

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Волгоградский государственный университет»



На правах рукописи

Орлов Андрей Андреевич

**Измерение параметров источников неоднородного магнитного поля в  
нестационарных условиях преобразователями Холла**

Специальность 01.04.01 – «Приборы и методы экспериментальной физики»

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор

Игнатъев Вячеслав Константинович

Волгоград – 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 МЕТОДЫ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	10
1.1 Методы измерения магнитного поля	10
1.1.1 Индукционные методы	11
1.1.2 Гальваномагнитные методы	12
1.1.3 Метод свободной ядерной индукции	13
1.2 Холловская магнитометрия	18
1.2.1 Источники основных погрешностей холловских магнитометров	19
1.2.2 Четырехтактный алгоритм коммутации тока преобразователя Холла	20
1.2.3 Калибровка векторных холловских магнитометров	23
1.2.4 Системная функция преобразователя Холла	24
1.3 Источники магнитного поля	26
1.3.1 Постановка прямой и обратной магнитостатических задач	26
1.3.2 Задачи измерения плоского распределения источников магнитного поля	28
1.3.3 Параметризация обратной магнитостатической задачи	30
1.4 Постановка задач и выбор методов исследования	31
ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ, ВЛИЯЮЩИХ НА ТОЧНОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ИЗМЕРЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ ХОЛЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ	33
2.1 Соотношения взаимности для нелинейной проводимости гальваномагнитной среды	34

2.2	Уравнения состояния гальваномагнитного элемента в неоднородном магнитном поле	38
2.3	Инвариантность матрицы сопротивлений гальваномагнитного многополюсника	44
2.4	Преобразователь Холла в неоднородном магнитном поле	49
2.4.1	Вычисление системной функции гальваномагнитного элемента	49
2.4.2	Проверка соотношений взаимности в неоднородном магнитном поле	52
2.5	Исследование переходных процессов в преобразователе Холла	59
2.5.1	Установка для исследования нестационарных процессов в скомпенсированном магнитном поле	60
2.5.2	Основные закономерности переходных процессов	62
2.5.3	Взаимность в нестационарных условиях	67
2.5.4	Измерение температурного градиента	69
2.6	Выводы по главе	73
<b>ГЛАВА 3 МЕТОДЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ</b>		<b>74</b>
3.1	Аддитивная температурная погрешность при разных последовательностях коммутации токов	74
3.1.1	Компенсация термоэдс джоулева тепла	74
3.1.2	Компенсация термоэдс тепла Пельтье	76
3.1.3	Сравнение величины аддитивной температурной погрешности холловского магнитометра в разных режимах коммутации токов	78
3.2	Методы обработки сигналов свободной индукции релаксационного магнитометра	79

3.3 Выводы по главе	84
ГЛАВА 4 МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ	85
4.1 Холловский магнитный микроскоп	85
4.1.1 Калибровка магнитного микроскопа по ленточным токовым диполям	87
4.1.2 Определение параметров токовых диполей	92
4.2 Численное моделирование изменения магнитных свойств ферромагнетика при деформации	97
4.3 Определение параметров плоских намагниченных образцов	107
4.3.1 Метод оценивания медленно меняющейся намагниченности	107
4.3.2 Индикатор областей резкого изменения намагниченности	113
4.4 Выводы по главе	116
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	120
Приложение А	129
Приложение Б	136
Приложение В	139

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с исследованиями квазидвумерных структур, созданием метаматериалов и устройств функциональной электроники малых размеров, становится актуальной задача измерения параметров этих объектов. Они рассматриваются как источники неоднородного магнитного поля, распределение которого определяется их особенностями структуры. Применимость параметрического описания к таким системам обусловлено большим количеством априорной информации об источниках поля.

Задача косвенного измерения распределения источников по создаваемому ими полю является обратной некорректной задачей. Предлагаемый параметрический подход является одним из наиболее эффективных для решения такой задачи. Измерение параметров требует значительной избыточности исходных данных.

Задачу усложняют нестационарные условия, изменяющие создаваемые поля или параметры преобразователя и требующие повышения быстродействия. Если развитие высокопроизводительных вычислительных систем потенциально позволяет существенно увеличить быстродействие измерений, то физические ограничения, связанные со способом измерения, требуют дополнительного исследования в каждом конкретном случае. Для преобразователя Холла фактором, ограничивающим быстродействие, является допустимая частота коммутации тока [1], для квантовых релаксационных магнитометров – длительность цикла поляризации, для феррозондов – частота зондирующего сигнала.

Показания холловских магнитометров, работающих в режиме коммутации токов, обладают дополнительной погрешностью, сравнимой с геомагнитным полем [2]. Это ограничивает использование таких магнитометров для получения данных при определении параметров источников магнитного поля. Используемые методы компенсации геомагнитного поля обычно не учитывают его изменение на коротких временных интервалах.

Априорная информация о модели связывает параметры источников и пространственное распределение измеряемого поля. И если для токовых распределений такой расчет сводится к элементарному интегрированию, то для ферромагнетиков требует введения модели среды и решения более сложной самосогласованной задачи магнитостатики.

Цифровая обработка сигналов и анализ физических моделей измерителей создают предпосылки для разработки методов увеличения быстродействия холловского магнитометра и точности оценивания параметров источников нестационарного и неоднородного магнитного поля, что является актуальной задачей экспериментальной физики. Результат решения которой может быть использован для анализа качества микро- и нано- магнитных структур на пленках [3], проверке систем магнитного поля [4].

**Цель:** Разработка методов увеличения точности и быстродействия измерения параметров источников магнитного поля в нестационарных условиях.

**Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:**

- Исследовать термоэлектрические и гальваномагнитные явления в преобразователях Холла, влияющие на точность и быстродействие измерений неоднородного магнитного поля.
- Разработать методы компенсации и учета эффектов, ограничивающих точность и быстродействие преобразователей Холла.
- Разработать параметрические модели намагниченного образца и токовых систем источников магнитного поля.

### **Научная новизна диссертационной работы**

1. Установлено, что переходные процессы в преобразователе Холла могут быть вызваны нестационарной неоднородностью температурного поля в магниточувствительной пленке.
2. Впервые получены соотношения взаимности для нелинейного многополюсника в неоднородном магнитном поле и в нестационарных условиях.

