

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 629.7.054: 533.6

© С. В. Богословский, А. С. Пантелеев

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АЭРОМАГНИТНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Настоящая статья затрагивает проблемы идентификации летательных аппаратов при испытании их уменьшенных моделей в аэродинамических трубах с помощью магнитного подвеса. Магнитная подвеска моделей предназначена для исключения влияния механического поддерживающего устройства, в сильной степени нарушающего условия эксперимента. Основная часть статьи посвящена алгоритму идентификации динамических характеристик летательного аппарата, основанному на методе условного среднего, который может реализоваться на ЦВМ.

ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Одной из важнейших задач практической аэродинамики является получение достоверной информации о поведении управляемого объекта в воздушной или жидкой среде на стадии его проектирования. Конечно, наиболее полные, исчерпывающие сведения о характеристиках исследуемого объекта могут дать только натурные испытания или эксплуатация, однако выявление конструкторских ошибок на этих этапах может привести к неоправданно большим материальным потерям. Поэтому в настоящее время широко распространены испытания уменьшенных моделей летательных аппаратов (ЛА) в аэродинамических трубах (АДТ). На основе этих экспериментов и происходит уточнение математических моделей самолетов, идентификация их аэродинамических коэффициентов. К сожалению, при традиционном контактном способе фиксации модели ЛА в аэродинамической трубе требования максимально возможного подобия условий эксперимента условиям реальной эксплуатации зачастую нарушаются. Эти нарушения прежде всего связаны с наличием механического поддерживающего устройства, сильно искажающего структуру следа обтекаемой модели и нарушающего картину распределения скоростей и давлений по ее поверхности. Как следует из анализа монографий отечественных и зарубежных ученых [1], при фиксированном методе крепления погрешность исследования в статических испытаниях может достигать 40%. В случае динамических испытаний ситуация ухудшается еще сильнее благодаря погрешностям контактного шарнира, ограничивающего движение модели. В этом случае неминуемо появление ошибок не только количественного, но и качественного характера, практически не поддающихся математическому анализу.

Единственной возможностью избежания указанных выше ошибок является отказ от механических поддерживающих устройств и переход к новому, безконтактному методу фиксации. При таком подходе можно полностью исключить влияние державки, нарушающее математическую модель идентифицируемого объекта, и на качественно новом уровне проводить исследование динамики моделей ЛА. На сегодняшний день реализация безконтактной подвески модели в рабочей части АДТ возможна только с помощью сложного специального устройства — магнитного подвеса (МП), реализующего принципы левитации немагнитной модели с ферромагнитным основанием во внешнем магнитном поле. Успешность проведения опытов с безконтактной подвеской на практике доказана в Государственном университете аэрокосмического приборостроения (ГУАП). Университет располагает пятикатушечным магнитным подвесом V-образного дифференциального типа, позволяющим проводить как статические, так и динамические пространственные испытания моделей летательных аппаратов. Максимально возможное число степеней свободы исследуемого объекта совпадает с числом индуктивных катушек подвеса и в данном случае равняется пяти. Естественно, что специфика функционирования магнитных подвесов вносит свои особенности в процесс идентификации математических моделей ЛА. Следовательно, возникает необходимость получения нового алгоритма оценивания, ориентированного на аэромагнитный эксперимент. Выводу указанного алгоритма, алгоритма идентификации характеристик летательного аппарата по результатам аэромагнитного эксперимента, и посвящена эта статья. Начнем ее с краткого описания принципов действия магнитных подвесов (МП). Это необходимо для понимания некоторых особенностей поставленной задачи.

ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ МАГНИТНОГО ПОДВЕСА

В основе аэромагнитного эксперимента в аэродинамической трубе лежат законы взаимодействия ферромагнитного тела, вмонтированного в диэлектрический корпус модели ЛА, и внешнего магнитного поля, порождаемого системой индуктивных катушек. Характеристики внешнего магнитного поля зависят от токов, которые протекают в соленоидах подвеса. Токи в свою очередь полностью определяются вектором управляющих напряжений, поданных на обмотки соленоидов. Таким образом, устанавливается связь между силовым взаимодействием системы подвес—модель и вектором напряжений, контролирующим положение модели. Что касается алгоритма определения вектора управляющих напряжений, то он реализуется с помощью цифровой системы управления и представляет собой решение сложной задачи, описание которой выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь некоторые предпосылки синтеза закона управления.

