

УДК 537.533.3

Разработка принципов построения каталога плоских симметричных электростатических полей. Бердников А.С., Гринева О.А.//Научное приборостроение. Электронно-ионная оптика. Л.:Наука, 1989, с.40-45.

Описаны принципы построения каталога плоских симметричных электростатических полей. Изложен общий подход к классификации аналитических функций комплексного переменного с точки зрения существенно различных полевых структур, порождаемых ими. Разработанный и реализованный на IBM PC/AT каталог дает основные характеристики плоских электростатических полей и может быть использован для синтеза ионно-оптических систем. Лит. - 4 назв., ил. - 2.

РАЗРАБОТКА ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ КАТАЛОГА ПЛОСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В оптике заряженных частиц (электронной и ионной оптике) наряду с задачами конструирования конкретных приборов существуют поисковые задачи, при решении которых исследователь не связан с заданной и, как правило, уже исследованной и привычной полевой конфигурацией. При решении таких задач возможно получение качественно новых полевых структур, существенно отличающихся от используемых на практике, иногда с неожиданными свойствами.

Задача, рассматриваемая в данной статье, — поисковая. Она состоит в построении каталога электростатических полей, для которых существуют аналитические выражения и которые могут быть использованы при разработке электронно- и ионно-оптических систем. Для каждой полевой структуры в таком каталоге кроме аналитических выражений должны также содержаться ее характеристики, необходимые профессионалам-разработчикам для оценки свойств того или иного поля и его пригодности для разработки требуемой ионно-оптической системы. К числу таких характеристик для плоских симметричных электростатических полей, выявленных в результате опроса разработчиков, были отнесены графическое изображение эквипотенциальных линий и силовых линий электростатического поля, линий равной напряженности $E_x^2 + E_y^2 =$

$= \text{const}$, а также (отдавая дань методам параксиальной оптики [1]) приосевые характеристики поля – распределение потенциала и его производных вдоль плоскости симметрии поля. При наличии аналитических выражений для потенциала поля все эти характеристики легко строятся с помощью ЭВМ, имеющей в своем составе графические устройства.

На первом этапе разработки каталога электростатических полей для задач корпускулярной оптики ограничили плоскими полями, имеющими к тому же ось симметрии в плоскости OXY и не имеющими особенностей (т.е. зарядов) на этой оси. Известно, что любой функции $\varphi(x, y)$ для потенциала плоского электростатического поля однозначно соответствует аналитическая функция $f(z)$ комплексного переменного, так что $\text{Re}(f(z)) = \varphi(x, y)$:

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1)$$

(обычно в качестве потенциала берут мнимую, а не вещественную часть аналитической функции, но для нашей задачи наиболее удобно такое представление). Эквипотенциали электростатического поля удовлетворяют условию $\varphi(x, y) = \text{const}$, а силовые линии – условию $\psi(x, y) = \text{const}$. Более того, для симметричных плоских полей с осью симметрии OX осуществляется взаимно-однозначное соответствие (I) между потенциалами и аналитическими функциями, принимающими на оси OX вещественные значения ($\psi(x, 0) = 0$) [2]. Вещественная часть таких функций будет четной функцией от y (т.е. $\varphi(x, y) = \varphi(x, -y)$), а мнимая – нечетной (т.е. $\psi(x, y) = -\psi(x, -y)$). Таким образом, задача поиска симметричных плоских электростатических потенциалов сводится к перебору аналитических функций комплексного переменного, принимающих вещественные значения на вещественной оси, не имеющих особенностей на вещественной оси, и достаточно просто выражающихся через элементарные функции как, например, в работе [3]. Отметим также, что мнимой (антисимметричной) части такой функции соответствует векторный потенциал, порождающий симметричное плоское магнитное поле. Таким образом, одновременно с каталогом симметричных электростатических полей можно построить и каталог симметричных магнитостатических полей.

При рассмотрении электрических и магнитных полей, зависящих от многих параметров, необходимо заранее определить, какие из них существенно влияют на вид поля, а какие – нет. Общий вид полевой структуры не изменяют следующие преобразования потенциала:

умножение на константу

$$\tilde{\varphi}(x, y) = c \cdot \varphi(x, y),$$

прибавление константы

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) + c,$$

параллельный перенос системы координат

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x - x_0, y - y_0),$$

поворот системы координат

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha),$$

масштабирование

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(kx, ky).$$

При рассмотрении аналитических функций комплексного переменного ограничимся пока рассмотрением только многочленов. Прежде всего посмотрим, как можно классифицировать многочлены с точки зрения существенных отличий в получаемой полевой структуре. Отметим, что общий подход к классификации, излагаемый ниже, применим и к более сложным аналитическим функциям комплексного переменного.