3. Разработан метод определения момента и положения магнитного диполя по результатам измерения распределения вектора магнитной индукции, достигающий предела Рао – Крамера.

4. Квантовая модель ферромагнетика дополнена слагаемыми, описывающими нелинейное изменение магнитных свойств ферромагнетика под действием деформации. Это позволило получить зависимость его коэрцитивной силы от величины деформации, которая соответствует экспериментальным данным.

5. Предложен новый метод анализа остаточной намагниченности образца, основанный на поочередной оценке медленно и быстро меняющихся составляющих намагниченности.

### **Практическая значимость работы**

1. Результаты исследования соотношений взаимности в тонкопленочных преобразователях Холла могут быть использованы при проектировании устройств микроэлектроники для устранения систематических погрешностей измерений с использованием алгоритмов коммутации токов.

2. Метод расчета системной функции тонкопленочного преобразователя Холла может быть использован для проектирования элементов функциональной электроники, таких как приборы на магнитостатических волнах, усилители и преобразователи на эффекте Холла и др.

3. Разработанный метод коммутации тока позволяет уменьшить влияние температурного дрейфа показаний векторных магнитометров на погрешность измерений холловского магнитометра.

4. Методы обработки сигнала свободной индукции релаксационного магнитометра позволяют повысить точность измерения геомагнитного поля.

5. Метод обработки измерений топографии компонент вектора магнитного поля позволяет увеличить информативность микроструктурного анализа слабо намагниченных образцов.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Эффект Пельтье, возникающий под действием коммутируемого тока через преобразователь Холла, обуславливает его динамическую и дополнительную погрешности, не исключаемые четырехтактным алгоритмом в нестационарных условиях.

2. Элементы матрицы сопротивлений нелинейного нестационарного гальваномагнитного многополюсника в неоднородном магнитном поле инвариантны к одновременной перестановке индексов и изменению знаков всех токов и направления вектора магнитной индукции.

3. Системная функция тонкопленочного преобразователя Холла пропорциональна векторному произведению плотностей токов, пропущенных поочередно через одноименные пары контактов.

4. Новый алгоритм коммутации тока для холловского тонкопленочного преобразователя, основанный на полученных соотношениях взаимности, позволяет снизить температурный дрейф показаний (для преобразователя ПХЭ602117А с уровня 33 нТл/К до 1 нТл/К).

5. Разработанный метод обработки сигнала свободной прецессии релаксационного магнитометра позволяет измерять изменение индукции магнитного поля в одном релаксационном цикле.

6. Разработанный метод измерения параметров токового диполя в нестационарных условиях позволяет с расстояния не более 3 мм установить положение токового диполя с погрешностью не более 10 мкм и значения компонент вектора его магнитного момента с погрешностью не более  $10^{-8}$  А·м<sup>2</sup>.

7. Разработанные методы исследования микроструктуры образца позволяют выделить области резкого изменения намагниченности плоских ферромагнитных образцов, соответствующих областям необратимых деформаций.

**Достоверность и апробация результатов:**

Достоверность научных результатов обеспечивается многократным проведением экспериментов с воспроизводимыми результатами, применением современных средств и методов измерений неоднородных полей, а также хорошим соответствием результатов численного моделирования и экспериментальных данных, полученных самостоятельно и в других лабораториях.

Основные результаты работы представлены на XII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2012 г), международной конференции SGEM (Болгария Варна, 2016 и 2017 гг.). По результатам работы получен один патент на изобретение и свидетельство регистрации программного обеспечения для ЭВМ.

**Личный вклад:**

Все эксперименты проводились лично соискателем, либо при его непосредственном участии. Автор принимал участие в обсуждении гипотез и постановке задач. Численное моделирование и обработка экспериментальных результатов осуществлялись лично автором.

**Публикации:**

Основные результаты изложены в 32 публикациях, из них 11 в научных журналах, рекомендованных ВАК, 18 в изданиях, индексируемых базами цитирования SCOPUS и(или) Web of Science, в том числе 4 публикации в первом квартале, одном патенте на изобретение и одном свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Структура диссертации:**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 84 наименований, трех приложений. Работа содержит 38 рисунков и 1 таблицу, полный объем диссертации с приложениями – 148 страниц.

## ГЛАВА 1 МЕТОДЫ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

### 1.1 Методы измерений магнитного поля

В последние годы постоянно увеличивается количество методов и средств, используемых для измерения параметров источников магнитного поля. При этом часть из них предназначена для измерения параметров конкретных источников (например, жидких сред, магнитных сплавов, анизотропных полупроводников и т.п. [5 – 9]), другая часть ставит задачу измерения создаваемых полей различной величины [10 – 12]. При исследовании источников магнитного поля со сложной внутренней структурой, таких как намагниченные образцы с локальными особенностями, токовые распределения микропроводников и пр. требуется измерять магнитные поля неоднородность которых сопоставима с величиной неоднородностью поля источников.

Наиболее точные квантовые магнитометры не могут обеспечить необходимую чувствительность в широком диапазоне значений магнитной индукции и большом градиенте измеряемого поля [13]. Кроме того измерение компонент вектора магнитного поля требует существенного усложнения схемы измерений и обычно не применяется. Поэтому далее рассмотрены только те методы, которые используются в условиях неоднородного поля и позволяют измерить компоненты вектора индукции магнитного поля. Основное внимание уделено индукционным и гальваномагнитным методам.

Дополнительно рассмотрен относительно простой метод измерения модуля геомагнитного поля, который возможно применять при калибровке векторных магнитометров. При анализе основное внимание уделено динамическому диапазону, порогу чувствительности, точности, линейности характеристики преобразования и размеру его активной зоны.

### 1.1.1 Индукционные методы

Индукционные методы измерения магнитных полей основаны на явлении электромагнитной индукции [14]. Индукционные датчики обладают широким динамическим диапазоном в пределах  $10^{-6} \dots 1$  Тл, высокой чувствительностью до 0,1 нТл. Но из-за недостаточной помехоустойчивости индукционные магнитометры редко применяются для измерения магнитных полей, в большей степени их использование связано с исследованиями магнитного момента. Развитием индукционного метода является вибрационный и феррозондовый метод.

