

УДК 537.533

Применение граничных условий интегрального типа для решения трехмерных задач магнитостатики. Калимов А.Г., Сведенцов М.Л. // Научное приборостроение. Формирование пучков заряженных частиц. Л.: Наука, 1990. – С.49-52.

Предлагается комбинированный метод расчета трехмерных магнитостатических полей, основанный на решении дифференциального уравнения относительно скалярного магнитного потенциала в области, занятой материалом ферромагнетика, с использованием граничных условий интегрального типа. Лит. – 5 назв., ил. – 4.

А.Г.Калимов (ЛПИ), М.Л.Сведенцов (НТО АН СССР)

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

При разработке и проектировании электрофизических приборов, таких как, например, магнитные масс-анализаторы, магнитные линзы и т.п., возникает необходимость расчета магнитных полей, создаваемых обмотками с протекающим по ним электрическим током и ферромагнитными элементами конструкций.

В настоящее время можно выделить два основных подхода к практическому решению трехмерных задач магнитостатики. Один из них основан на формировании и последующем решении интегрального уравнения относительно вектора намагниченности материала ферромагнетика [1, 2]. Напряженность полного магнитного поля в рамках этого подхода представляется в виде суммы двух компонент:

$$\vec{H} = \vec{H}_c + H_m. \quad (1)$$

Поле H_c создается токонесущими контурами системы и рассчитывается на основе закона Био-Савара. H_m — поле, создаваемое намагниченными объектами, может быть вычислено по формуле

$$\vec{H}_m = \frac{1}{4\pi} \int \left[3 \cdot \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] dV, \quad (2)$$

где $\vec{M}$ — вектор намагниченности вещества; $\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}$, интегрирование ведется по объему, занятому материалом ферромагнетика с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r(H) = \mu(H)/\mu_0$.

В конечном итоге задача расчета магнитного поля сводится к необходимости решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{\mu_r - 1} \vec{M} = \vec{H}_c + \frac{1}{4\pi} \int \left[3 \cdot \frac{\mu_r(\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] dV. \quad (3)$$

Последующее определение напряженности магнитного поля в любой точке пространства может быть выполнено по соотношениям (1) и (2).

Достоинством метода является ограничение расчетной области только объемом ферромагнетика и отсутствие необходимости априорного определения граничных условий на его поверхности. Недостатками – полная заполненность матрицы системы алгебраических уравнений для дискретизованного интегрального уравнения (3) и проблемы, связанные с расчетом напряженности магнитного поля в точках, расположенных внутри материала ферромагнетика.

Достаточно широкое распространение получили и методы, основанные на решении дифференциальных уравнений магнитостатики [3, 4]. В качестве неизвестных функций в различных постановках используются скалярный магнитный потенциал, модифицированный потенциал, редуцированный потенциал, а также их комбинации. Эта группа методов позволяет получить надежные результаты в любой точке независимо от места ее расположения. Однако в сравнении с интегральным методом дифференциальные, в случае применения их к открытым областям, имеют и существенный недостаток – необходимость решать дифференциальное уравнение в неограниченной области, так как поставить приближенные граничные условия оказывается возможным, как правило, только на значительном удалении от исследуемой магнитной системы.

Как попытка объединить достоинства этих двух направлений, возникли гибридные методы расчета магнитных полей [5]. В настоящей работе предлагается один из возможных путей расчета магнитного поля, основанный на объединении интегрального и дифференциального методов. Внутри области, занятой ферромагнитным материалом, вводится скалярный магнитный потенциал U_m , удовлетворяющий нелинейному дифференциальному уравнению

$$\bar{\nabla}(\mu \bar{\nabla} U_m) = 0. \quad (4)$$

Для полного определения задачи расчета магнитного потенциала необходимо задать граничные условия на поверхности расчетной области. В некоторых случаях на части границы потенциал или его нормальная производная могут быть заданы в явном виде. Такими границами могут быть, например, плоскости симметрии задачи. На остальной части поверхности граничные условия могут быть заданы из условия непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе раздела двух сред:

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2. \quad (5)$$

За пределами области, занятой ферромагнетиком, напряженность магнитного поля рассчитывается через интеграл от намагниченности этой области (2). Учитывая, что $\vec{H} = -\bar{\nabla} U_m$ и $\vec{M} = (\mu - \mu_0) \vec{H} / \mu_0$, получаем условие для нормальной производной потенциала на внутренней границе расчетной области:

$$\frac{\partial U_m}{\partial n} = -\vec{H}_c \cdot \vec{n}_0 + \frac{1}{4\pi} \int \left[3 \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \bar{\nabla} U_m)}{r^5} - \frac{\bar{\nabla} U_m}{r^3} \right] \cdot \vec{n}_0 \cdot \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} dV. \quad (6)$$

В результате задача расчета магнитного поля формулируется в виде системы двух уравнений – дифференциального (4) с заранее неизвестными граничными условиями и интегрального уравнения (6).

Для выяснения особенностей применения предлагаемого подхода на практике была решена тестовая задача. Ферромагнитный куб с постоянной магнитной проницаемостью $\mu = 5000 \mu_0$ был размещен в однородном внешнем магнитном поле $H_c = 100 \text{ A/m}$ (рис.1). Задача решалась для области $-1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1$. На поверхностях $x = 0, y = 0, z = 0$ задавались граничные условия, являющиеся следствием симметрии задачи:

$$U_m(x=0)=0; \quad \frac{\partial U_m(x=0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U_m(y=0)}{\partial y} = 0.$$

Для остальных поверхностей формировались граничные условия интегрального вида (6).

