

УДК 537.533.3

Поле тороидального конденсатора со слабodeформированными электродами. Явор М.И. // Научное приборостроение. Электронно-ионная оптика. Л.: Наука, 1989, с.66-71.

Получены приближенные аналитические выражения для возмущения потенциала поля тороидального конденсатора, обусловленного деформацией его пластин. Результаты могут быть использованы для определения допусков на изготовление и сборку тороидального энергоанализатора. Приведено также более точное, чем в работах других авторов, выражение для коэффициента тороидальности поля недеформированного конденсатора. Лит. - 4 назв., ил. - 1.

ПОЛЕ ТОРОИДАЛЬНОГО КОНДЕНСАТОРА
СО СЛАБОДЕФОРМИРОВАННЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Тороидальный дефлектор [1] в настоящее время является распространенным типом энергоанализатора, применяемым в двухкаскадных статических масс-спектрометрах. Сложность формы его электродов делает актуальной задачу об определении допусков на их изготовление и сборку, поскольку эти допуски влияют на выбор технологии изготовления, и, следовательно, на стоимость изделия. Задача расчета допусков требует в качестве первого, и, вероятно, наиболее сложного этапа умения вычислять возмущение потенциала электростатического поля тороидального конденсатора, вызванное слабой деформацией его пластин. Решению такой задачи и посвящена эта статья.

Идеальный (недеформированный) тороидальный конденсатор образован двумя осесимметричными поверхностями — тороидами, образующие которых (рисунок) — окружности радиусов R_1 и R_2 . Центры окружностей могут быть смещены относительно друг друга в радиальном направлении. Пусть τ_1 и τ_2 — координаты точек пересечения этих окружностей с осью r в цилиндрической системе координат $(r, \varphi; z)$, $b = (\tau_2 - \tau_1)/2$ — полузазор между электродами при $z = 0$,

$r_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$ — радиус средней траектории частиц в конденсаторе. Назовем образующей поверхностью конденсатора тороидальную поверхность с образующей окружностью радиуса $R_0 = (R_1 + R_2)/2$, проходящую через точку $r = r_0$, $z = 0$,

с центром на оси r . Зазор между электродами обычно является достаточно узким, т.е. $\varepsilon = \delta/r_0 \ll 1$. Вследствие этого кривизны образующих электродов мало отличаются друг от друга.

Метод расчета поля в тороидальном конденсаторе с заданной геометрией пластин [2-4] состоит в следующем. Выражение для поля строится в виде ряда по степеням $(r-r_0)^i z^k$ отклонения координат r, z от средней траектории. Коэффициенты ряда $\alpha_{i,k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, вытекающим из уравнения Лапласа для потенциала поля. Для получения недостающих соотношений искомого разложение подставляется в граничные условия на поверхности электродов. Коэффициенты $\alpha_{i,k}$ имеют вид асимптотических рядов по малому параметру ε .

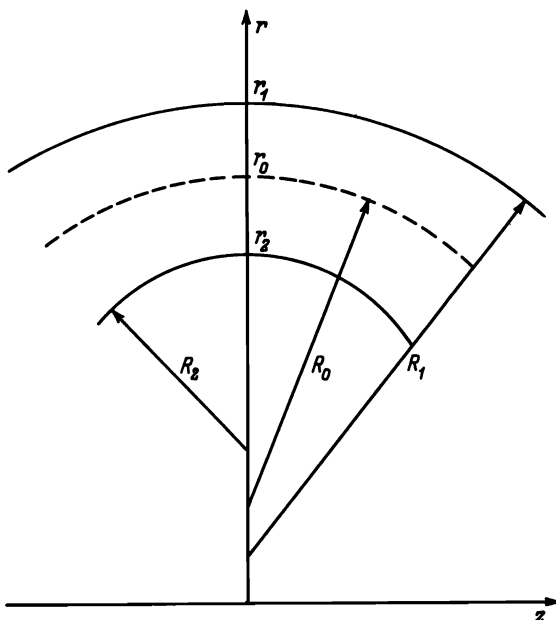
Следует отметить, что работы [2, 3] имеют серьезные недостатки. В работе [2] аксиальная кривизна пластин предполагается малой ($R_1, R_2 \gg r_0$), т.е. конденсатор мало отличается от цилиндрического. Результаты работы [3] справедливы лишь при совпадении кривизн электродов ($R_1 = R_2$). Работа [4] свободна от указанных недостатков, однако в ней получены только старшие члены разложения коэффициентов $\alpha_{i,k}$ по степеням ε . Если ограничиться лишь этими членами, то точность определения коэффициентов $\alpha_{i,k}$ с малыми номерами i, k явно недостаточна. В частности, входящий в коэффициент тороидальности c [3] радиус аксиальной кривизны R_c эквипотенциали, проходящей через точку $r=r_0, z=0$, определяется в приближении двумерного поля ($R_c = R_0$). Результаты работ [2-4] получены, разумеется, в предположении об осесимметричности поля, от которого нам приходится отказаться.