Вибрационный метод заключается в измерении амплитуды индуцированной эдс, возникающей при изменении взаимного расположения образца – источника магнитного поля и измерительной катушки. Различают разные технические реализации этого метода в зависимости от того, подвижен ли источник или измерительная катушка, имеется ли схема компенсации изменения амплитуды и частоты колебаний [15]. Основными недостатками вибрационного метода являются наличие подвижных частей и связанная с ними погрешность, вызываемая нестабильностью амплитуды вибрации образца или измерительной катушки.

Феррозондовые методы основаны на преобразовании градиента или напряженности магнитного поля в электрический сигнал [16]. В простейшем виде феррозонд представляет собой стержень из магнитномягкого материала с помещенными на него двумя обмотками: для создания поля возбуждения (переменного магнитного потока в сердечнике) и для измерения индуцированной эдс. Если по первой обмотке пропускать переменный ток, то магнитное состояние сердечника будет изменяться по динамической петле, проходя за период полный цикл, и во второй обмотке появится эдс. Феррозонд имеет диаграмму направленности, у которой максимум совпадает с направлением продольной оси, что позволяет использовать его для измерения углов [16]. Современные феррозонды имеют динамический диапазон от 100 пТл до 1 мТл на частотах до 20 МГц и нелинейность функции на уровне 0,001%. Феррозонд требует калибровки, поскольку

чувствительность и постоянное смещение определяется материалом и паразитными параметрами схемы или измерительной катушки.

### 1.1.2 Гальваномагнитные методы

Основными гальваномагнитными методами измерения магнитного поля являются методы Холла и магнитосопротивления. Другие существующие гальваномагнитные устройства – магнитодиоды и магнитотранзисторы – применяются в основном как индикаторы поля, поскольку они не обладают необходимым уровнем стабильности и линейности для измерительного преобразователя [17].

Магниторезистивный метод основан на изменении сопротивления проводника во внешнем магнитном поле. Эти датчики применяются для измерения магнитных полей до 1 Тл в широком температурном диапазоне. Для магниторезистивных преобразователей характерны низкие шумы, малое старение, они не подвержены воздействию поверхностных эффектов, поскольку взаимодействие с магнитным полем происходит во всем объеме проводника [18].

Исходя из материала и физического эффекта, выделяются следующие типы магниторезисторов: на эффекте Гаусса – явления увеличения пути прохождения зарядов по проводнику в магнитном поле (измеряют постоянные и переменные магнитные поля до 1 МГц в диапазоне от 1 мТл до 1 Тл); анизотропные – включают дополнительные ферромагнитные слои, формирующие чувствительную ось (измеряют постоянные и переменные магнитные поля до 10 МГц в диапазоне от 10 нТл до 1 мТл) и гигантские магниторезистивные преобразователи – многослойные резисторы из проводящих и ферромагнитных слоев (динамический диапазон составляет от 10 нТл до 0,1 Тл) [19].

Для преобразователей на эффекте Гаусса характерна малая чувствительность, большая температурная погрешность и отсутствие чувствительной оси, для анизотропных и гигантские магниторезистивных основными проблемами являются

нелинейность характеристики преобразования в большом динамическом диапазоне и наличие ферромагнитных элементов, которые могут приводит к гистерезису функции преобразования величины магнитного поля в сопротивление [20].

Метод измерения магнитного поля на основе эффекта Холла подробно рассмотрен в п.1.2.

### 1.1.3 Метод свободной ядерной индукции

Метод свободной ядерной индукции для измерения модуля геомагнитного поля [21] основан на измерении частоты колебательного процесса намагниченности  $\mathbf{M}$  ядерных спинов, который описывается феноменологическими уравнениями Блоха:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{B}]_x - \frac{M_x}{T_2}; \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{B}]_y - \frac{M_y}{T_2}; \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{B}]_z - \frac{M_z - M_e}{T_1}.\end{aligned}$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  – характерные времена продольной и поперечной релаксации соответственно,  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$  – измеряемое поле,  $M_e$  – равновесное значение намагниченности. Решение этого уравнения имеет вид экспоненциально затухающего релаксационного колебательного процесса с циклической частотой  $\gamma B$ . Сигнал изменения намагниченности принимается индукционным датчиком, в котором находится вещество с осциллирующими спинами.

Выведение системы из равновесного состояния может осуществляться радиоимпульсом на резонансной частоте  $\gamma B$  или резким изменением равновесного состояния системы. Последний способ для измерения в геомагнитном поле более распространен, поскольку позволяет добиться большей эффективности поляризации

ядерных моментов [22]. Изменение равновесного состояния осуществляется помещением системы в сильное заданное внешнее поле и резким его выключением. При этом ядерная намагниченность релаксирует к равновесному состоянию в измеряемом поле.

При использовании этого метода следует учитывать, что магнитное поле должно быть достаточно однородно в объеме вещества, чтобы прецессия спинов происходила на близких частотах. Невыполнение этого требования приводит к увеличению скорости затухания сигнала и невозможности различить сигнал на фоне тепловых шумов датчика. Использование этого метода в неоднородных магнитных полях требует обработки выборок сигналов, содержащих менее 100 периодов, что невозможно с использованием электронно-счетного частотомера с необходимой точностью. Поэтому рассмотрены методы, способные хотя бы потенциально осуществлять измерения частоты в этих условиях.

#### 1) Пятиточечный параметрический метод

Пятиточечный метод [23] – это нелинейный параметрический метод оценивания частоты, который применяется для квазигармонического сигнала

$$x(t) = a(t) \sin[\theta(t)], \quad (1.1)$$

с медленно меняющейся за время одного квазипериода колебаний амплитудой  $a(t)$  и мгновенной частотой  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ , для которого

$$|\dot{\omega}(t)| \leq \mu \omega^2(t), \quad |\dot{a}(t)| \leq \mu a(t) \omega(t), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Для последовательности  $x[n]$  ( $n = 0, \dots, N - 1$ ) дискретизированных с шагом  $\Delta t$  значений сигнала (1.1) строятся выражения вида

$$c[n] = x^2[n - 2Q] - x[n - 3Q]x[n - Q], \quad d[n] = x^2[n - 2Q] - x[n - 4Q]x[n], \quad e[n] = \frac{d[n]}{c[n]}. \quad (1.2)$$

Здесь  $Q$  – параметр прореживания. С помощью формул (1.2) можно получить выражения для отсчетов мгновенной частоты, учитывая приближение порядка  $O(\mu)$ :

$$f[n - 2Q] \approx \frac{1}{2\pi Q \Delta t} \arccos\left(\frac{\sqrt{e[n]}}{2}\right). \quad (1.3)$$

