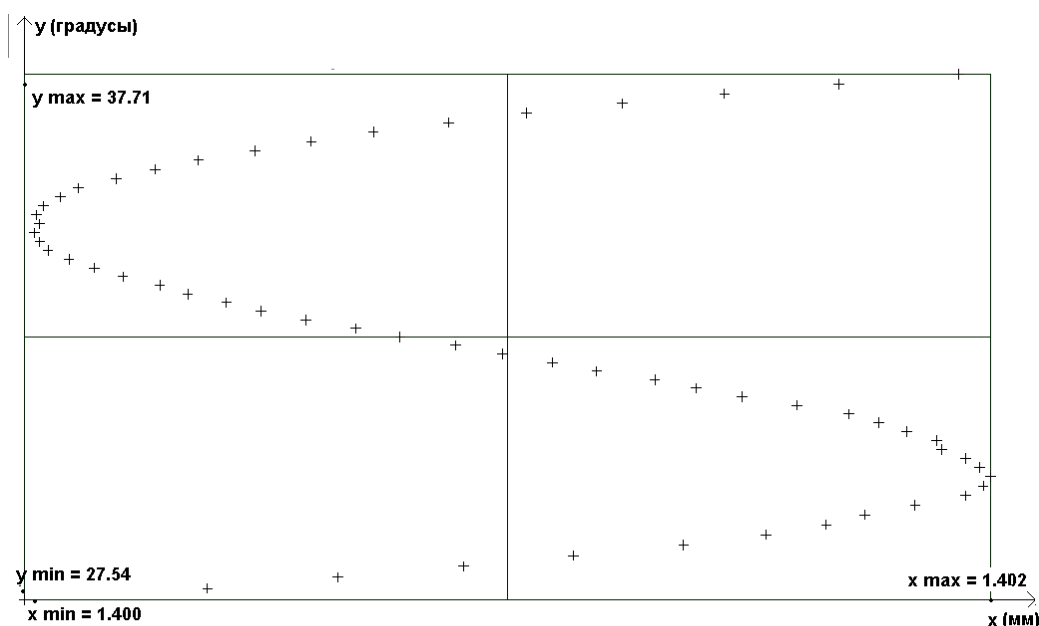


Рис. 6. Эмиттанс пучка вблизи фокальной точки для схемы рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
3. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 176 с.
5. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики: в 2-х т. М.: Мир, 1993. 551 с., 477 с.
6. Овсянникова Л.П., Фишкова Т.Я. Цилиндрический зеркальный энергоанализатор с закрытыми торцами // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 10. С. 174–177.
7. Трубицин А.А. Новый электростатический анализатор с угловым и энергетическим разрешением // Письма ЖТФ. 1995. Т. 21, № 13. С. 19–22.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 7.06.2001.

STRUCTURAL FEATURES OF THE CHARGED PARTICLE BEAM IN ELECTROSTATIC FIELD

M. S. Shalygina, A. P. Shcherbakov

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

Structural features of charged particle beams in electrostatic field are studied. Caustic types near the focal plane in accordance with the order of focusing have been established. Using computer simulation and beam structure analysis, focusing and energy-dispersive properties of a cylindrical mirror with facing electrodes are studied. Some electron-optical schemes of the mirror energy analyzer are proposed.