Под действием воздушных нагрузок аэродинамической трубы расположенная внутри нее исследуемая модель совершает движение по некоторой траектории. Параметры движения модели, а именно: координаты ее положения и их первые производные, а также токи катушек — дискретно фиксируются соответствующими датчиками. Данная информация, представляющая собой вектор текущего состояния объекта, поступает на вход ЦВМ, где и происходит расчет алгоритма управления. Обработанный на ЦВМ вектор состояния, посредством цифроаналогового преобразователя трансформируется в вектор управляющих напряжений, призванных компенсировать воздействие аэродинамических нагрузок и обеспечивать новое равновесное состояние модели. Настоящая статья посвящена процессу идентификации динамических характеристик объекта по результатам уже проведенного аэромагнитного испытания. Поэтому абстрагируемся от эксперимента, как такового, и в дальнейшем будем предполагать, что в нашем распоряжении уже имеется выборка численных данных, отображающая вектор состояния модели ЛА на всех стадиях ее наблюдения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ПОДВЕС—ОБЪЕКТ

Эффективность процесса идентификации во многом зависит от удачно выбранной структуры объекта и языка, в рамках которого она описывается. Необходимо правильно формализовать систему подвес—объект и на базе теоретических априорных сведений получить ее математическую

модель. Рассмотрим динамику объекта, исследуемого в ходе аэромагнитного эксперимента. Согласно [1, 2], она определяется упрощенным матричным уравнением

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fm} + \mathbf{Q}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор независимых обобщенных координат объекта (в случае подвеса ГУАП — это три координаты центра масс и две угловые координаты); $\mathbf{Fm} = (Fm_1, Fm_2, \dots, Fm_n)^T$ — вектор обобщенных электромагнитных сил, компенсирующий вес модели и другие нагрузки, испытываемые ею в течение эксперимента; $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ — вектор прочих обобщенных сил (вес, аэродинамические воздействия); $\mathbf{M}$ — матрица инерционных коэффициентов $n \times n$ (масса модели, обобщенные моменты инерции), $n = 5$ — порядок системы. В случае использования ферромагнитного основания модели обобщенные силы Fm_i примут квадратичную форму катушечных токов [1]:

$$Fm_i = \mathbf{I}^T \mathbf{A} \mathbf{m}_i \mathbf{I}, \quad (2)$$

где $\mathbf{I}^T = (I_1, \dots, I_n)$ — вектор токов, протекающих в катушках; $\mathbf{A} \mathbf{m}_i$ — матрицы размера $n \times n$, зависящие от положения модели относительно системы катушек и от характеристик магнитного поля. Они для каждой конфигурации МП, как правило, определяются опытным путем.

Обобщенные нагрузки $\mathbf{Q}$ вида

$$Q_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} \psi_j \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (3)$$

где S — площадь крыла модели (самолета), v — воздушная скорость, ρ — массовая плотность воздуха, представляют наибольший интерес. Они содержат векторы безразмерных коэффициентов $\mathbf{C} \mathbf{a}_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ij}]$, характеризующие динамические свойства исследуемого ЛА и подлежащие определению в ходе процесса идентификации. $\mathbf{C} \mathbf{a}_i$ зависят от базисных функций $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j]$, в рамках которых проходит идентификация объекта. В общем виде [3] к числу аргументов базисных функций относятся кинематические параметры, критерии подобия и время, т.е. $\Psi = [x_1, \dots, x_n, dx_1/dt, \dots, dx_n/dt, Re, Mh, t, \dots]$, где Re и Mh — числа Рейнольдса и Маха. Однако в частных случаях Ψ приобретают конкретный вид. Так, например, при исследовании продольного движения объекта в качестве Ψ можно выбрать вектор $[a, a^2, da/dt]$, (при этом число аргументов $k = 3$, а a — угол атаки).