В настоящей работе получено выражение для поля тороидального конденсатора со слабдеформированными электродами. Поле имеет вид ряда по степеням отклонения координат r, z от средней траектории и угла φ от некоторого фиксированного значения φ_0 (без снижения общности будем в дальнейшем считать $\varphi_0 = 0$). Кроме того, для недеформированного конденсатора получено выражение для коэффициента тороидальности c в квадратичном по ε приближении, т.е. с большей точностью, чем позволяет работа [4].

Запишем уравнения пластин конденсатора в виде

$$x = G(z) + \delta g_t(z, \varphi), \quad t=1,2. \quad (1)$$

Здесь $x = r - r_0$, $G(z) = -z^2/2R_0 - z^4/8R_0 - \dots$ — функция, задающая образующую поверхность конденсатора (уравнение образующей поверхности $x = G(z)$);



Образующие электродов недеформированного тороидального конденсатора

$g_t(z, \varphi) = \hat{g}_t(z) + \delta g_t(z, \varphi)$, $\hat{g}_t$ — функции, описывающие поверхности недеформированного конденсатора (при отсутствии деформаций $\delta g_t = 0$), $\hat{g}_1(0) = 1$, $\hat{g}_2(0) = -1$, $\hat{g}_t(-z) = \hat{g}_t(z)$. Более конкретно вид функций $\hat{g}_t$ зависит от геометрии электродов: если, например, образующие имеют одинаковые аксиальные радиусы кривизны $R_1 = R_2 = R_0$, то $\hat{g}_1(z) = 1$, $\hat{g}_2(z) = -1$. Если же совпадают центры аксиальной кривизны электродов, т.е. $R_1 = R_0 + b$, $R_2 = R_0 - b$, то

$$\hat{g}_t(z) = \pm 1 + \left\{ \pm \frac{1}{2R_0^2} - \frac{b}{2R_0^3} \pm \dots \right\} z^2 + \dots \quad (2)$$

Функции δg_t характеризуют малые деформации пластин; предполагается, что $|\delta g_t| \ll |g_t|$.

Потенциал поля конденсатора $U(x, z, \varphi)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta U(x, z, \varphi) &= 0, \\ U(G(z) + \delta g_1(z, \varphi), z, \varphi) &= V, \\ U(G(z) + \delta g_2(z, \varphi), z, \varphi) &= -V. \end{aligned}$$

Для удобства использования результатов работы при анализе траекторий ионов в дефлекторе перейдем к безразмерным координатам $\eta = x/\tau_0$, $\varsigma = z/\tau_0$. Тогда (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \eta &= F(\varsigma) + \varepsilon f_t(\varsigma, \varphi), \quad t=1,2, \\ \text{где } F(\varsigma) &= G(\tau_0 \varsigma)/\tau_0, \quad f_t(\varsigma, \varphi) = \hat{f}_t(\varsigma) + \delta f_t(\varsigma, \varphi), \quad \hat{f}_t(\varsigma) = \hat{g}_t(\tau_0 \varsigma), \\ \delta f_t(\varsigma, \varphi) &= \delta g_t(\tau_0 \varsigma, \varphi). \end{aligned}$$

Соответственно $F(\varsigma) = -c_0 \varsigma^2/2 - c_0^3 \varsigma^4/8 + \dots$, разложение (2) принимает вид

$$\hat{f}_t(\varsigma) = \pm 1 + \left\{ \pm \frac{c_0^2}{2} - \varepsilon \frac{c_0^3}{2} \pm \dots \right\} \varsigma^2 + \dots,$$

где $c_0 = \tau_0/R_0$.

В безразмерных координатах потенциал $U(\eta, \varsigma, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U(\eta, \varsigma, \varphi) = 0 \quad (3)$$

и граничным условиям

$$U(F(\varsigma) + \varepsilon f_t(\varsigma, \varphi), \varsigma, \varphi) = \pm \varepsilon E, \quad (4)$$

где $E = \tau_0 V/b$, верхний знак здесь и далее соответствует $t = 1$, нижний — $t = 2$.

