

УДК 532.32:537.8

Устойчивость диэлектрической капли в электростатическом поле. Григорьев А.И., Мухина Е.И.//Научное приборостроение. Формирование пучков заряженных частиц.Л.: Наука, 1990. - С. 21-26.

Предпринята попытка расчета критических условий неустойчивости диэлектрической капли в электрическом поле, исходя из представлений о развитии неустойчивости в поле капиллярных волн, в жидкости в силу теплового движения молекул. Равновесной формой диэлектрической капли в однородном электрическом поле является сферо-

идальная. Расчеты проводились в сферической системе координат разложением по полиномам Лежандра в первом приближении теории возмущений по квадрату эксцентриситета. Найдены критические условия неустойчивости капли в виде аналитической зависимости критерия Тейлора от отношения диэлектрических проницаемостей капли и внешней среды. Лит. - 10 назв., ил. - 1.

А.И.Григорьев, Е.И.Мухина (Ярославский ГУ)

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Расчет равновесной формы, а также критических условий развития неустойчивости Тонкса-Френкеля, диэлектрической капли (в жидком мениске на срезе капилляра, по которому подается жидкость) в постоянном однородном внешнем электрическом поле $\vec{E}_0$ представляет интерес в связи с разработкой новых методов введения жидких веществ в масс-спектрометры, электростатическим распылением топлив и лакокрасочных материалов и изучением процессов разделения зарядов в грозовых облаках [1-3]. Основанием для такого интереса является тот факт, что при достаточно большой величине E_0 в капле развивается неустойчивость Тонкса-Френкеля, при которой на вершине капли, ориентированной по полю, появляется заостренный выступ, с вершины которого начинается эмиссия высокодисперсных сильно заряженных капелек [4-5]. Именно этот эффект и используется в перечисленных приложениях, а знание равновесной формы капли необходимо для понимания механизма эмиссии капель и расчета их характеристик.

В работе [2] предпринята, по-видимому, первая попытка расчета критических условий неустойчивости диэлектрической капли в поле $\vec{E}_0$. Но ее авторы не учли того обстоятельства, что равновесная в $\vec{E}_0$ форма капли отлична от сферической, на

что и было указано в работе [3], в которой поставленная в работе [2] задача была решена. Но в работе [3] зависимость критического для развития неустойчивости значения параметра Тейлора от отношения диэлектрических проницаемостей капли и среды найдена численно, тогда как существует возможность получения ее в аналитическом виде [6]. Этому вопросу и посвящена статья.

Пусть капля жидкости плотности ρ с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , исходного радиуса R с коэффициентом поверхностного натяжения σ в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 помещена в электростатическое поле E_0 , в котором при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ капля вытягивается вдоль E_0 в фигуру, близкую к сфероиду. Примем, что отклонение формы капли от сферической мало, и попытаемся определить равновесную в E_0 форму капли из уравнения баланса давлений на ее поверхности:

$$p_\sigma = (\rho - \rho_*) + p_E, \quad (1)$$

где ρ и ρ_* - постоянные давления в капле и среде; p_σ - лапласовское давление; p_E - давление электростатического поля.

Пусть соотношение $\rho \cdot \partial \epsilon_i / \partial \rho \approx (\epsilon_i - 1)$ выполняется для обеих сред: для полярных жидкостей, характеризующихся большими значениями ϵ , это выражение получается в линейном приближении по ϵ^{-1} из формулы Кирквуда, а для неполярных жидкостей с малыми значениями ϵ - из формулы Клаузиуса-Мосотти. Тогда выражение для p_E может быть записано в виде [7]:

$$p_E = \frac{1}{8\pi} \left[- \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 (2\epsilon_1 - 1) + (2\epsilon_2 - 1) \right] E_n^2 \equiv \frac{\kappa^2 \epsilon_2}{8\pi} E_n^2,$$

где E_n - нормальная к поверхности капли компонента напряженности поля в среде. Уравнение равновесной поверхности, которая получится в результате взаимодействия виртуального искажения поверхности капли с p_σ и p_E , представим в наиболее общем осесимметричном виде:

$$r(\theta) = R + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \theta) \equiv R + f(\theta). \quad (2)$$

Выражение для напряженности поля у поверхности сфероидальной капли в сферических координатах имеет вид [3, 7]:

$$E = E_0 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(1 - e^2)}{\epsilon_2 \left(1 + \frac{1 - e^2}{e^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} (\operatorname{arth} e - e) \right)} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - 2e^2 \cos^2 \theta + e^4 \cos^4 \theta}}. \quad (3)$$

где e - эксцентриситет сфероид.