Математическая модель системы будет неполной без уравнений, отображающих изменение напряжений в катушках магнитного подвеса. Так, процессы в соленоидах, описываются матричным дифференциальным соотношением

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}, \quad (4)$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ — матрицы размерности $n \times n$ взаимной индукции и сопротивлений соленоидов комплекса. А вектор управляющих напряжений, как было отмечено выше, формируется в виде суммы матричных функций, зависящих от вектора состояния объекта:

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{I}. \quad (5)$$

Таким образом, сведя уравнения (1)–(5) к одной системе и произведя переобозначения вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}1, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}2, \quad \mathbf{I} = \mathbf{x}3,$$

(т.е. унифицируя переменные состояния), понизим порядок дифференциального уравнения (1) и по-

лучим единую систему уравнений, характеризующую динамику магнитного подвеса:

$$\begin{cases} \dot{x}1_i = m_{ii}^{-1} \cdot (\mathbf{x}3^T \cdot \mathbf{A}m_i \cdot \mathbf{x}3 + \sum_{j=1}^k c_{ij} \psi_j \frac{\rho v^2}{2} S), \\ \dot{x}2_i = x1_i, \quad i = 1 \dots 5, \\ \dot{\mathbf{x}}3 = \mathbf{L}^{-1} \cdot (\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{x}1 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}2 + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}3), \end{cases} \quad (6)$$

m_{ii} в (6) — это элементы главной диагонали матрицы инерционных коэффициентов $\mathbf{M}$.

И напоследок, сведя параметры движения модели различной природы (координаты, их производные и токи катушек) к общему вектору состояния $\mathbf{x}$, представим систему (6) в более привычном и удобном для анализа виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = m_{ii}^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{[1-15]}^T \cdot \mathbf{A}m_i \cdot \mathbf{x}_{[1-15]} + \sum_{j=1}^k c_{ij} \psi_j \frac{\rho v^2}{2} S), \quad i = 1 \dots 5, \\ \dot{x}_i = x_{i-5}, \quad i = 6 \dots 10, \\ \dot{\mathbf{x}}_{[11-15]} = \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{x}_{[1-5]} + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_{[6-10]} + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}_{[11-15]}). \end{cases} \quad (7)$$

Из рассмотрения (6)–(7) следует, что процесс идентификации динамических характеристик модели ЛА (параметры $\mathbf{C}_a$) сопряжен с анализом многомерной многосвязной нелинейной системы, что в значительной степени осложняет поставленную задачу. Порядок систем (6)–(7) равен утроенному числу управляемых координат модели, т.е. в данном случае пятнадцати. Дополнительные трудности идентификации возникают из-за неточного определения вектора состояния объекта на всех этапах его наблюдения. Погрешности датчиков, дискретность измерений и, главное, неидеальность математической модели системы — все это заставляет исследователя проводить процесс идентификации по заведомо неточным данным. Однако, как справедливо показано в [4–7], в данной ситуации рекомендуется использовать специальные методы одновременного оптимального оценивания неизвестных параметров объекта и всех переменных состояния системы. Упомянутые методы основаны на определении апостериорной совместной плотности распределения векторов состояния и неизвестных параметров, что приводит исследователя к необходимости нахождения интегралов сложного интегрально-дифференциального уравнения в частных производных. Аналитическое решение такого интеграла невозможно [6], и это еще раз подтверждает сложность решаемой задачи. Однако, сделав ряд правомочных упрощений, и воспользовавшись дискретным методом максимального прав-

доподобия (подробно описан в [4]), получим практически реализуемый алгоритм идентификации динамических характеристик модели ЛА.