В дальнейшем нам понадобятся разложения степеней функций $F^i(\varsigma)$ и $f_t^i(\varsigma, \varphi)$ в окрестности $\varsigma = \varphi = 0$. Запишем их в виде

$$\begin{aligned} F^i(\varsigma) &= \sum_{m=i}^{\infty} F_m^{(i)} \varsigma^{2m}, \\ f_t^i(\varsigma, \varphi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\ell} f_{t,p,\ell}^{(i)} \varphi^{\ell-p} \varsigma^p. \end{aligned} \quad (5)$$

При $i = 0$ предполагается $F_m^{(0)} = f_{t,p,m}^{(0)} = \delta_{m0}$, где δ_{ik} — символ Кронеккера. Для недеформированного конденсатора $f_{t,p,\ell}^{(i)} = 0$ при $p < \ell$, $f_{t,\ell,\ell}^{(i)} = \hat{f}_t^{(i)}$, $\hat{f}_t^{(i)} = 0$ при нечетных ℓ .

Будем искать решение задачи (3), (4) в виде

$$U(\eta, \zeta, \varphi) = E \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a_i(\zeta, \varphi) \eta^i, \quad (6)$$

где

$$a_i(\zeta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(n)}(\zeta, \varphi) \varepsilon^n, \quad (7)$$

и, в свою очередь,

$$a_i^{(n)}(\zeta, \varphi) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} a_{i,j,k}^{(n)} \varphi^j \zeta^k. \quad (8)$$

Подставляя (6)–(8) в уравнение (3), получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} a_{i+2,j,k}^{(n)} + (2i+1) a_{i+1,j,k}^{(n)} + i^2 a_{i,j,k}^{(n)} + a_{i,j,k+2}^{(n)} + \\ + 2i a_{i-1,j,k+2}^{(n)} + i(i-1) a_{i-2,j,k+2}^{(n)} + a_{i,j+2,k}^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) можно определить все коэффициенты $a_{i,j,k}^{(n)}$ при $i \geq 2$, если известны коэффициенты $a_{0,j,k}^{(n)}$ и $a_{1,j,k}^{(n)}$. Для определения последних подставим (6) в граничные условия (4). Имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a_i(\zeta, \varphi) \{F(\zeta) + \varepsilon f_\varepsilon(\zeta, \varphi)\}^i = \pm \varepsilon. \quad (10)$$

Используя (7) и приравнявая в (10) слагаемые с одинаковыми степенями ε , получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{a_i^{(n)}(\zeta, \varphi)}{(\alpha-n)!(i+n-\alpha)!} F^{i+n-\alpha}(\zeta) f_\varepsilon^{\alpha-n}(\zeta, \varphi) \mp \delta_{\alpha,1} = 0, \quad (11)$$

$$\alpha-i \leq n \leq \alpha$$

где $\alpha = 0, 1, 2, \dots$

Далее, подставив в (11) разложения (5), (8) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях φ и ζ , запишем окончательно искомые соотношения для определения коэффициентов $a_{i,j,k}^{(n)}$:

$$\sum_{M(\alpha, \beta, \gamma)} \frac{a_{i,j,k}^{(n)}}{(\alpha-n)!(i+n-\alpha)!j!k!} F_m^{(i+n-\alpha)(\alpha-n)} f_{t, \gamma-k-2m, \beta-j+\gamma-k-2m} \mp \delta_{\alpha,1} \delta_{\beta,0} \delta_{\gamma,0} = 0. \quad (12)$$

Здесь $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ – целые числа; $M(\alpha, \beta, \gamma)$ для каждого набора значений α, β, γ – ограниченная совокупность значений индексов i, j, k, m, n , определяемая неравенствами $0 \leq j \leq \beta$, $0 \leq k \leq \mu$, $0 \leq m \leq (\gamma-k)/2$, $0 \leq n \leq \alpha$, $\alpha-n \leq i \leq m+\alpha-n$.

Соотношения (9) и (12) позволяют определить все коэффициенты $a_{i,j,k}^{(n)}$. Обозначим $a_{i,k}^{(n)} = a_{i,0,k}^{(n)}$ – значения коэффициентов для недеформированного конденсатора, $\delta a_{i,k}^{(n)} = a_{i,0,k}^{(n)} - a_{i,k}^{(n)}$ – возмущение коэффициентов.