При $e^2 \ll 1$, нормальную к поверхности сфероидальной компоненту $\vec{E}$ можно разложить по степеням e^2 :

$$E_n = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} 3E_0 \cos \theta \left(1 - e^2 + \frac{2}{5} e^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} + e^2 \cos^2 \theta \right) \equiv 3E_0 \lambda_0 \cos \theta \left(1 - e^2 + \frac{2}{5} e^2 \lambda_0 + e^2 \cos^2 \theta \right); \quad \lambda_0 \equiv \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}.$$

Теперь можно записать и выражение для давления p_E :

$$\begin{aligned} p_E &= \frac{\epsilon_2 \cdot \kappa^2}{8\pi} E_n^2 \equiv \frac{\epsilon_2}{8\pi} 9E_0^2 \lambda_0^2 \cos^2 \theta (1 - 2e^2 + 2e^2 \cos^2 \theta + \frac{4}{5} \lambda_0 e^2) = \\ &= \frac{9E_0^2 \cdot \lambda_0^2 \epsilon_2}{8\pi} \left\{ \frac{16}{35} e^2 \rho_4 + \rho_2 \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15} \lambda_0 e^2 - \frac{4}{21} e^2 \right) + \rho_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{15} e^2 + \frac{4}{15} \lambda_0 e^2 \right) \right\}. \\ &\quad \lambda \equiv \kappa \cdot \lambda_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Лапласовское давление под искаженной сферической поверхностью:

$r(\theta) = R + f(\theta)$ известно [5]:

$$p_0 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \left[2 + \hat{L} \right] f(\theta) = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \sum_n \left[2 - (n+1)n \right] \alpha_n P_n(\cos \theta). \quad (5)$$

Подставим уравнения (4), (5) в (1), и, приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра различных степеней, найдем неизвестные равновесные амплитуды α_n в уравнении (2):

$$\begin{cases} \frac{\alpha_2}{R} = \frac{9}{16\pi} W \lambda^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15} \lambda_0 e^2 - \frac{2}{21} e^2 \right) \\ \frac{\alpha_4}{R} = \frac{9}{16\pi} W \lambda^2 \frac{16}{315} e^2 \\ \frac{\alpha_0}{R} = - \left(\frac{9 \lambda^2 W}{16\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{45} - \frac{8}{225} \lambda_0 e^2 - \frac{4}{315} e^2 \right) \end{cases}$$

Здесь

$$W = \varepsilon_2 \frac{E_0^2 R}{\sigma}.$$

В итоге уравнение равновесной поверхности капли получится в виде [6]

$$r(\theta) = R \left\{ \left(1 - \frac{e^4}{45} \right) P_0(\cos \theta) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15} \lambda_0 e^2 - \frac{2}{21} e^2 \right) e^2 P_2(\cos \theta) + \frac{16}{315} e^4 P_4(\cos \theta) \right\}, \quad (6)$$

если $e^2 \approx \frac{9}{16\pi} W \lambda^2$.

Для сравнения выпишем выражение для сфероидальной поверхности с точностью до e^4 :

$$r(\theta) = R \frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} \approx R \left\{ \left(1 - \frac{e^4}{45} \right) P_0 + e^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{65} e^2 \right) P_2 + \frac{5}{58} e^4 P_4 \right\}. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (6) и (7), легко видеть, что равновесная форма капли близка к сфероиду. Важным выводом из проведенного анализа является обнаруженный факт сильной зависимости амплитуд равновесных мод от отношения диэлектрических проницаемостей капли и среды. Согласно проведенным вычислениям амплитуды α_n убывают с увеличением $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ пропорционально $(1 - 3\varepsilon_2 / \varepsilon_1)^2$.

Проверим теперь, будет ли найденная равновесная поверхность в уравнении (6) устойчивой по отношению к виртуальным возмущениям ее вида $\sim P_2(\cos \theta)$.

Примем, что равновесная форма капли в поле E_0 действительно сфероидальна и что по отношению к такой поверхности задано возмущение вида $\xi_0 P_2(\cos \theta)$. Будем искать форму рельефа поверхности капли, который установится в результате взаимодействия указанного возмущения с полем.