Дальнейшее изложение строится следующим образом. Сначала приводятся общие выражения метода максимального правдоподобия, поясняющие его суть, которые сами по себе еще не являются искомыми алгоритмами. Затем полученные соотношения распространяются на конкретный случай — систему подвес—объект, описываемую уравнениями (6). Результатом конкретизации и явится рекуррентный алгоритм идентификации параметров модели ЛА, заявленный в названии статьи.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ УСЛОВНОГО СРЕДНЕГО ПО ФУНКЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть система уравнений, объединяющая дискретную математическую модель динамики исследуемого объекта и наблюдения его состояния, имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{a}, k) + \mathbf{w}, \\ \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{a}, k) + \mathbf{v}. \end{cases} \quad (8)$$

В ней действуют следующие обозначения: $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ — нелинейные функции формирования и наблюде-

ния сигнала; $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$ — векторы состояния и неизвестных параметров; k — момент дискретного времени, соответствующий t_k ; $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ — некоррелируемые по отношению друг к другу гауссовские белые шумы с нулевым средним и матрицами интенсивностей $\mathbf{V}\mathbf{w}$ и $\mathbf{V}\mathbf{v}$, удовлетворяющими уравнениям:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)\} &= \mathbf{V}\mathbf{w}(k)\delta_k(k-j), \\ E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)\} &= \mathbf{V}\mathbf{v}(k)\delta_k(k-j), \end{aligned}$$

где E — функция математического ожидания, δ — функция Кронекера.

К задаче нелинейной фильтрации имеет смысл подходить с точки зрения минимизации некоторой функции штрафа (потерь), связанной с недостижением абсолютно точной оценки вектора неизвестных параметров. Одной из традиционных функций штрафа является функция максимального правдоподобия $\mathbf{P}(\mathbf{Z}|\boldsymbol{\theta})$, представляющая собой совместную плотность распределения вектора наблюдения $\mathbf{Z}$ и вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}$. (В скобках заметим, что наравне с неизвестными параметрами $\mathbf{a}$, подлежащими идентификации, вектор $\boldsymbol{\theta}$ может включать в себя и состояния системы, т.е. $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$). При этом вектору $\boldsymbol{\theta}$, присваиваются те значения $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МП}}(\mathbf{Z})$, при которых вероятность появления наблюдавшейся реализации $\mathbf{Z}$ максимальна. Иными словами, выполняется равенство:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{Z}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МП}}(\mathbf{Z})} = 0. \quad (9)$$

$\hat{}$ — обозначение оптимальной оценки, в качестве которой естественно принять условное математическое ожидание (условное среднее).

Функция $\mathbf{P}$ для многомерного нелинейного случая имеет сложный вид, и в общем виде решение (9) найти не удастся. Однако во многих практических ситуациях, когда распределения шумов системы полагаются гауссовскими, функция штрафа полностью и без потери информации определяется своим первым и вторым моментами [4]. А ее максимум совпадает с минимумом логарифма плотности вероятности, взятого с обратным знаком. Функция штрафа в этом случае примет вид:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \ln[\det\{\|\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta})\|_{V_Z^{-1}(k|k-1, \boldsymbol{\theta})}^2 + V_Z(k|k-1, \boldsymbol{\theta})\}], \quad (10)$$

где запись вида $V_Z(k|k-1, \boldsymbol{\theta})$ — вычисление дисперсии ошибки на этапе k по результатам наблюдений $\mathbf{Z}(k-1)$, т.е. априорная дисперсия; выражение типа $\|\cdot\|_{\mathbf{R}}^2$ — положительно определенная

норма с весовой матрицей $\mathbf{R}$; $\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta})$ — процесс "невязки", представляющий новую информацию, вносимую наблюдением $\mathbf{z}(k)$.

