

УДК 537.533.3

Краевое поле тороидального энергоанализатора. Явор М.И.//Научное приборостроение. Формирование пучков заряженных частиц. Л.: Наука, 1990. – С. 43–49.

Получено выражение для потенциала краевого поля тороидального энергоанализатора, учитывающее поправки на кривизну электродов конденсатора. Рассмотрены два варианта расположения электродов, ограничивающих поле у торца дефлектора, – поперечный и продольный. Частными случаями выведенных формул являются выражения для потенциалов краевого поля цилиндрического конденсатора и поля у торца цилиндрического зеркала. Лит. – 5 назв., ил. – 1.

М.И.Явор (НТО АН СССР)

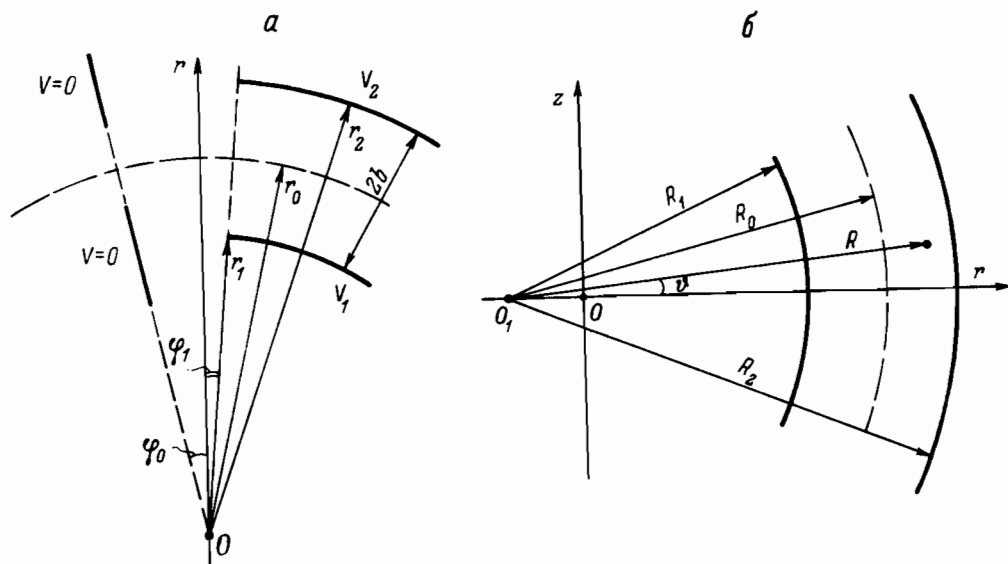
КРАЕВОЕ ПОЛЕ ТОРОИДАЛЬНОГО ЭНЕРГОАНАЛИЗАТОРА

Краевые поля оказывают существенное влияние на параметры ионно-оптических систем. В электростатических системах их учет особенно важен в случаях, когда ввод пучка заряженных частиц в устройство производится в зазор между электродами, имеющими различные потенциалы. Такая ситуация имеет место в секторных электростатических энергоанализаторах, в некоторых конструкциях зеркальных энергоанализаторов и т.д. [1, 2]. Простейшей моделью краевого поля секторного дефлектора является поле плоского конденсатора с экранирующей диафрагмой [3]. Эта модель позволяет правильно описать воздействие краевого поля на пучок заряженных частиц в параксиальном приближении. Однако для достаточно точного расчета коэффициентов aberrаций второго порядка и вычисления aberrаций более высоких порядков необходимо учитывать влияние на краевое поле кривизны электродов конденсатора. Потенциал краевого поля цилиндрического дефлектора может быть найден методом конформных отображений [4]. Для систем, электроды которых искривлены в аксиальном направлении (тороидальный анализатор, цилиндрическое зеркало), ситуация является более сложной. Попытка по-

лучить выражение для потенциала краевого поля таких систем предпринята в работе [5], где краевое поле тороидального дефлектора приближенно восстанавливалось по его асимптотике во внутренней части конденсатора. Однако эту операцию нельзя признать корректной в математическом смысле, и, как показали исследования, результатом ее применения явились ошибочные формулы для краевого поля. В конечном итоге получены неверные коэффициенты аберраций третьего порядка.