Уравнение новой равновесной поверхности будем искать в виде

$$r = r(\theta) + f(\theta) = r(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \theta).$$

Тогда для нахождения $f(\theta)$ получим систему:

$$\begin{cases} \delta p = \delta p_0 - \delta p & r = r(\theta) + f(\theta) \\ \Delta(\delta \phi) = 0 & r > r(\theta) + f(\theta) \\ \delta \phi = 0 & r = r(\theta) + f(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

Выражение для лапласовского давления под искривленной сфероидальной поверхностью несложно получить в виде разложения по степеням e^2 , повторяя рассуждения, приведенные в работе [8] при выводе лапласовского давления под искаженной сферической поверхностью:

$$\rho_\sigma = -\frac{\sigma}{R^2} \left\{ \frac{2}{3} (3-2e^2) + \frac{1}{3} (3+e^2) \hat{L} + e^2 \cos^2 \theta (4-\hat{L}) \right\} f(\theta) =$$

$$= -\frac{\sigma}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{2}{3} (3-2e^2) - \frac{1}{3} (3+e^2) n(n+1) + e^2 [4+n(n+1)] \cos^2 \theta \right\} P_n(\cos \theta)$$

или с учетом разложения $\rho_n \cos^2 \theta$ по $P_n(\cos \theta)$:

$$\delta \rho_\sigma = -\frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{3} (3-2e^2) - \frac{1}{3} (3+e^2) n(n+1) \right] P_n + e^2 [4+n(n+1)] \times \right.$$

$$\times \left. \left[\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2} + \frac{2n(n+1)-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n + \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2} \right] \right\} a_n. \quad (9)$$

Чтобы найти выражение для добавки $\delta \rho_E$ к давлению электрического поля на поверхность сфероидальной капли, претерпевшей виртуальное возмущение формы $\sim P_2(\cos \theta)$, учтем, что согласно приведенным результатам в приближении $\sim e^2$ возмущение поверхности $\xi(\theta) = \xi_0 P_2(\cos \theta)$ не изменяет сфероидальной формы капли, но соответствует изменению эксцентриситета $e^2 \rightarrow e_0^2 + \delta e^2$, $\delta e^2 = (3\xi_0/R)(1 - \frac{7}{6}e^2)$. Подставим в формулу (3) вместо e^2 увеличенное значение $e^2 + \delta e^2$ и, раскладывая получившееся выражение по δe^2 , найдем изменение напряженности поля в окрестности капли, связанное с возмущением ее формы [6] :

$$\delta E = E(\theta) \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1-2e^2 \cos^2 \theta} - \frac{(1-\frac{2}{3}\lambda_0)}{1+e^2-\frac{2}{5}e^2\lambda_0} \right\} \delta e^2$$

или

$$\delta E = E(\theta) \frac{3\xi_0}{R} \left\{ -1 + \frac{2}{5}\lambda_0 + \frac{13}{6}e^2 - \frac{19}{15}e^2\lambda_0 + \frac{4}{25}e^2\lambda_0^2 + \cos^2 \theta - \frac{7}{6}e^2 \cos^2 \theta + 2e^2 \cos^4 \theta \right\},$$

тогда

$$\delta \rho_E = \frac{\epsilon_2 \kappa^2}{4\epsilon} E \delta E = \frac{\lambda^2 27 \xi_0 E_0^2 \epsilon_2}{4\epsilon R} \cos^2 \theta \left\{ \left(-1 + \frac{2}{5}\lambda_0 + \frac{25}{6}e^2 - \frac{43}{15}e^2\lambda_0 + \frac{12}{25}e^2\lambda_0^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \cos^2 \theta \left(1 - \frac{31}{6}e^2 + \frac{8}{5}e^2\lambda_0 \right) + 4e^2 \cos^4 \theta \right\}.$$

Разложим это выражение по $P_n(\cos \theta)$:

$$\delta \rho_E = \frac{\epsilon_2 27 \xi_0 E_0^2 \lambda^2}{4\epsilon R} \left\{ \rho_0 \left(-\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\lambda_0 + \frac{292}{315}e^2 - \frac{143}{225}e^2\lambda_0 + \frac{4}{25}e^2\lambda_0^2 \right) + \right.$$

$$+ \rho_2 \left(-\frac{2}{21} + \frac{4}{15}\lambda_0 + \frac{109}{63}e^2 - \frac{314}{315}e^2\lambda_0 + \frac{8}{25}e^2\lambda_0^2 \right) + \rho_4 \left(\frac{8}{35} + \frac{76}{1155}e^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{64}{175}e^2\lambda_0 \right) + \frac{64}{231}e^2\rho_6 \left. \right\}. \quad (10)$$