Каждый многочлен может быть задан (с точностью до множителя) как набором коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$f(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad (2)$$

так и множеством корней многочлена $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n). \quad (3)$$

Поскольку по условию многочлен (2) на вещественной оси должен принимать вещественное значение, то все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — вещественные. Соответственно, корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена или лежат на вещественной оси или образуют комплексно сопряженную пару корней $a + ib, a - ib$. И в том и в другом представлении получаются ровно n свободных вещественных параметров, задающих вид многочлена, однако свобода, с которой можно варьировать эти параметры, пока не учитывает эквивалентных преобразований полевой структуры.

Рассмотрим подробнее представление многочлена (3). При геометрических преобразованиях системы координат (масштабирование, поворот и т.д.) корни многочлена будут оставаться его корнями. Если точки на комплексной плоскости, представляющие корни одного многочлена, переходят при геометрическом преобразовании плоскости в корни другого многочлена, то эти два многочлена будут порождать одинаковые полевые структуры. Поэтому для классификации многочленов нужно прежде всего выделить конфигурации корней на комплексной плоскости, не переходящие друг в друга при геометрических преобразованиях.

1. Пусть задан многочлен первого порядка $f(z) = A(z - z_1)$. С помощью масштабирования и параллельного переноса можно добиться, чтобы его корень попал в начало координат $z = 0$. Следовательно, все полевые структуры, порождаемые многочленами первого порядка, эквивалентны полевой структуре многочлена $f(z) = z$.

2. Пусть задан многочлен второго порядка $f(z) = A(z - z_1)(z - z_2)$. Рассмотрим следующие случаи: оба корня совпадают. Тогда с помощью параллельного переноса многочлен приводится к виду $f(z) = z^2$; есть два различных вещественных корня. С помощью масштабирования и параллельного переноса корни переводятся в точки $z_1 = -1, z_2 = +1$. Многочлен приводится к виду $f(z) = z^2 - 1$; многочлен имеет пару комплексно сопряженных корней. С помощью масштабирования и параллельного переноса корни переходят в точки $z_1 = -i, z_2 = i$. Многочлен приводится к виду $f(z) = z^2 + 1$.

Очевидно, что многочлены $z^2, z^2 + 1, z^2 - 1$ порождают одну и ту же полевую структуру, поскольку отличаются друг от друга на константу. Таким образом, все многочлены второго порядка эквивалентны $f(z) = z^2$.

3. Пусть задан многочлен третьей степени $f(z) = A(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Если он имеет три совпадающих корня, то его можно привести к виду $f(z) = z^3$. Если многочлен имеет два несовпадающих вещественных корня (и третий корень, следовательно, тоже вещественный), то его можно привести к виду $(z^2 - 1)(z - a)$. Если многочлен имеет пару сопряженных комплексных корней и один вещественный корень, то он приводится к виду $(z^2 + 1)(z - b)$. Поскольку свободный член у многочлена

можно отбросить (потенциал определяется с точностью до константы), то получается, что многочлен третьей степени эквивалентен либо $f(z) = z^3$, либо $f(z) = z^3 - \alpha z^2 - z$, либо $f(z) = z^3 - \beta z^2 + z$. Кроме того, поскольку симметрия относительно оси OY также является эквивалентным преобразованием полевой структуры, то при исследовании полевых структур $z^3 - \alpha z^2 - z$ и $z^3 - \beta z^2 + z$ можно ограничиться случаями $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Аналогичным образом можно выделить несущественные параметры и разбить исследуемые многочлены на неэквивалентные классы и для более высоких степеней (четвертой, пятой и т.д.). Изложенный метод разделения многочленов на неэквивалентные классы положен в основу разрабатываемого каталога электростатических полей, который на первом этапе ограничивается полевыми структурами, порождаемыми комплексными полиномами.

В качестве базовой машины для разработки каталога полевых структур плоских симметричных электростатических полей использован персональный компьютер IBM PC/AT, наилучшим образом подходящий для решения данной задачи. Разработанная программа позволяет, подключая подпрограммы пользователя, реализующие аналитические зависимости для электростатического поля, подбирать в диалоге оптимальные параметры для графических характеристик поля и выводить их на твердую копию.