Для выборок, содержащих более чем  $5Q$  отсчетов, значение величины  $e[n]$  оценивается методом наименьших квадратов [23]. Тогда выражение для оценки  $\varepsilon[n]$  величины  $e[n]$  имеет вид

$$\varepsilon[n] = \left\{ \sum_{i=n-(K-1)/2}^{n+(K-1)/2} c^2[i] \right\}^{-1} \sum_{i=n-(K-1)/2}^{n+(K-1)/2} d[i]c[i], \quad n = \frac{K-1}{2}, \dots, N - \frac{K+1}{2},$$

а выражение (1.3) для мгновенной частоты принимает вид:

$$f[n] \approx \frac{1}{2\pi Q \Delta t} \arccos\left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon[n]}}{2} \right\}, \quad n = \frac{K-1}{2}, \dots, N - \frac{K+1}{2}.$$

Здесь  $\Delta t$  – временной интервал дискретизации,  $K$  – длина окна, по которому вычисляется оценка частоты,  $N$  – общее число отсчетов выборки сигнала.

## 2) Метод Прони

Модифицированный метод Прони [24] часто применяется для обработки дискретизированных сигналов, но при обработке сигнала затухания свободной индукции имеет ряд недостатков. Сигнал свободной индукции в магнитных полях сильной неоднородности затухает не экспоненциально. В ряде случаев сигнал релаксации может описываться моделью [21]

$$x(t) = a(t) \sin[\theta(t)] \operatorname{sinc}(\psi t), \quad (1.4)$$

где  $\psi$  – безразмерная величина, зависящая от неоднородности магнитного поля.

Количество параметров, необходимое для описания сигнала (1.1) с наименьшей ошибкой модифицированным методом Прони, возрастает с увеличением  $\psi$ , поэтому в полях сильной неоднородности данный метод использовать неэффективно.

## 3) Метод периодомера

Метод периодомера заключается в подсчете пересечений нуля сигналом и последующем определении его частоты по среднему времени между соседними

пересечениями сигналом нуля [25]. Для дискретизированных сигналов пересечением нуля считается смена знака между отсчетами сигнала. Для увеличения точности работы данного метода применялась линейная аппроксимация сигнала между двумя точками с разными знаками. Пусть есть два отсчета сигнала  $x[n]$  и  $x[n+1]$ , таких что  $x[n]x[n+1] < 0$ , в таком случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} An + B &= x[n], \\ A(n+1) + B &= x[n+1]. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  и  $B$  – коэффициенты линейной аппроксимации сигнала между его отсчетами, тогда пересечением сигналом нуля будем считать такое  $n < m < n + 1$ , для которого выполняется  $Am + B = 0$ , и время пересечения сигналом нуля  $t' = m/f_d$ , где  $f_d$  – частота дискретизации сигнала. Таким образом, частота, оцениваемая методом периодомера:

$$\omega = \frac{1}{2I} \sum_{i=0}^I \frac{1}{t'_i},$$

где  $t'_i$  – время между двумя соседними пересечениями нуля,  $I$  – общее количество пересечений нуля.

Метод периодомера имеет ряд недостатков, среди которых неточность работы на коротких выборках, высокие требования к отношению сигнал/шум и неточность в полях высокой неоднородности, когда сигнал свободной индукции может затухать очень быстро [25].

## 1.2 Холловская магнитометрия

Эффект Холла является одним из основных гальваномагнитных эффектов, используемых в технике и нашедшим широкое применение при серийном выпуске датчиков магнитного поля [26]. Он состоит в возникновении разности потенциалов в направлении, перпендикулярном направлению тока и вектора внешнего магнитного поля, и объясняется воздействием силы Лоренца  $\mathbf{F}$  на носители заряда  $q$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$  [27]:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.5)$$

В линейном случае выражение для компонент  $\sigma_{ml}$  тензора проводимости в магнитном поле  $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$  имеет вид [28]:

$$\sigma_{lk} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (\omega_c \tau)^2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\omega_c = qB/m$  – циклотронная частота электрона в поле  $B$ ,  $\sigma_0$  – сопротивление в нулевом магнитном поле,  $\tau$  – характерное время свободного пробега зарядов,  $m$  – эффективная масса носителей заряда. Диагональные компоненты (1.6) описывают явление магнитосопротивления (п. 1.1.2) [29], недиагональные компоненты – эффект Холла. Формула (1.6) является следствием кинетического подхода к рассмотрению эффектов переноса в исследуемой гальваномагнитной среде [30].

Из уравнения (1.6) видно, что в малых полях, когда  $\omega_c \tau \ll 1$ , недиагональные элементы  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yx}$  матрицы проводимости пропорциональны величине  $\tau \omega_c = \tau q B / m = v B$ , где  $v = \tau q / m$  – подвижность зарядов, которая определяется материалом среды.

Первичные преобразователи на эффекте Холла часто используются в магнитометрах различного применения [26]. Они представляют собой четырехполюсник, с двумя парами контактов (Рисунок 1.1): токовые и потенциальные.

Первые предназначены для подключения к ним источника тока или напряжения, устанавливающего ток через преобразователь. Вторые используются для измерения напряжения Холла. Пусть для бруска с размерами  $a \times b \times c$  по координатам  $x, y, z$  соответственно, через токовые контакты которого в направлении  $Ox$  течет ток  $I$ :

$$j_y = \sigma_{yx} \frac{I}{bc \sigma_0} = \frac{I \tau q B}{bc \sigma_0 m}.$$

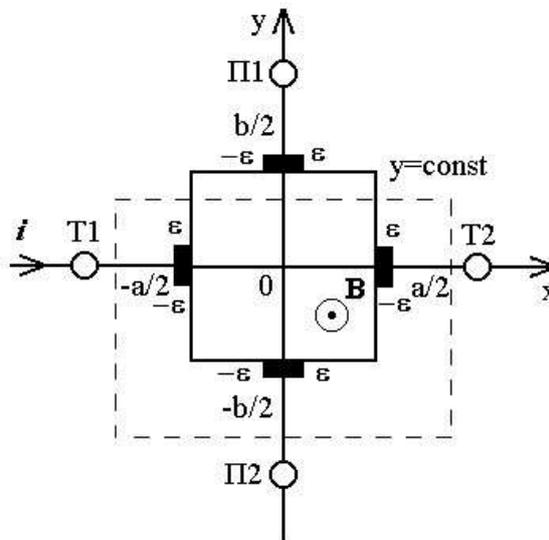


Рисунок 1.1 – Датчик Холла прямоугольной формы: Т1, Т2 – токовые контакты, П1, П2 – потенциальные (холловские) контакты [31]

Если входное сопротивление вольтметра, подключенного к холловским контактам достаточно велико, то ток будет приводить к возникновению разности потенциалов между потенциальными контактами:

$$U_H = \frac{v}{c\sigma_0^2} IB = K_H IB, \text{ где } K_H = \frac{1}{cn^2 q^2 v}. \quad (1.7)$$

Способ использования холловского преобразователя, когда ток пропускается поочередно через различные контакты, описан в п. 1.2.2.