Как и ранее, найдем равновесные амплитуды мод, подставив формулы (9) и (10) в (8) и приравняв коэффициенты при **полиномах** Лежандра различных порядков:

$$\frac{a_2}{R} = \frac{\xi_0 W}{\pi R} \lambda^2 \frac{26}{16} \left[-\frac{2}{21} + \frac{4}{15}\lambda_0 + \frac{743}{441}e^2 - \frac{274}{315}e^2\lambda_0 + \frac{8}{25}e^2\lambda_0^2 \right] = \frac{\xi_0 W}{\epsilon R} K_2 \quad (11)$$

$$\frac{a_4}{R} = \lambda^2 \frac{\xi_0 W}{\epsilon R} \left[\frac{4}{21}e^2 K_2 + \left(\frac{3}{35} + \frac{19}{770}e^2 + \frac{24}{175}e^2\lambda_0 \right) \right] = \frac{\xi_0 W}{\epsilon R} K_4$$

$$\frac{\alpha_6}{R} = \lambda^2 \frac{\epsilon_0 W}{\pi R} \left(\frac{2}{\pi} \epsilon^2 K_4 + \frac{18}{385} \epsilon^2 \right).$$

Отсюда несложно видеть, что $d_2 < \xi_0$ исходное возмущение поверхности будет затухать, то есть сфероидальная капля будет устойчива. Если же $d_2 > \xi_0$, то амплитуда d_2 будет расти, а эксцентриситет сфероида будет увеличиваться неограниченно, что и будет соответствовать состоянию неустойчивости капли в поле E_0 .

Из условия $d_2 > \xi_0$ с учетом формулы (11) и соотношения $e^2 = \frac{9\lambda^2}{16\pi} W$ следует условие на критическое значение параметра Тейлора W в виде

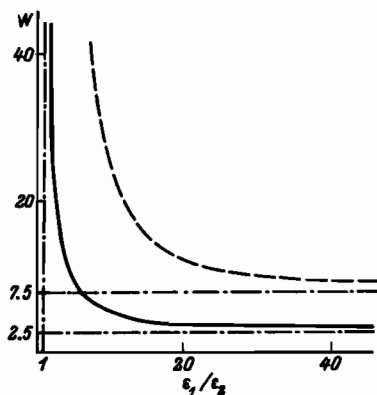
$$W > W_* = \frac{560(14\lambda_0 - 5) \cdot \pi}{3 \cdot \lambda^2 (18575 - 9590\lambda_0 + 3528\lambda_0^2)} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{18575 - 9530\lambda_0 + 3528\lambda_0^2}{3(25 - 140\lambda_0 + 196\lambda_0^2)}} \right). \quad (12)$$

Если $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$, то из зависимости (14) несложно найти

$$W_* \approx 2,63 \left(1 + 6,37 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right).$$

На рисунке сплошной линией с индексом 1 нанесена зависимость критического значения параметра Тейлора W_* от отношения ди-

электрических проницаемостей среды и капли: ϵ_1/ϵ_2 . Пунктирной линией нанесены неверные результаты расчетов работы [2]. Зависимость (12) $W_* = W_*(\epsilon_1/\epsilon_2)$ в точности соответствует зависимости, найденной в работе [3] численно, а в пределе $(\epsilon_1/\epsilon_2) \rightarrow \infty$ экспериментальным и теоретическим данным других работ (например, работы [6, 9, 10]).



ЛИТЕРАТУРА

Зависимость критического значения параметра Тейлора W_* от отношения диэлектрических проницаемостей среды и капли

1. Галль Л.Н. и др./Электрогидродинамический ввод жидких веществ в масс-спектрометр//ЖТФ. - 1984. - Т.54, № 8. - С. 1559-1571.
2. Попова Л.Н., Федоненко А.И./Об устойчивости жидкой капли в электрическом поле/Магнитная гидродинамика. - № 2. - С. 79-83.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О./Неустойчивость капли жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле/Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости. Сб.науч.тр. № 119. - М.: МЭИ, 1986. - С. 39-48.
4. Zeleny J./Instability of electrified liquid surfaces//Phys.Rev. - 1917. - V.10. - P. 1-6.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О./Параметры электростатического распыливания жидкости//Изв.АН СССР. МЖГ. - 1988, № 2. - С. 5-13.
6. Белавина Е.И. и др./Устойчивость сфероидальной капли в однородном электростатическом поле/Физико-технические проблемы изучения монодисперсных систем. Сб.науч.тр. № 149. - М.: МЭИ, 1987. - С. 121-126.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Гостехтеориздат, 1957. - 532 с.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. - М. - Л.: Гостехтеориздат, 1944. - 624 с.

9. Jaylor Y./Disintegration of water drops in an electric field//Proc.Roy. Soc., 1964. - V. A280. - P. 383-397.

10. Sherwood J.D./Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields//J.Fluid Mech. - 1988. - V.188. - P. 133-146.