В настоящей статье получено выражение для потенциала краевого поля, учитывающее поправки на кривизну электродов конденсатора в аксиальном направлении. Его точность достаточна для того, чтобы корректно провести расчет аберраций третьего порядка тороидального энергоанализатора. Частными случаями выведенных формул являются выражения для потенциалов краевого поля цилиндрического конденсатора и поля у торца цилиндрического зеркала. Метод расчета основан на применении асимптотического разложения по малому параметру, выражающему отношение межэлектродного зазора к одному из радиусов кривизны электродов.

На рисунке представлен тороидальный энергоанализатор, характеризующийся



Сечение электродов энергоанализатора: а - средней плоскостью; б - плоскостью $\varphi = \text{const}$

радиусом осевой траектории пучка в межэлектродном пространстве r_0 , радиусами сечений электродов средней плоскостью $x=0$, равными $r_1 = r_0 - b$, $r_2 = r_0 + b$, аксиальными радиусами кривизны электродов R_1 и R_2 . Центры аксиальных кривизн образующих электродов предполагаются совпадающими. Краевое поле ограничено поперечной диафрагмой, расположенной в плоскости $\varphi = \varphi_0$, проходящей через центр азимутальной кривизны O перпендикулярно средней плоскости. Тороидальные электроды и диафрагма считаются бесконечно тонкими.

Введем в азимутальной плоскости $\varphi = \text{const}$ полярные координаты $\rho = R - R_0, \vartheta$, где $R_0 = (R_1 + R_2)/2$. Обозначим $\mu = \lambda - \varepsilon(\lambda^2 - 1)/2 + \varepsilon^2(\lambda^3 - \lambda)/3$, $\lambda = r(1 - \varepsilon^2/3)$, $\xi = \vartheta/(\varepsilon c)$, где $\lambda = \rho/b$, $r = \varphi/\varepsilon$, $c = r_0/R_0$, $\varepsilon = b/r_0$ - малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). В координатах $\{\mu, \lambda, \xi\}$ уравнение Лапласа с точностью до членов порядка ε^3 имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \left\{ 1 + 2\varepsilon\mu(1-c) + \mu^2\varepsilon^2(3c^2 - 5c + 2) + \varepsilon^2\left(c - \frac{1}{3}\right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ & + \left\{ 1 + \varepsilon^2\xi^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \varepsilon c \left\{ 1 + \varepsilon\mu(1-c) \right\} \frac{\partial u}{\partial \mu} - \varepsilon^2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + O(\varepsilon^3) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть Γ_1 - поверхность внутреннего электрода конденсатора ($\mu = -1$, $\chi > \chi_1 = \varphi_1(1 - \varepsilon^2/3)/\varepsilon$, где φ_1 - координата края тороидального конденсатора), Γ_2 - поверхность внешнего электрода ($\mu = 1$, $\chi > \chi_1$), S - поверхность экранирующих электродов, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup S$.

Будем искать решение уравнения Лапласа (1) с граничными условиями

$$u \Big|_{\Gamma_1} = V_1, \quad u \Big|_{\Gamma_2} = V_2, \quad u \Big|_S = 0 \quad (2)$$

с точностью до величин порядка ε^3 . Представим потенциал u в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3). \quad (3)$$

Подставив (3) в уравнение (1) и в граничные условия (2), выясним, что функции u_j являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \chi^2} = 0, \quad u_0 \Big|_{\Gamma_1} = V_1, \quad u_0 \Big|_{\Gamma_2} = V_2, \quad u_0 \Big|_S = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi^2} = -c \frac{\partial u_0}{\partial \mu}, \quad u_1 \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} = -c \frac{\partial u_1}{\partial \mu} - c(1-c) \frac{\partial u_0}{\partial \mu} - c\xi^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \chi^2}, \quad u_2 \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

причем функции u_0 и u_1 не зависят от переменной ξ .