Для проведения измерений в неоднородном магнитном поле наиболее перспективным является преобразователи Холла. Это связано с тем, что в отличие от магниторезисторов, они чувствительны к проекции вектора индукции измеряемого магнитного поля. Преобразователи Холла, в отличие от феррозондов, слабо влияют друг на друга и могут быть расположены достаточно близко для создания векторных датчиков магнитного поля. Еще одним преимуществом холловских преобразователей является высокая линейность по магнитному полю вплоть до единиц Тл и отсутствие гистерезиса функции преобразования.

### 1.2.1 Источники основных погрешностей холловских магнитометров

Для достижения максимальной чувствительности согласно формуле (1.7) требуется уменьшить концентрацию носителей заряда и толщину преобразователя. При этом сопротивление преобразователя не должно оказаться слишком большим для протекания тока и не вызывающее значительный тепловой шум. Таким сочетанием характеристик обладают полупроводниковые тонкопленочные преобразователи [32].

Холловские преобразователи изготавливаются таким образом, чтобы ток, текущий через токовые контакты, создавал минимальное напряжение на потенциальных контактах при нулевом значении внешнего магнитного поля. Коэффициент пропорциональности тока и измеряемого в нулевом внешнем магнитном поле на потенциальных контактах напряжения называется сопротивлением небаланса  $R_U$ .

Главным недостатком использования полупроводников является сильная зависимость (сложного немоного характера) подвижности от температуры [33], что приводит к мультипликативной температурной погрешности измерения. Она проявляется при больших значениях поля, но может быть оценена путем добавления в конструкцию магнитометра эталонной токовой катушки, по которой периодически протекает заданный калибровочный ток [34].

Еще одним источником температурной погрешности является возникающая на контактах преобразователей термоэдс [35], пропорциональная градиенту температуры. Ее причиной является неравномерное тепловыделение в преобразователе при протекании тока, обусловленное джоулевым теплом и теплом Пельтье. Несмотря на миниатюрный размер преобразователей ( $10^{-3} \dots 10^{-6}$  м), величина этой термоэдс может быть существенной, поскольку полупроводники обладают большим значением коэффициента Зеебека на медь. К примеру, для InSb он составляет порядка 200 мкВ/К и градиента в несколько десятых градуса достаточно для возникновения термоэдс в десятки мкВ. Описанные

термоэлектрические явления приводят к появлению аддитивной температурной погрешности, составляющей для ПХЭ602117 [36] несколько мкВ на К, что соответствует нескольким единицам мкТл на К и ограничивает точность измерения полей порядка геомагнитного.

Компенсация аддитивной температурной погрешности требует калибровки в нулевом поле и не может быть осуществлена в портативном приборе. Существуют методы компенсации температурной зависимости при помощи использования внешнего термодатчика с проведением температурной калибровки [37]. Однако такой способ не универсален, поскольку неустойчив к быстрому изменению внешней температуры, когда реальная температура преобразователя отличается от измеренной термодатчиком.

Для повышения чувствительности следует увеличивать пропускаемый через преобразователь ток. Это увеличивает температурные погрешности и приводит к возникновению квадратичной нелинейности преобразователя. Она объясняется магнитным самовоздействием тока, хорошо известным в физике плазмы как пинч-эффект [38].

### 1.2.2 Четырехтактный алгоритм коммутации тока преобразователя Холла

Известный в зарубежной литературе также как метод вращающегося тока («spinning current algorithm») [39], четырехтактный алгоритм позволяет компенсировать погрешности, вызванные термоэдс и сопротивлением небаланса (Рисунок 1.2). Алгоритм обосновывается взаимностью преобразователя как пассивного линейного четырехполюсника, что следует из более общих соотношений для любых линейных систем – теоремы Онзагера [40]. Производство Энтропии для четырехполюсника с потенциалами контактов  $\phi_m$ , через которые течет ток  $i_m$  имеет вид:

$$\frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M \phi_m i_m = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M X_m J_m.$$

Откуда сопоставляя  $\varphi_m$  с термодинамическим потоком  $J_m$ , а  $i_m$  с термодинамической силой, получаем, что матрица сопротивлений линейного четырехполюсника удовлетворяет теореме Онзагера:

$$\varphi_l = \sum_{m=1}^M R_{lm} i_m \text{ и } R_{lm}(\mathbf{B}) = R_{ml}(-\mathbf{B}). \quad (1.8)$$

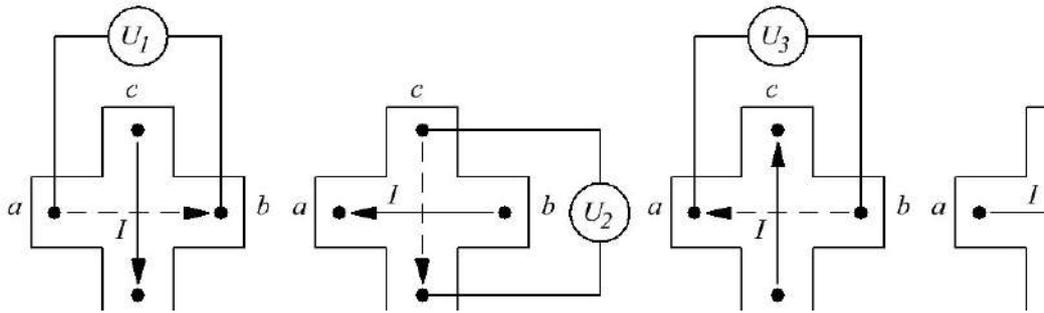


Рисунок 1.2 – Четырехтактный алгоритм: сплошной линией показано направление тока, пунктирной – направление тока на предыдущем такте