Облегчив задачу минимизации функции штрафа с вычислительной точки зрения, мы сталкиваемся с новыми трудностями. Если сигнал и его наблюдение являются нелинейными процессами, то решение (10) нельзя найти точно. Его можно лишь приближенно определить через аппроксимацию функций $\mathbf{h}$ и $\mathbf{f}$ отрезками ряда Тейлора. Тогда оптимальная оценка — условное математическое ожидание, которое определяется по формуле

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta}) = E(\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}(k-1), \boldsymbol{\theta}) \quad (11)$$

и минимизирует линеаризованную функцию штрафа (10), примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta}) + \\ &+ \mathbf{K}(k) \cdot (\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}(k), k|\boldsymbol{\theta})). \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (12) и есть искомое уравнение фильтра условного среднего в своем классическом виде [4]. Некоторые входящие в него неопределенные величины будут описаны ниже. Оно не может использоваться еще для расчетов, так как пока не раскрыт смысл составляющих его величин. Поэтому рассмотрим содержание формулы (12) более подробно. Первое, на что следует обратить внимание, это то, что для определения вектора неизвестных параметров на каждом этапе алгоритма идентификации необходимо выполнять его одношаговую экстраполяцию. То есть знать вектор состояния системы в следующий (т.е. в будущий по отношению к текущему) момент времени. Оценка, осуществляющая экстраполяцию на один шаг для функции правдоподобия (10), легко выражается в терминах оценки текущего состояния $\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta})$ соотношением

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}), k). \quad (13)$$

Далее необходимо указать вид так называемого матричного коэффициента усиления

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= \mathbf{P}(k|\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{h}^T(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta}), k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k|k-1, \boldsymbol{\theta})} \right] + \\ &+ \mathbf{V}\mathbf{v}^{-1}(k), \end{aligned} \quad (14)$$

который в свою очередь выражается через матрицу дисперсий ошибки фильтрации $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{V}(k|k-1, \boldsymbol{\theta}) - \\ &- \text{cov}\{\mathbf{x}(k), \mathbf{z}(k) | \mathbf{Z}(k-1), \boldsymbol{\theta}\} \times \\ &\times \mathbf{var}^{-1}\{\mathbf{z}(k) | \mathbf{Z}(k-1), \boldsymbol{\theta}\} \times \\ &\times \text{cov}\{\mathbf{z}(k), \mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}(k-1), \boldsymbol{\theta}\} \end{aligned} \quad (15)$$

и матрицу $\mathbf{V}$ дисперсии ошибки фильтрации объекта:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(k | k-1, \boldsymbol{\theta}) \approx & \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1 | \boldsymbol{\theta}), k-1)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k-1 | \boldsymbol{\theta})} \cdot \\ & \cdot \mathbf{P}(k-1 | \boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}^T(\hat{\mathbf{x}}(k-1 | \boldsymbol{\theta}), k-1)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k-1 | \boldsymbol{\theta})} + \\ & + \mathbf{V}\mathbf{w}(k-1). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, теперь выписана полная система уравнений (12)–(16) дискретного нелинейного алгоритмического оценивания первого порядка по методу условного среднего. Для краткости изложения процедура линеаризации функций формирования и наблюдения сигнала $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ осталась за рамками данного раздела. Также был опущен вывод матрицы дисперсий ошибки фильтрации $\mathbf{P}$ (она находится из теоремы об условной дисперсии, подробно изложена в [4]). Напоследок заметим, что порядком аппроксимаций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ определяется окончательный вид уравнений (12)–(16). А полученные алгоритмы по своей сути являются обобщенным алгоритмом фильтрации Калмана. И если модели формирования и наблюдения сигнала линейны, то уравнение (12) превращается в обычное уравнение фильтра Калмана с линейной матрицей усиления $\mathbf{K}$.

Теперь же, как было заявлено выше, опираясь на выражения (12)–(16), запишем процедуру идентификации параметров ЛА в виде конкретного пошагового алгоритма. И далее сориентируем полученные соотношения на случай аэродинамического эксперимента.

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Пусть система уравнений, характеризующая взаимодействие магнитного подвеса и исследуемой модели ЛА, представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, t) + \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{a}(t_k), t_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (17)$$

В скобках заметим, что (6)–(7) могут быть легко сведены к такой форме, путем выбора соответствующей функции формирования сигнала $\mathbf{f}$ и добавлением шума $\mathbf{w}$, который включает в себя ошибки, связанные с неточностью математической модели объекта. В (17) действуют следующие обозначения: $\mathbf{x}$ — p -мерный вектор состояния, $\mathbf{a}$ — q -мерный вектор оцениваемых параметров. Система расширена r -мерным вектором наблюдения $\mathbf{z}$ с шумом измерений $\mathbf{v}$. Ковариационные матрицы шумов системы соответствуют $\mathbf{V}\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{V}\mathbf{v}(k)$. Аэродинамический эксперимент является непрерыв-

ным процессом, с дискретным наблюдением параметров состояния (это видно по (17)), поэтому к нему будут применяться методы дискретно-непрерывной фильтрации.