Внутренняя задача решалась методом сеток. Операция интегрирования по объему при формировании граничных условий заменялась на суммирование магнитных полей, создаваемых однородно намагниченными параллелепипедами с размерами h_x, h_y, h_z , составляющими исходный куб. Для расчета магнитного поля однородно намагниченного бруска он заменялся системой из четырех токовых листов, совпадающих с гранями бруска (рис.2). Плотность тока каждого листа равна намагниченности $\vec{J} = \vec{M}$. В свою оче-

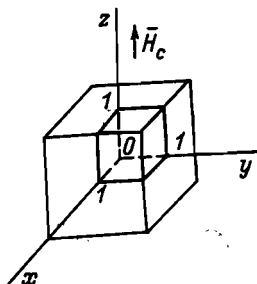


Рис.1. Расчетная модель ферромагнитного куба

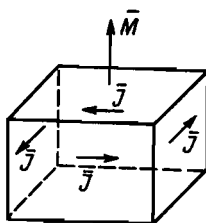


Рис.2. Замена намагниченного бруска токовыми листами

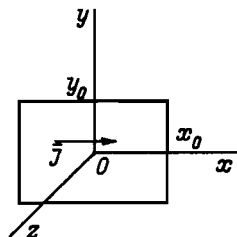


Рис.3. Прямоугольный лист с током

редь магнитное поле каждого листа (рис.3) определяется аналитически:

$$H_x = 0$$

$$H_y = -\frac{J}{4\pi} \arctg \frac{st}{z\sqrt{t^2 + s^2 + x^2}} \left| \begin{array}{l} S_2 = y_0 - y, t_2 = x_0 - x \\ S_1 = -y_0 - y, t_1 = -x_0 - x \end{array} \right. \quad (7)$$

$$H_z = \frac{J}{8\pi} \ln \frac{s-t}{s+t} \left| \begin{array}{l} S_2 = \sqrt{t^2 + z^2 + (y_0 - y)^2}, t_2 = x_0 - x \\ S_1 = \sqrt{t^2 + z^2 + (y_0 + y)^2}, t_1 = -x_0 - x \end{array} \right.$$

При расчете магнитного поля на поверхности куба точки, в которых проводились вычисления, сдвигались с поверхности на расстояние $\approx 0,1h$, где h — шаг сетки. Необходимость такого смещения объясняется сингулярностью выражений (7) при попадании расчетной точки на край токового листа.

Для решения задачи применялась итерационная процедура — задавались граничные условия, затем решалась внутренняя задача, после чего уточнялись граничные условия,

и так до тех пор, пока изменение напряженности магнитного поля в некоторой контрольной точке от итерации к итерации превышало установленный предел.

На рис.4 приведены результаты расчета магнитного поля для магнитной системы,

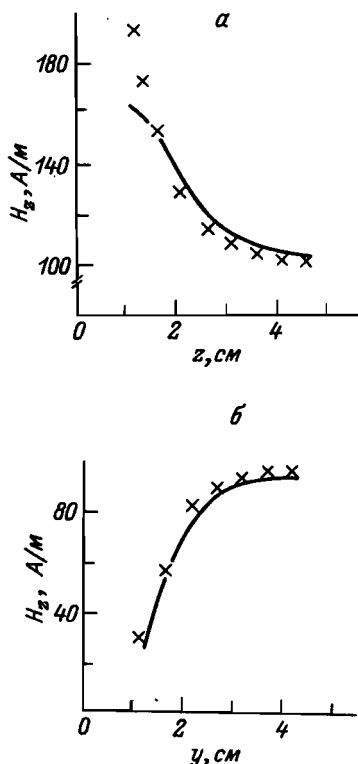


Рис.4. Результаты расчета магнитного поля: а - вдоль отрезка прямой $x = 0, y = 0$; б - вдоль отрезка прямой $x = 0, z = 0$

описанной выше. Сплошными линиями показаны результаты решения той же задачи с использованием известной программы расчета трехмерных магнитных полей **GFUN3D** [1], в основе которой лежит интегральный метод расчета, крестиками - результаты расчета комбинированным методом. На рис.4а дана зависимость составляющей поля H_z от координаты z вдоль прямой $x = 0, y = 0$, на рис.4б зависимость H_z от y вдоль прямой $x = 0, z = 0$. Наиболее существенные расхождения наблюдаются в непосредственной близости от границы куба, на расстоянии, меньшем чем шаг дискретизации, от этих поверхностей. Одной из наиболее существенных причин этого расхождения является, по-видимому, представление каждой ячейки в виде равномерно намагниченного параллелепипеда (тетраэдра в **GFUN3D**). В целом совпадение результатов можно считать удовлетворительным.

К недостаткам предлагаемого подхода необходимо отнести невозможность формирования симметричной матрицы дискретизованных операторов (5), (6), а также высокую чувствительность решения к точности расчета напряженности магнитного поля на границе области. Тем не менее первые полученные результаты позволяют надеяться на перспективность дифференциальной постановки задачи магнитостатики с граничными условиями интегрального вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trowbridge G.W. et al. **GFUN3D User Guide**. Rutherford Laboratory Report, RL-76-029/A. - Chilton, 1976. - P. 109.
2. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - С. 168.
3. Simkin J., Trowbridge G.W./Three - Dimensional Nonlinear Electromagnetic Field Computations Using Scalar Potential//IEE Proc. - 1980. - V.B127, N 6. - P. 368-374a.
4. Дойников Н.И. и др./Программный комплекс КОМПОТ для расчета пространственных магнитостатических полей. Препринт НИИЭФА. - М., 1986.
5. Salon S.J., d'Angelo J./Applications of the Hybrid Finite Element - Boundary Element Method in Electromagnetics//IEEE Trans. on Magnetics. - 1988. - V.24, N 1. - P. 80-85.