Из (1.7) и (1.8) видно, что для рассматриваемого случая справедливо также и  $R_{lm}(\mathbf{B}) = R_{ml}(-\mathbf{B}) = -R_{ml}(\mathbf{B})$ , откуда следует, что вклад в напряжение, пропорциональный магнитному полю, антисимметричен в отличие от вклада не зависящих от магнитного поля компонент. Этот результат обосновывает четырехтактный алгоритм для преобразователя Холла. Он заключается в измерении напряжений на различных парах контактов преобразователя при противоположных направлениях тока, пропускаемого через преобразователь:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_H B I + R_U I + U_{off} + U_{T1}; U_2 = K_H B I - R_U I + U_{off} + U_{T2}; \\ U_3 &= -K_H B I - R_U I + U_{off} + U_{T3}; U_4 = -K_H B I + R_U I + U_{off} + U_{T4}; \\ U_H &= (U_1 + U_2 - U_3 - U_4) / 4 = K_H B I + U_{TH}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $B$  – индукция измеряемого магнитного поля, направленного нормально к поверхности чувствительной пленки,  $I$  – ток через преобразователь,  $R_U$  – сопротивление небаланса, связанное с асимметрией преобразователя,  $U_{off}$  –

напряжение смещения измерительных цепей. Напряжения  $U_{Tk}$  характеризуют часть погрешности, связанную с термоэлектрическими эффектами, которые приводят к нескомпенсированному четырехтактным алгоритмом смещению  $U_{TH} = (U_{T1} + U_{T2} - U_{T3} - U_{T4})/4$ . Как видно из формул (1.9), линейная комбинация измеренных напряжений позволяет уменьшить влияние смещения измерительных цепей и сопротивления небаланса. Если считать распределение температурного поля в преобразователе обусловленным только выделением джоулевого тепла, то разница температур контактов преобразователя не будет зависеть от направления тока и  $U_{T1} = U_{T3}$ ,  $U_{T2} = U_{T4}$ , откуда  $U_{TH} = 0$ .

Однако на практике значение этой величины существенно больше порога чувствительности преобразователя и зависит от температуры [41]. В работе [42] показывается, что дополнительная погрешность зависит от формы преобразователя. Методы подавления этой погрешности основываются на аппаратной реализации следящих алгоритмов [2]. Результирующее смещение после применения метода в существующих магнитометрах составляет порядка 1 мкТл, что не позволяет использовать их для прецизионных измерений.

Особенностью экспериментальной техники для применения такого алгоритма являются повышенные требования к точности измерения напряжения на каждом из тактов. Это связано с тем, что оценка (1.9) состоит из разностей больших величин – сотни мкВ. При этом само напряжение Холла может составлять нескольких десятков нВ, поэтому в таких магнитометрах следует применять сигма – дельта АЦП высокой разрядности.

Преобразователи Холла обладают большой шириной полосы частот преобразуемого магнитного поля [32], но частота коммутации токов ограничивается переходными процессами измеряемого напряжения [1]. Выражения (1.9) и приведенные рассуждения справедливы только для случая, когда температура внешней среды и индукция магнитного поля меняются за время четырех тактов незначительно. Поэтому для повышения точности измерений, длительность такта  $t$

следует уменьшить, что делает вопрос увеличения быстродействия работы преобразователей в режиме коммутации токов актуальной задачей исследования преобразователей Холла.

### 1.2.3 Калибровка векторных холловских магнитометров

Чувствительность преобразователей Холла к проекции индукции магнитного поля позволяет строить на их основе векторные трехкомпонентные магнитометры [43]. В идеальном случае чувствительные оси преобразователей должны быть взаимно ортогональны, но в процессе их изготовления отклонение обычно составляет порядка одного градуса. Коммерческие трехкомпонентные датчики обладают невысокой чувствительностью и большим уровнем шумов [44, 45], поэтому небольшую ошибку, вызванную неортогональностью их расположения, при измерении в геомагнитном поле можно не учитывать.

Однако если использовать преобразователи, позволяющие добиться относительной погрешности измерений не менее  $10^{-4}$ , ошибка неортогональности начинает сказываться на погрешности измерений. Для того чтобы учесть эту ошибку, применяются различные алгоритмы калибровки [46 – 48]. Эти алгоритмы заключаются в определении компонента  $A_{im}$  калибровочной матрицы датчика  $\hat{A}$ , смещения показаний преобразователей  $U_{0i}$ , связывающих компоненты  $B_m$  вектора измеряемого магнитного поля и показания преобразователей  $U_i$ :

$$U_i = A_{im}B_m + U_{0i}, \quad (1.10)$$

где  $i$  – номер преобразователя, индексы  $i, m = \{1, 2, 3\}$ , по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование.

Осуществить такую калибровку можно, например, вращая датчик в постоянном и однородном магнитном поле. Кроме того, компоненты матрицы  $A_{im}$  и смещений  $U_{0i}$  выбираются таким образом, чтобы вектор, составленный из

показаний датчика  $U_i$ , описывал при вращении сферу с центром в начале координат [46]. При такой калибровке минимизируется функционал

$$F = \sum_k \left( \sum_i \left( A_{im}^{-1} (U_i^{(k)} - U_{0i}) \right)^2 - B^2 \right)^2. \quad (1.11)$$

При решении задачи минимизации функционала (1.11), возникает нелинейная система уравнений, которая имеет не единственное решение [47].

Для того чтобы обеспечить единственность значений компонент матрицы  $A_{im}$  и смещений  $U_{0i}$  используется ещё один вектор физического поля. Для этого часто используют вектор ускорения свободного падения [48]. В этом случае вместе с датчиком магнитометра применяется трехкомпонентный акселерометр. Задается система координат, связанная с акселерометрами, и последние калибруются исходя из условия постоянства модуля ускорения свободного падения. Далее из условия постоянства скалярного произведения вектора ускорения свободного падения и вектора магнитного поля находится матрица перехода из системы координат, в которой откалиброван магнитометр, в систему координат, связанную с акселерометрами.