Следуя выбранному методу идентификации, произведем расширение вектора состояния $\mathbf{x}$ за счет неизвестных параметров $\mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{a}$ при этом считается постоянным. Тогда $\mathbf{y}$ — новый m -мерный вектор ($m = p+q$), обобщающий состояние системы:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Начальные условия задаются предполагаемым состоянием системы $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}(t_0)$, априорным вектором оцениваемых параметров $\hat{\mathbf{a}}_0$ и ковариационными матрицами $\mathbf{V}_{11}(t_0)$ и $\mathbf{V}_{22}(t_0)$ ошибок оценивания $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \in \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{a}}_0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(t_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22}(t_0) \end{bmatrix} \right). \quad (19)$$

Из (18) видно, что даже если бы функции формирования и наблюдения сигнала $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ имели бы линейный вид, то обобщенная система все равно была бы нелинейной относительно нового объединенного вектора. Таким образом, задача совместной фильтрации и идентификации всегда сводится к проблеме нелинейной фильтрации. В [7] приводится нелинейный алгоритм дискретно-непрерывной фильтрации по методу условного среднего для похожего случая — традиционного аэродинамического эксперимента. Воспользуемся соотношениями этого алгоритма.

В соответствии с [7] процедура оценивания сводится к выполнению восьми вычислительных операций на каждом ее шаге.

1-й шаг. Определение прогноза вектора состояния и параметров для момента $t = t_k + 1$:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k} = \mathbf{y}(t_{k+1} / t_k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} / t_k) \\ (t_{k+1} / t_k) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Здесь по аналогии с (18) происходит оценка объединенного вектора $\mathbf{y}$, т.е. его одношаговая экстраполяция. При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t / t_k)}{\partial t} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t / t_k), \hat{\mathbf{a}}(t_k), t), \\ \hat{\mathbf{a}}(t_{k+1} / t_k) &= \hat{\mathbf{a}}(t_k). \end{aligned}$$

Напомним, что начальные условия работы алгоритма известны и численно заданы в (19).

2-й шаг. Линеаризация функции формирования сигнала $\mathbf{f}$.

На этом этапе выполняется аппроксимация $\mathbf{f}$

рядом Тейлора первого порядка в окрестности оценки объединенного вектора, найденной на предыдущем шаге. Для этого находится матрица $\mathbf{F}(t_k+1, t_k)$ размера $p \times m$ интегрированием уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{F}(t/t_k)}{\partial t} = \mathbf{A}_1(t/t_k) \cdot \mathbf{F}(t/t_k) + [\mathbf{0}_{(p \times p)} | \mathbf{A}_2(t/t_k)] \quad (21)$$

на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ с начальным условием $\mathbf{F}(t/t_k) = [\mathbf{I}_{(p \times p)} | \mathbf{0}_{(p \times q)}]$. Здесь $\mathbf{I}$ и $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая матрицы, а частные производные ряда определены как:

$$\mathbf{A}_1(t/t_k)_{(p \times p)} = \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t/t_k), \hat{\mathbf{a}}(t_k), t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t/t_k)},$$

$$\mathbf{A}_2(t/t_k)_{(p \times q)} = \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t/t_k), \hat{\mathbf{a}}(t_k), t)}{\partial \hat{\mathbf{a}}(t_k)}.$$

3-й шаг. Нахождение корреляционной матрицы эквивалентного дискретного шума объекта:

$$\frac{\partial \mathbf{W}(t/t_k)}{\partial t} = \mathbf{A}_1(t/t_k) \cdot \mathbf{W}(t/t_k) + \mathbf{W}(t/t_k) \cdot \mathbf{A}_1^T(t/t_k) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t). \quad (22)$$