На рис.1 приведено изображение трехмерной поверхности функции потенциала

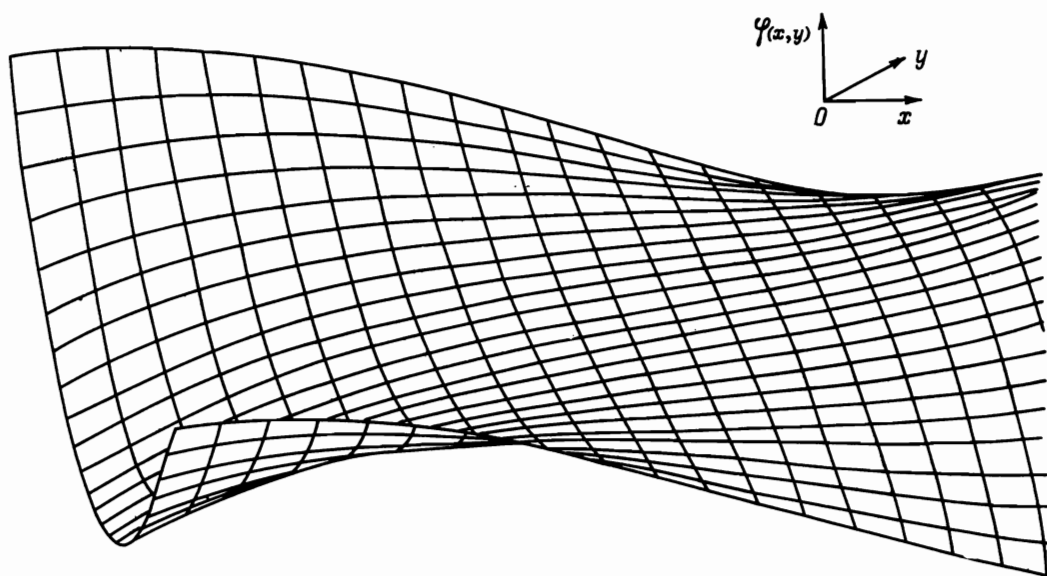


Рис.1. Поверхность потенциала $\varphi(x, y)$ для случая $f(z) = (z^2 + 1)(z - \beta)$, $\beta = 0$

$U(x, y)$, а на рис.2-изображения эквипотенциалей, характерные для некоторых полей, порождаемых комплексными многочленами. Видно, что для многочленов одной степени из разных классов (рис.2 б, в для 3-й степени и рис.2 г, д, е - для 4-й степени) картина поля получается принципиально различной. Кроме того, для некоторых параметрически зависимых многочленов существуют такие значения параметров, при переходе через которые картина поля резко меняется (см.рис.2а, б). Отметим также случаи пересечения эквипотенциальных линий, в результате чего образуется