В формуле (1.11) присутствует значение модуля геомагнитного поля, которое можно определить только с использованием дополнительного геомагнитометра. Для предпочтительно использовать квантовый магнитометр, обладающий наибольшей точностью и чувствительностью. Одним из самых простых для реализации и нашедший наиболее широкое применение является протонный релаксационный магнитометр. Принцип работы и существующие методы обработки его сигнала подробно рассмотрены в п. 1.1.3.

### 1.2.4 Системная функция преобразователя Холла

В простейшем случае преобразование сигнала описывается линейным алгебраическим соотношением, линейный коэффициент которого определяет

крутизну преобразования, а свободный коэффициент – уровень показаний нуля. Однако в общем случае уравнение вход-выход измерительного преобразователя описывается нелинейным интегральным преобразованием, которое может быть записано в виде ряда Вольтера [49] с ядрами, зависящим как от времени, так и координат. В линейном приближении остается только первое слагаемое, и его ядро имеет смысл импульсной характеристики системы или системной (аппаратной) функции преобразователя [50]. В современной радиотехнике метод системных функций используется для оптимизации сигнальных характеристик радиосистем, в частности используется редукция за аппаратную функцию для компенсации возникающих искажений сигнала [31].

В работе [31] для тонкопленочного прямоугольного преобразователя (Рисунок 1.1) решением уравнения Лапласа с краевыми условиями второго рода было получено выражение для системной функции преобразователя Холла.

Выражение для напряжения Холла в зависимости от положения преобразователя в пространстве имеет вид:

$$u_H(x, y) = \frac{iK_H}{S} \iint_S r(x', y') B_n(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (1.12)$$

Здесь  $S$  – площадь преобразователя,  $i$  – ток через преобразователь,  $r(x, y)$  – аппаратная функция преобразователя,  $B_n(x, y)$  – компонента магнитного поля, нормальная к поверхности преобразователя.

Авторы [31] утверждают, что системная функция может быть вычислена через плотность холловского тока  $\mathbf{j}_H$ , возникающего под действием внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{j}_H = \frac{\sigma[\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}]}{en}. \quad (1.13)$$

Здесь  $\mathbf{j}_0$  – плотность тока через преобразователь в отсутствие магнитного поля,  $e$  – заряд электрона,  $n$  – концентрация носителей заряда,  $\sigma$  – удельное сопротивление среды. Полное выражение для этой функции имеет вид:

$$r(x, y) = \frac{S \int_{-a/2}^{a/2} \frac{j_{Hy}(x, y) dx}{f(x)}}{-a/2} j_{0x}(x, y), \quad (1.14)$$

где

$$f(x) = \frac{\int_{-a/2}^{b/2} j_{Hy}(x, y) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} j_{Hy}(0, y) dy}.$$

Выражение (1.14) справедливо только для прямоугольного преобразователя, а способ его вычисления не позволяет разделить воздействия внешнего магнитного поля и поля, создаваемого током через преобразователь. Это ограничивает его применение в реальных задачах и требует дополнительного исследования.

### 1.3 Источники магнитного поля

#### 1.3.1 Постановка прямой и обратной магнитостатических задач

В простейшем случае прямая магнитостатическая задача состоит в нахождении индукции магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  вне образца  $D$  по заданной намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  внутри него. Ее решение записывается в виде интегральной свертки в одном из эквивалентных видов [51, 52]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}') d^3 r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} M_n(\mathbf{r}') ds', \quad (1.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \left\{ \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r'. \quad (1.16)$$

На практике намагниченность в выражениях (1.15, 1.16) известна только в случае, если образец находится в состоянии технического насыщения. В других ситуациях намагниченность каждого физически малого объема зависит от внешнего по отношению к нему магнитного поля, т.е. суммы полей, создаваемых источниками

вне образца и поля других частей этого образца. Параметры зависимости намагниченности от внешнего поля, являющейся материальным уравнением ферромагнитной среды, определяются кристаллической решёткой, а их нестабильность – температурой, механическими напряжениями. Гистерезис этой зависимости приводит к невозможности найти намагниченность ферромагнетика в заданном внешнем поле.

Вопрос о материальном уравнении для ферромагнетика является сложной задачей физики твёрдого тела [53]. Несмотря на наличие большого числа эмпирических моделей [54] и успехов в моделировании поведения отдельных спинов [55], оно, на масштабе макроскопических тел, достоверно только для частных случаев.

Обратная задача магнитостатики сводится к оценке формы тела или его магнитных характеристик по измеренному полю в некоторой ограниченной области пространства вне тела, например, на его внешней поверхности. В этом случае в уравнении (1.15) искомой величиной является намагниченность, а известным – распределение индукции магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Уравнение (1.15) становится некорректным интегральным уравнением для намагниченности, так как под знак дивергенции в первом интеграле можно добавить функцию, являющуюся ротором произвольного дифференцируемого векторного поля [56]. От этого левая часть не изменится, а значит решение (1.15) относительно вектора  $\mathbf{M}$  не единственно.

Таким образом, проблема измерения характеристик источников поля внутри тела не может быть решена по измерениям только внешнего поля. Поэтому любая обратная задача должна быть поставлена настолько определённно, чтобы исключить возможность физически разных распределений источников поля. Например, если при решении задачи о шаре априорно задать функцию распределения плотности заряда, по измерениям внешнего поля можно однозначно вычислить радиус шара. Если задать радиус шара и функцию распределения заряда с точностью до одного неизвестного параметра, по измерению внешнего поля можно найти этот параметр.

### 1.3.2 Задачи измерения плоского распределения источников магнитного поля

Рассмотрим задачу исследования образцов намагниченных пленок. Магнитная индукция вне образца  $D$  связана с его намагниченностью интегральным соотношением (1.16). Для корректного решения задачи необходима априорная информация об источниках намагниченности. Так, для тонких пленок, намагниченность  $M(x, y)$  которых направлена перпендикулярно поверхности и однородна по толщине пленки, формула (1.16) для нормальной компоненты магнитной индукции принимает вид:

$$B_z(x, y) = \frac{\mu_0 d}{4\pi z^3} \iint_S M(x', y') W\left(\frac{x-x'}{z(x, y)}, \frac{y-y'}{z(x, y)}\right) dx' dy', \quad (1.17)$$

где  $d$  – малая толщина образца,  $S$  – поверхность образца, совпадающая с плоскостью  $Oxy$ ,

$$W(u, v) = \frac{2 - u^2 - v^2}{(1 + u^2 + v^2)^{5/2}} \quad (1.18)$$

интегральное ядро уравнения (1.17),  $z(x, y)$  – расстояние от точки измерения магнитной индукции до поверхности образца.