Пусть $\psi_1(\mu, \chi)$ и $\psi_2(\mu, \chi)$ - решения уравнения Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \chi^2} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\psi_1 \Big|_{\Gamma_2} = -\psi_1 \Big|_{\Gamma_1} = 1, \quad \psi_2 \Big|_{\Gamma_2} = \psi_2 \Big|_{\Gamma_1} = 1, \quad \psi_1 \Big|_S = \psi_2 \Big|_S = 0. \quad (8)$$

Тогда решение задачи (4) можно записать в виде

$$u_0(\mu, \chi) = W_1 \psi_1(\mu, \chi) + W_2 \psi_2(\mu, \chi),$$

где $W_1 = (V_2 - V_1)/2$; $W_2 = (V_1 + V_2)/2$,
а решение задачи (5) записать в виде

$$u_1(\mu, \chi) = -\frac{c}{2} \mu u_0(\mu, \chi) + \frac{c}{2} [W_1 \psi_2(\mu, \chi) + W_2 \psi_1(\mu, \chi)].$$

Решение u_2 задачи (6) можно выразить через функции ψ_κ , $\kappa = 1, 8$, где функции ψ_1 и ψ_2 определены выше, а функции $\psi_3 \div \psi_8$ являются решениями задач Дирихле для уравнений Пуассона на плоскости:

$$\frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \chi^2} = \psi_{\kappa-2}, \quad \kappa = 3, 4, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \chi^2} = \frac{\partial^2 \psi_{\kappa-4}}{\partial \chi^2}, \quad \kappa = 5, 6, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi_\kappa}{\partial \chi^2} = -2\psi_{\kappa-2}, \quad \kappa = 7, 8 \quad (11)$$

с однородными граничными условиями.

$$\psi_\kappa \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \kappa = 3 \div 8. \quad (12)$$

Окончательно выражение для потенциала краевого поля $u(\mu, \chi, \xi)$ принимает вид

$$\begin{aligned} u(\mu, \chi, \xi) = & W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2 + \xi \left\{ -\frac{c}{2} \mu [W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2] + \frac{c}{2} [W_1 \psi_2 + W_2 \psi_1] \right\} + \\ & + \xi^2 \left\{ \frac{c}{4} \left[\left(1 - \frac{c}{2} \right) + \mu^2 \left(\frac{3c}{2} - 1 \right) \right] [W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2] - \frac{c^2}{4} \mu [W_2 \psi_1 + W_1 \psi_2] + \frac{c}{2} \left(1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{c}{2} \right) [W_1 \psi_3 + W_2 \psi_4] - c \xi^2 [W_1 \psi_5 + W_2 \psi_6] - c [W_1 \psi_7 + W_2 \psi_8] \right\} + O(\xi^3). \end{aligned} \quad (13)$$

В частном случае цилиндрического конденсатора ($c = 0$) выражение (13) значительно упрощается:

$$u_c(\mu, \chi, \xi) = W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2 + O(\xi^3).$$

В другом частном случае поля у торца цилиндрического зеркала ($\xi = 0$, $c = \infty$, $\xi c = \delta_1 = \delta/R_0$) выражение для потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} u_M(\mu, \chi, \xi) = & W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2 + \xi_1 \left\{ -\frac{\mu}{2} [W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2] + \frac{1}{2} [W_1 \psi_2 + W_2 \psi_1] \right\} + \\ & + \xi_1^2 \left\{ \frac{3\mu^2 - 1}{8} [W_1 \psi_1 + W_2 \psi_2] - \frac{\mu}{4} [W_1 \psi_2 + W_2 \psi_1] - \frac{1}{4} [W_1 \psi_3 + W_2 \psi_4] \right\} + O(\xi^3). \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до членов порядка ξ^3 удается выразить потенциал краевого поля тороидального конденсатора через функции, являющиеся решениями плоских задач для уравнений Лапласа (7) или Пуассона (9)–(11), что существенно упрощает его расчет. Более того, функции ψ_1 и ψ_2 могут быть выражены в анали-