Ясно, что для невозмущенного конденсатора $\alpha_{i,j,k}^{(n)} = 0$ при $j > 1$, поэтому обозначим $\alpha_{i,j,k}^{(n)} = \alpha_{i,j,k}^{(n)}$. Тогда потенциал слабodeформированного тороидального конденсатора запишется в виде

$$U(\eta, \zeta, \varphi) = E \{ U_0(\eta, \zeta) + U_1(\eta, \zeta, \varphi) \},$$

где $E U_0(\eta, \zeta)$ – потенциал недеформированного конденсатора:

$$U_0(\eta, \zeta) = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} \eta + \frac{1}{2} \alpha_{2,0} \eta^2 + \frac{1}{2} \alpha_{0,2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \alpha_{1,2} \eta \zeta^2 + \dots$$

Малая добавка $U_1(\eta, \zeta, \varphi)$, характеризующая возмущение потенциала вследствие деформации электродов, имеет вид

$$U_1(\eta, \zeta, \varphi) = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} \eta + \alpha_{0,1} \zeta + \alpha_{0,1,0} \varphi + \frac{1}{2} \alpha_{2,0} \eta^2 + \alpha_{1,1} \eta \zeta + \alpha_{1,1,0} \eta \varphi + \dots \quad (13)$$

Подставляя в (13) значения коэффициентов, получаемые из (9) и (12), и ограничиваясь в них главным порядком по ε и линейным приближениям по возмущению δf_1 и δf_2 , имеем

$$U_1(\eta, \zeta, \varphi) = -\frac{\delta}{2} \eta + \frac{1}{2} (1 - F_{\zeta\zeta}(0)) \frac{\delta}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} F_{\zeta\zeta}(0) \frac{\delta}{2} \zeta^2 - \frac{\delta_1}{2} \eta \zeta - \frac{\delta_2}{2} \eta \varphi + \dots \quad (14)$$

где $\delta = \delta f_1(0,0) - \delta f_2(0,0)$, $\delta_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\delta f_1(\zeta, \varphi) - \delta f_2(\zeta, \varphi)] \Big|_{\zeta=\varphi=0}$, $\delta_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [\delta f_1(\zeta, \varphi) - \delta f_2(\zeta, \varphi)] \Big|_{\zeta=\varphi=0}$. Видно, что если $\delta f_1(\zeta, \varphi) = \delta f_2(\zeta, \varphi)$,

то в старшем по ε порядке $U_1 = 0$.

Заметим, что формулы для $\alpha_{i,j,k}^{(n)}$, получаемые из (9) и (12), справедливы и в том случае, когда образующая поверхность конденсатора не является окружностью, а задана произвольной симметричной функцией $F(\zeta)$. Выражения для коэффициентов невозмущенного конденсатора $\alpha_{i,j,k}^{(0)}$ совпадают с результатами работы [4].

Разложение (14) является искомым выражением для возмущения потенциала электростатического поля, вызванного деформацией электродов тороидального конденсатора. Оно может быть использовано при выводе уравнения движения заряженных частиц в деформированном конденсаторе подобному тому, как это делается в случае отсутствия деформаций.

В заключение рассмотрим вопрос об определении коэффициента тороидальности $c = r_0 R_0^{-1}$. Известно [3], что $c = \alpha_{0,2} \alpha_{1,0}^{-1}$. Уравнения (9) и (12) позволяют определить c с любой точностью. В частности, с точностью до квадратичного по ε члена

$$c = \left[-F_{\zeta\zeta} - \varepsilon \frac{\hat{f}_{1,\zeta\zeta} + \hat{f}_{2,\zeta\zeta}}{2} + \varepsilon^2 \left\{ \left(\frac{3}{4} F_{\zeta\zeta} + \frac{1}{4} \right) (\hat{f}_{1,\zeta\zeta} - \hat{f}_{2,\zeta\zeta}) - \frac{1}{2} F_{\zeta\zeta\zeta\zeta} + F_{\zeta\zeta}^3 - F_{\zeta\zeta}^2 - \frac{1}{2} F_{\zeta\zeta} \right\} \right] \Big|_{\zeta=\varphi=0} + O(\varepsilon^3).$$

В случае, когда центры аксиальной кривизны пластин конденсатора совпадают,

$$c = c_0 - \varepsilon^2 \frac{c_0^2 - c_0}{2} + O(\varepsilon^3).$$

Если конденсатор сферический ($c_0 = 1$), то $c = c_0$. Если $R_0 = 2r_0$, т.е. $c_0 = 0,5$, то $c \approx \frac{1}{2} (1 + 0,25 \varepsilon^2)$. При ширине зазора, в десять раз меньше радиуса средней траектории r_0 ($\varepsilon = 0,05$), коэффициент тороидальности отличается от обычно приближенно используемого значения c_0 примерно на 0,06 %. Однако при увеличении ширины зазора или уменьшении радиуса средней траектории значение поправки возрастает.

тает и должно приниматься во внимание при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В.П., Явор С.Я. Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. М., 1978.- 224 с.
2. Boerboom A.J.H.//Z.Naturforsch. 1960, 15A. N 4. P. 347-350.
3. Wollnik H., Matsuo T., Matsuda H.//Nucl. Instr.Meth. 1972.102, N 1. P.13-17
4. Трубочеев Г.М.//Электрофизическая аппаратура. 1977.- № 15.- С.155-158.