4-й шаг. Определение матрицы ошибки прогноза. В отличие от (15) в [7] предлагается формирование блочной матрицы $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(k+1)_{(p \times p)} & \mathbf{P}_{12}(k+1)_{(p \times q)} \\ \mathbf{P}_{12}^T(k+1)_{(q \times p)} & \mathbf{P}_{22}(k+1)_{(q \times q)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

на основе соотношений:

$$\mathbf{P}_{11}(k+1) = \mathbf{F}(t_{k+1}, t_k) \cdot \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{F}^T(t_{k+1}, t_k) + \mathbf{W}(t_{k+1}, t_k),$$

$$\mathbf{P}_{12}(k+1) = \mathbf{F}(t_{k+1}, t_k) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(t_k) \\ \mathbf{V}_{22}(t_k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{22}(k+1) = \mathbf{V}_{22}(t_k).$$

5-й шаг. Вычисление матричного коэффициента усиления:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{V}\mathbf{v}_{k+1})^{-1}, \quad (24)$$

где $\mathbf{H}$ — матрица наблюдений $r \times m$, представляющая собой линеаризованную в окрестности оценки объединенного вектора $\mathbf{y}$ функцию наблюдения $\mathbf{h}$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}, t_{k+1})}{\partial \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}}.$$

6-й шаг. Вычисление ковариационной матрицы ошибки текущей оценки состояния и параметров в соответствии с (16)

$$\mathbf{V}_{k+1} = (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{I}) \mathbf{P}_{k+1} (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{I})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{V}\mathbf{v}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \quad (25)$$

и представление ее в виде блоков:

$$\mathbf{V}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(t_{k+1})_{(p \times p)} & \mathbf{V}_{12}(t_{k+1})_{(p \times q)} \\ \mathbf{V}_{12}^T(t_{k+1})_{(q \times p)} & \mathbf{V}_{22}(t_{k+1})_{(q \times q)} \end{bmatrix}.$$

7-й шаг. Определение текущей оценки вектора состояния и идентифицируемых параметров:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}, t_{k+1})), \quad (26)$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}/t_k) \\ \hat{\mathbf{a}}(t_{k+1}/t_k) \end{bmatrix}.$$

8-й шаг. Вычисление взвешенного скалярного квадрата вектора невязки для проверки достоверности результатов идентификации:

$$\lambda_{k+1}^2 = \tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{V}\mathbf{v}_{k+1})^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k}, \quad (27)$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}, t_{k+1}).$$

Итак, полученные соотношения (20)–(27) представляют собой алгоритм идентификации динамических характеристик модели ЛА по результатам обыкновенного трубного эксперимента. Располагая уравнениями динамики системы подвес—модель (7), мы можем представить некоторые выражения алгоритма (20)–(27) в более конкретном виде, отражающем особенности аэромагнитного эксперимента. Понятно, что некоторые матрицы алгоритма, (например, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{W}$) нельзя выразить в явном виде. Они определяются путем численного интегрирования. Однако для определения $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{H}$ имеются все необходимые данные. Положив $p = 15$ и воспользовавшись (21) и (7), находим:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(5 \times 5)} & \mathbf{0}_{(5 \times 5)} & \mathbf{g}_{(5 \times 5)} \\ \mathbf{0}_{(5 \times 5)} & \mathbf{I}_{(5 \times 5)} & \mathbf{0}_{(5 \times 5)} \\ \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_0 & \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{C}_2 - \mathbf{R}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(i, j) = \sum_{k=1}^{k=5} [\mathbf{x}(k+10) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{m}_i(k, j) + \mathbf{A}\mathbf{m}_i(j, k))]. \quad (28)$$