тическом виде аналогично тому, как это было сделано Герцогом для случая толстых электродов [3]. Не вдаваясь в подробности вывода, приведем лишь окончательные выражения для функций ψ_1 и ψ_2 . Не уменьшая общности, можно положить y_0 и y_1 равными; обозначим $\delta = 2\varphi_1$. Будем считать поперечную диафрагму расположенной таким образом, что координаты ее кромок равны $\mu = \pm\beta$. Рассмотрим конформное отображение верхней полуплоскости $s > 0$ комплексной переменной $t = p + is$ на верхнюю полуплоскость $\mu > 0$ переменной $\zeta = \chi + i\mu$ с разрезами $\{\delta/2 < \chi < \infty, \mu = 1\}$ и $\{\chi = -\delta/2, \beta < \mu < \infty\}$, имеющее вид

$$\zeta = -\frac{\delta}{2} + i + \frac{1}{\pi mn} \left\{ 2\sqrt{t+1} - \frac{2(m-1)(n+1)}{\sqrt{t+1}} - mn \ln \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right\}. \quad (14)$$

Здесь ветви многозначных функций фиксированы условиями $\sqrt{t+1} > 0$ при $t > -1$, $\ln x > 0$ при $x > 1$, а параметры m, n определяются как решения системы уравнений

$$\beta = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(1 + \frac{2}{n} \right) \frac{\sqrt{m-1}}{m} + \operatorname{arctg} \sqrt{m-1} \right\},$$

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \left(\frac{2}{m} - 1 \right) \frac{\sqrt{n+1}}{n} - \ln \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} \right\}.$$

После определения из формулы (14) величины t как функции параметров μ и χ , функции ψ_1 и ψ_2 вычисляются по формулам

$$\psi_1(\mu, \chi) = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{i}{\pi} \ln t(\mu, \chi) \right\},$$

$$\psi_2(\mu, \chi) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \operatorname{arcsin} [2t(\mu, \chi) + 1] \right\}.$$

Получить аналитические выражения для функций $\psi_3 \div \psi_8$ не удастся. Они определяются путем численного решения плоских задач для уравнения Пуассона (9)–(11).

Таким образом, потенциал краевого поля тороидального дефлектора за исключением предельного случая цилиндрического конденсатора рассчитывается аналитически только с точностью до членов порядка ε^2 . Но возможна и другая геометрия экранирующих электродов, для которой расчет краевого поля сильно упрощается: если заземленные экранирующие электроды тороидальны и являются продолжением электродов конденсатора, т.е. их поверхности описываются уравнениями $\mu = \pm 1, \chi < \chi_1$. Приведем без вывода формулы для решений $\psi_1 \div \psi_8$ задач (7)–(12) в случае тороидальных экранирующих электродов, полагая зазор между основными и экранирующими электродами пренебрежимо малым и $\chi_1 = 0$:

$$\psi_1(\mu, \chi) = \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign} \chi - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi \mu}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi \chi}{2} \right), \quad \mu \geq 0,$$

$$\psi_1(\mu, \chi) = -\psi_1(-\mu, \chi), \quad \mu < 0,$$

$$\psi_2(\mu, \chi) = g_1(\mu, -\chi), \quad \chi < 0,$$

$$\psi_2(\mu, \chi) = 1 - g_1(\mu, \chi), \quad \chi \geq 0,$$

$$\psi_3(\mu, \chi) = \frac{\chi}{2} g_2(\mu, -\chi) - g_3(\mu, -\chi), \quad \chi < 0,$$

$$\psi_3(\mu, \chi) = \frac{1}{6}(\mu^3 - \mu) + \frac{\chi}{2} g_2(\mu, \chi) + g_3(\mu, \chi), \quad \chi \geq 0,$$

$$\psi_4(\mu, \chi) = \frac{\chi}{2} y_2(\mu, -\chi) - y_3(\mu, -\chi), \quad \chi < 0,$$

$$\psi_4(\mu, \chi) = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1) + \frac{\chi}{2} y_2(\mu, \chi) + y_3(\mu, \chi), \quad \chi \geq 0,$$

