

УДК 537.534.3

Исследования метода замены переменных для решения задач движения заряженных частиц. Бердников А.С., Гринева О.А. // Научное приборостроение. Электронно-ионная оптика. Л.: Наука, 1989, с.8-13.

Рассматриваются пути обобщения одного из эффективных методов решения задач синтеза ионно-оптических систем – метода замены переменных. Показано, что наряду с известной конформной существуют и неконформные замены переменных, позволяющие целенаправленно трансформировать траектории движения заряженных частиц и силовые поля, в которых оно происходит. Лит. – 4 назв.

ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В последнее время наряду с традиционными задачами анализа ионно-оптических систем все больший интерес вызывают задачи синтеза, позволяющие получать и использовать принципиально новые полевые структуры. Одним из эффективных методов решения задач синтеза ионно-оптических систем является предложенный в работе [1] метод замены переменных, когда с помощью подходящей конформной замены осуществляется целенаправленная трансформация траекторий и силового поля, в котором осуществляется движение. В этой работе исследуются некоторые пути обобщения метода замены переменных.

Пусть однопараметрическое семейство траекторий движения заряженных частиц в плоскости (x, y) задается условием

$$F(x, y) = \text{const.} \quad (1)$$

Если рассматривается движение в электростатическом поле с потенциалом $U(x, y)$ частиц с полной энергией E , то функция $F(x, y)$ должна удовлетворять уравнению в частных производных:

$$\begin{aligned} 2(E - eU) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \\ - e \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которое получается исключением из условий

$$\frac{d}{dt} (F(x(t), y(t))) = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (F(x(t), y(t))) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\dot{x})^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\dot{y})^2 + \frac{\partial F}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \ddot{y} = 0,$$

$$m \ddot{x} = -e \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$m \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{2} + eU = E$$

$$m \ddot{y} = -e \frac{\partial U}{\partial y},$$

величин $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$.

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \bar{x} = f^{-1}(x, y) \\ \bar{y} = g^{-1}(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ y = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тем самым семейство кривых в плоскости (x, y) , задаваемое условием (1), переходит в семейство кривых в плоскости $(\bar{x}, \bar{y})$, задаваемое условием $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) = F(f(\bar{x}, \bar{y}), g(\bar{x}, \bar{y})) = \text{const}$. Для того, чтобы функция $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$ определяла семейство траекторий в некотором электростатическом поле с потенциалом $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$, она должна удовлетворять уравнению

$$2(\bar{E} - e\bar{U}) \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right] -$$

$$- e \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right) \left[\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = 0. \quad (4)$$

С другой стороны, производные от функции $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$ определяются через производные от функции $F(x, y)$, которая, по условию, удовлетворяет уравнению (2). Выразив производные от функций $F(x, y)$ через производные от функций $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$, $f(\bar{x}, \bar{y})$, $g(\bar{x}, \bar{y})$ и подставив их в (2), получим второе уравнение для функции $\bar{F}$:

$$A_1(\bar{x}, \bar{y}) \cdot 2(\bar{E} - eU) \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right] +$$

$$+ A_2(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right)^3 + A_3(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^3 +$$

$$+ A_4(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + A_5(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^2 = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } A_1(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2, \quad A_2(\bar{x}, \bar{y}) = 2(\bar{E} - e\bar{U}) \left[\frac{e}{2(\bar{E} - e\bar{U})} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right] - e \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \text{ и т.п.}$$

Требуется, чтобы уравнение (4) выполнялось для функции $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$, если $\bar{F}$ удовлетворяет уравнению (5), тогда замена переменных (2) переводит любую траекторию в плоскости (x, y) в траекторию в плоскости $(\bar{x}, \bar{y})$. Выразив из (4) блок из вторых производных функции $\bar{F}$ по $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и подставив его в (5), получим однородную кубическую форму относительно первых производных от функции $\bar{F}$, которая также должна обращаться в ноль, если удовлетворяется уравнение (5). Однако это означает, что кубическая форма обращается в ноль тождественно, поскольку при любых наперед заданных значениях первых производных от $\bar{F}$ в некоторой фиксированной точке $(\bar{x}, \bar{y})$ по теореме существования и единственности имеется бесконечное множество соответствующих решений уравнения (5). Приравнявая нулю коэффициенты кубической формы, получаем условия:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\partial W}{\partial x} \cdot 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right) = \\ & = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right), \\ & \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \\ & - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right], \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} = & - \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right]}{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)} + \\ & + \frac{\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\partial W}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right]}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)}, \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}} = & - \frac{\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial W}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right]}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)} + \\ & + \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial W}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right]}{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \right)}, \end{aligned}$$

где введены обозначения $W(x, y) = \frac{1}{2} \ln(E - eU(x, y))$, $\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \ln(\bar{E} - e\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}))$.