Для определения вида $\mathbf{A}_2$ необходимо сначала задать базисные функции Ψ в выражении (3), относительно которых происходит идентификация параметров объекта. Вид Ψ может меняться в зависимости от типа исследуемой модели. Следовательно, q — размер вектора оцениваемых параметров также может меняться. Однако сразу надо отметить, что вектор оцениваемых параметров всегда постоянен в рамках конкретного эксперимента, а его максимальная размерность фиксирована. Для аэромагнитного эксперимента, например, q не может превышать 5. В противном случае нарушится условие идентифицируемости [6]. Итак, для общего случая матрица $\mathbf{A}_2$ находится как

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(q \times q)} \\ \mathbf{0}_{(5-q \times q)} \\ \mathbf{0}_{(5 \times q)} \\ \mathbf{0}_{(5 \times q)} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{[15 \times 15]} | \mathbf{0}_{[15 \times q]}]. \quad (30)$$

$\mathbf{E}$ — матрица размерности $q \times q$ с главной диагональю, состоящей из элементов вектора $\mathbf{a}$.

Для определения вида матрицы наблюдений $\mathbf{H}$ напомним, что в (20) вектор состояния системы измеряется полностью и линейно. Незвестные параметры $\mathbf{a}$, напротив, оцениваются косвенным путем и в данном случае не являются аргументом функции $\mathbf{h}$. Следовательно, $\mathbf{H}$ будет иметь вид цифровой, постоянной матрицы, включающей в себя единичный и нулевой блоки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для системы подвес—модель выписан рекуррентный алгоритм непрерывно-дискретной идентификации по методу условного среднего. В силу своего итерационного вида он хорошо подходит для цифровых вычислительных машин и может реализоваться в виде специальной компьютерной программы. В этом случае оценивание динамических параметров моделей ЛА существенно упрощается, а процесс проведения аэродинамического эксперимента становится более динамичным и плодотворным. Среди других преимуществ данного алгоритма отметим следующее. Он в равной степени может распространяться на

линейные и нелинейные, одномерные и многомерные системы. Алгоритм не требует точных априорных сведений о параметрах объекта, а качество последовательного оценивания контролируется на каждом шаге по величине взвешенного скалярного квадрата вектора невязки. В [7] указан еще один вариант алгоритма условного среднего. Он распространяется на случай, когда вектор управляющих воздействий измеряется непосредственным способом, а не выражается косвенным путем через $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$. Рассматриваемый аэромагнитный эксперимент как раз подпадает под этот случай: напомним, что управляющие напряжения (5) задаются в явном виде. Таким образом, расчетную часть алгоритма идентификации можно несколько упростить. Помимо возможности упрощения вычислительной части существуют возможности по повышению точности оценивания [4]. Они в основном связаны с повышением порядка линейного приближения функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$. Или с последовательным уточнением априорных ковариационных матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи и методы экспериментальной аэродинамики: Сб. научных трудов / Под ред. Коробкова В.А. СПб.: ГУАП, 1994. 160 с.
2. Богословский С.В. Теория и практика аэромагнитного моделирования. СПб.: ГУАП, 1998. 136 с.
3. Мхитарян А.М. Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1976. 448 с.
4. Сэйдж Э.П., Мелс Д.Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 311 с.
5. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 684 с.
6. Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 711 с.
7. Создание и применение математических моделей самолетов / Белоцерковский С.М. и др. М.: Наука, 1984. 144 с.
8. Теория вероятностей: Учебное пособие для высших технических учебных заведений / Под ред. Крищенко А.П. М.: Наука, 1999. 436 с.

Санкт-Петербургский институт аэрокосмического приборостроения

Материал поступил в редакцию 08.02.2001.

IDENTIFICATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF FLYING VEHICLES BY AEROMAGNETIC OBSERVATIONS

S. V. Bogoslovsky, A. S. Panteleev

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

This article concerns the technology of magnetic suspension and balance systems to solve existing problems related to vehicle models testing in wind tunnels. Magnetic suspension of vehicle models is proposed to eliminate support device interference that leads to great inaccuracy of measurements during aerodynamic experiments. The main part of the paper is devoted to the algorithm of identification of flying vehicle dynamic characteristics. It is based on the method of conditional expectation and can be realized on a computer.