$$\psi_5(\mu, \chi) = \frac{1}{2} \chi \frac{\partial \psi_1}{\partial \chi},$$

$$\psi_6(\mu, \chi) = \frac{1}{2} \chi \frac{\partial \psi_2}{\partial \chi},$$

$$\psi_7(\mu, \chi) = -\frac{1}{4} \chi^2 \psi_1(\mu, \chi) + \frac{1}{2} \psi_3(\mu, \chi) + \frac{1}{4} w_1(\mu, \chi),$$

$$\psi_8(\mu, \chi) = -\frac{1}{4} \chi^2 \psi_2(\mu, \chi) + \frac{1}{2} \psi_4(\mu, \chi) + \frac{1}{4} w_2(\mu, \chi).$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{g}_1(\mu, \chi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \frac{\pi \mu}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \chi}{2}} \right),$$

$$g_2(\mu, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\pi n)^2} e^{-\pi n \chi} \sin(\pi n \mu),$$

$$g_3(\mu, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\pi n)^3} e^{-\pi n \chi} \sin(\pi n \mu),$$

$$y_2(\mu, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\pi(n-\frac{1}{2})]^2} e^{-\pi(n-\frac{1}{2})\chi} \cos[\pi(n-\frac{1}{2})\mu],$$

$$y_3(\mu, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\pi(n-\frac{1}{2})]^3} e^{-\pi(n-\frac{1}{2})\chi} \cos[\pi(n-\frac{1}{2})\mu],$$

$$w_1(\mu, \chi) = 2g_3(\mu, -\chi), \quad \chi < 0,$$

$$w_1(\mu, \chi) = \chi^2 \mu - \frac{\mu^3 - \mu}{3} - 2g_3(\mu, \chi), \quad \chi \geq 0,$$

$$w_2(\mu, \chi) = 2y_3(\mu, -\chi), \quad \chi < 0,$$

$$w_2(\mu, \chi) = \chi^2 - \mu^2 + 1 - 2y_3(\mu, \chi), \quad \chi \geq 0.$$

Таким образом, при продольном расположении экранирующих электродов расчет функций $\psi_i \div \chi_j$ может быть проведен по аналитическим формулам.

Приведенные в статье результаты могут быть использованы для расчета влияния краевых полей на траектории заряженных частиц в указанных анализаторах с учетом аббераций третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В.П., Явор С.Я. Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. - М.: Наука, 1978. - 224 с.
2. Баранова Л.А. и др.//ЖТФ. - 1987. - Т.57, № 9. - С. 1869-1872.
3. Herzog R.//Arch.Elektrotech. 1935. - V.29, N 11. - P. 790-802.
4. Корочкин А.М. и др.//Научные приборы. - М., 1979, № 21. - С. 52-55.
5. Matsuda H.//Nucl.Instr.Meth. 1971. - V.91, N 4. - P. 637-647.

А.Г.Калимов (ЛПИ), М.Л.Сведенцов (НТО АН СССР)

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

При разработке и проектировании электрофизических приборов, таких как, например, магнитные масс-анализаторы, магнитные линзы и т.п., возникает необходимость расчета магнитных полей, создаваемых обмотками с протекающим по ним электрическим током и ферромагнитными элементами конструкций.

В настоящее время можно выделить два основных подхода к практическому решению трехмерных задач магнитостатики. Один из них основан на формировании и последующем решении интегрального уравнения относительно вектора намагниченности материала ферромагнетика [1, 2]. Напряженность полного магнитного поля в рамках этого подхода представляется в виде суммы двух компонент:

$$\vec{H} = \vec{H}_c + H_m. \quad (1)$$

Поле H_c создается токонесущими контурами системы и рассчитывается на основе закона Био-Савара. H_m - поле, создаваемое намагниченными объектами, может быть вычислено по формуле

$$\vec{H}_m = \frac{1}{4\pi} \int \left[3 \cdot \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] dV, \quad (2)$$

где $\vec{M}$ - вектор намагниченности вещества; $\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}$, интегрирование ведется по объему, занятому материалом ферромагнетика с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r(H) = \mu(H)/\mu_0$.

В конечном итоге задача расчета магнитного поля сводится к необходимости решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{\mu_r - 1} \vec{M} = \vec{H}_c + \frac{1}{4\pi} \int \left[3 \cdot \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] dV. \quad (3)$$