Условия (6) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial W}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial W}{\partial \bar{y}}$, $\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}}$. Эта система является вырожденной тогда и только тогда, когда функции $f(\bar{x}, \bar{y})$ и $q(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \end{cases}, \quad (7)$$

т.е. когда замена переменных (3) является конформной. В этом случае $\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + W(x, y)$ и условия конформности (7) обращают уравнение в тождество, т.е., как и показано в работе [2], конформная замена переменных переводит исходные траектории в траектории в поле с потенциалом $(\bar{E} - e\bar{U}) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] (E - eU)$. Отметим, что конформная замена переменных

оказывается единственным классом функций, удовлетворяющих системе (6) и не зависящих от потенциала $U(x, y)$ в исходной плоскости.

Если система уравнений (6) является невырожденной, то ее можно привести к эквивалентному виду и разбить на две подсистемы: систему из двух уравнений для функции w и систему из двух уравнений для функции $\bar{w}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = R_1(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = R_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = R_3(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} = R_4(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (8)$$

где функции R_1, R_2, R_3, R_4 , выражающиеся через $f(\bar{x}, \bar{y})$ и $g(\bar{x}, \bar{y})$ и их производные, имеют достаточно сложный вид. Если выполнены условия совместности [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial R_2}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial R_3}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial R_4}{\partial \bar{x}}, \end{cases} \quad (9)$$

то при заданных функциях $f(x, y)$ и $g(\bar{x}, \bar{y})$ функции w и $\bar{w}$ определяются однозначно с точностью до аддитивной константы. Таким образом, существуют целые классы потенциалов $U(x, y)$ и $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$, связанные заменой переменных, отличной от конформной, и переводящей траектории заряженных частиц в поле $U(x, y)$ в траектории в поле $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$. Для поиска самих функций замены переменных нужно исследовать на совместность систему уравнений (8).

При заданной функции $w(x, y)$ система уравнений (8) оказывается переопределенной. Исследование ее совместности [4] является технически трудоемкой задачей в силу сложного вида входящих в систему функций, поэтому ограничимся констатацией факта существования класса потенциалов $U(x, y)$ и $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ и приведенными соотношениями (8) и (9) для определения функций замены переменных $f(\bar{x}, \bar{y})$ и $g(\bar{x}, \bar{y})$.

К числу других возможностей обобщения метода замены переменных относится конструирование функции $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$, задающей новые траектории заряженных частиц, в виде

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, F_1(f_1, g_1), F_2(f_2, g_2), \dots) = const, \quad (10)$$

где $F_i(x_i, y_i) = const$ — независимые семейства траекторий, реализующиеся в полях с потенциалами $U_i(x, y)$; $x_i = f_i(\bar{x}, \bar{y})$, $y_i = g_i(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторые функции, обобщающие замену переменных; $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, z_1, z_2, \dots)$ — некоторая выбираемая функция. Однако можно показать, что требование, чтобы функция (10) задавала семей-

ство траекторий при любых функциях $F_i(x_i, y_i)$ приводит к тому, что нахождение функции $\bar{R}$ сводится либо к прямому интегрированию уравнения (4), либо к обычной замене переменных с использованием только одной из траекторий $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2) \dots$.

Определенный интерес представляет поиск функций, реализующих замену переменных в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f^{-1}(x, y) = F(U(x, y), x, y), \\ \bar{y} &= g^{-1}(x, y) = G(U(x, y), x, y).\end{aligned}\tag{11}$$

Требуется найти такие функции F и G , которые при любых допустимых функциях $U(x, y)$ осуществляли бы отображение исходных траекторий в траектории в новом электростатическом поле, зависящем как от исходного потенциала $U(x, y)$, так и от замены переменных. Такие классы замен переменных являются обобщением функций замены переменных, не зависящих от потенциала (которые, как было уже отмечено, сводятся к конформной замене). Исследование существования таких классов функций является предметом отдельной работы.

Показанное в работе существование непустого класса потенциалов $U(x, y)$ и $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$, связанных заменой переменных, отличной от конформной и переводящей траекторию в траекторию, позволяет расширить класс полевых структур, используемых в задачах синтеза ионно-оптических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голиков Ю.К., Матышев А.А.//О некоторых обратных задачах движения ионов в комбинированных статических полях. Тез.докл.IV Всес.конф.по масс-спектрометрии. Сумы: 1986, секц.1.-С.29-30.
2. Голиков Ю.К.//Конформно-инвариантные фокусирующие системы.-Тр.ЛПИ. 1975, № 345.-С.82-84.
3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Ин.лит., 1962.
4. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд.МГУ, 1962.