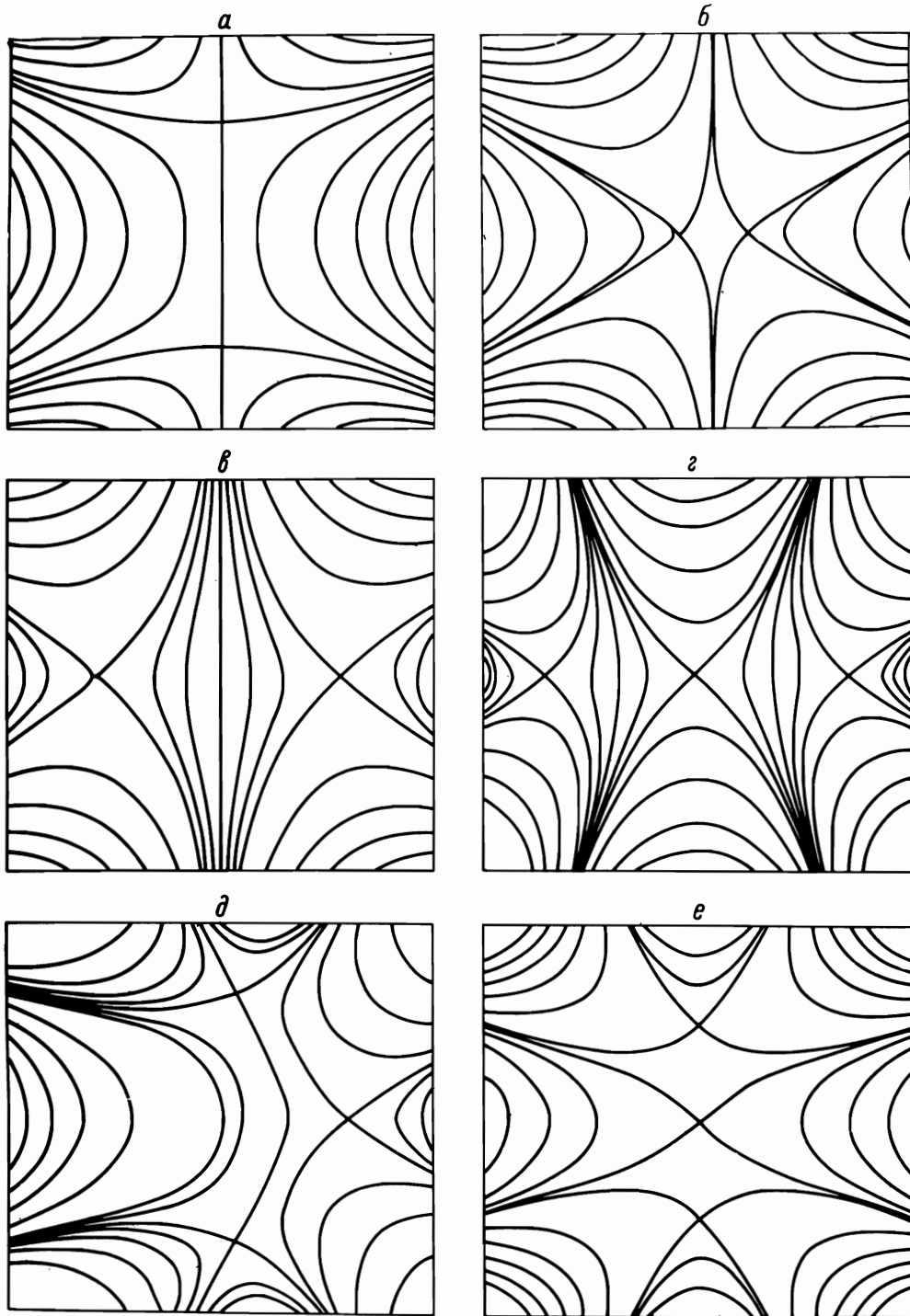


Рис.2. Эквипотенциалы $\varphi(x, y) = \text{const}$: а - для $f(z) = (z^2 + 1)(z - \delta_1)$, $\delta_1 = 0$; б - для $f(z) = (z^2 + 1)(z - \delta_1)$, $\delta_1 = 1$; в - для $f(z) = (z^2 - 1)(z - \alpha_1)$, $\alpha_1 = 0$; г - для $f(z) = (z^2 - 1)(z - \alpha_1)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; д - для $f(z) = (z^2 + 1)(z - \delta_1)(z - \delta_2)$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$; е - для $f(z) = (z^2 + 1)[(z^2 - \delta_2)^2 + \delta_1^2]$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$.

структура типа незамкнутой криволинейной коробочки с углами (см.рис.2а). Факт существования структур типа коробочки при простой аппроксимации поля многочленами достаточно удивителен (и может быть использован при расчете ионных источников).

Дальнейшая работа по созданию и расширению каталога электростатических полей включает в себя следующие направления:

работа по классификации и исследованию плоских симметричных электростатических полей, допускающих аналитические выражения более общего вида (функции $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\ln$ и т.д. от многочленов, дробно-рациональные функции и др.);

поиск по литературе плоских электростатических полей, исследованных и используемых при решении задач корпускулярной оптики;

разработка программного обеспечения, позволяющего включать в каталог поля, для которых в элементарных функциях представимы выражения $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, где (x, y) – геометрические координаты точки, φ – функция потенциала, ψ – функция потока [4];

включение в каталог осесимметричных электростатических полей; классификация аналитических зависимостей, задающих такие поля; поиск по литературе исследованных осесимметричных электростатических полей;

поиск по литературе электростатических полей, допускающих аналитически выражаемые траектории (с включением соответствующей информации в каталог);

разработка программного обеспечения, позволяющего анализировать свойства траекторий, характерные для данного электростатического поля и включать информацию о траектории в каталог.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рустерхольц А. Электронная оптика. М.:Ин.лит., 1952.
2. Голиков Ю.И., Уткин Г.И., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Уч.пос. Л.: ЛПИ, 1984.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.5. М.: Мир, 1977.
4. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: Ин.лит., 1961.