Задачу (1.18) можно решить спектральным методом:

$$M(x, y) = \frac{4\pi}{\mu_0 dz^3(x, y)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(p, q)}{w(p, q)} \exp(ipx + iqy) dp dq, \quad (1.19)$$

где

$$w(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x', y') \exp(ipx' + iqy') dx' dy' \quad (1.20)$$

$$b(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(x, y) \exp(ipx + iqy) dx dy, \quad (1.21)$$

спектры интегрального ядра (1.18) и распределения измеренной нормальной компоненты магнитной индукции  $B_z$ . Фурье-преобразование (1.21) можно найти

численным интегрированием. График абсолютного значения спектра (1.20) интегрального ядра (1.18) как функция переменной  $zk$  приведена на Рисунке 1.3. Здесь вследствие симметричности ядра (1.18), для удобства введена величина  $k = \sqrt{p^2 + q^2}$ , соответствующая радиальной пространственной частоте.

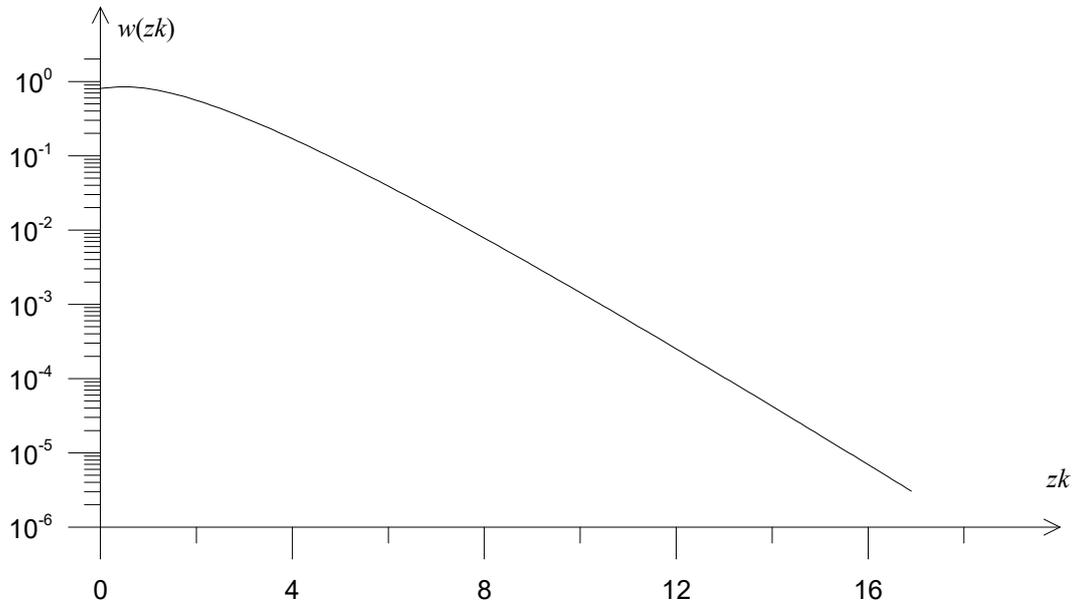


Рисунок 1.3 – График спектра интегрального ядра в логарифмическом масштабе

Этот спектр не имеет нулей, поэтому подынтегральное выражение (1.19) не имеет особенностей, и распределение намагниченности можно найти численным интегрированием. Таким образом, при отсутствии шумов и вычислительных ошибок пространственное разрешение магнитного микроскопа с редукцией за аппаратную функцию может быть сколь угодно велико.

Однако, знаменатель подынтегрального выражения (1.19) при больших значениях пространственных частот  $p$  и  $q$  мал, поэтому при наличии шумов для обеспечения устойчивости решения обратной задачи (1.18) необходимо уменьшать область интегрирования в уравнении (1.19), то есть применять пространственную фильтрацию. Кроме того, в уравнении (1.21) пределы интегрирования бесконечные.

Метод регуляризации этой задачи предложен в [57]. Он позволяет получить пространственное разрешение порядка ширины разностного интегрального ядра  $z$  (1.18).

Приведенные соображения справедливы и для задачи определения распределения токов в плоскости, поскольку уравнение (1.17) получается из уравнения Био – Савара заменой  $\mathbf{j} = -\text{rot}(\mathbf{M})$ .

### 1.3.3 Параметризация обратной магнитостатической задачи

Регуляризация, упомянутая в 1.3.2, использует априорную информацию о медленности изменения или ограниченности искомой величины [58]. Обычно данные об источниках поля представляют собой модель, связывающую вектор параметров источника с распределением создаваемого им поля. Соответствие такой модели является более сильной априорной информацией и используется для параметризации обратной задачи. При этом непрерывное искомое поле источников, в случае магнитостатики – поле токов или намагниченности – заменяется моделью системы, содержащей значительно меньше неизвестных – параметров. Выбор моделей и входящих в них параметров является сложной математической задачей, поскольку важно, чтобы модель, во-первых, достаточно точно описывала исследуемую физическую систему и, во-вторых, не содержала взаимозависимых или лишних параметров.

В качестве моделей магнитных объектов наиболее часто используют мультипольное разложение [59]. К примеру, такими моделями можно описать намагниченность корпуса корабля [60]. Такое разложение заключается в замене намагниченности объекта на совокупность мультиполей, положение и величина которых являются параметрами модели. В качестве методов предварительного анализа магнитограмм используются детекторы магнитных аномалий, позволяющие выделять полезный сигнал магнитного диполя из показаний трехкомпонентного магнитометра [61, 62].

Для модели магнитных объектов можно определить предельную точность определения параметров при известных шумах магнитометра, воспользовавшись известным критерием Рао – Крамера [63]. Этот критерий определяет нижний порог дисперсии оценок параметров при известном уровне дисперсии исходных данных  $\sigma_H$ :

$$\sigma_{\xi}^2 \geq I_{\xi\xi}^{-1}. \quad (1.22)$$

Здесь  $\xi, \psi$  – параметры модели,  $I_{\xi\psi}$  – элементы информационной матрицы Фишера [63], вычисляемой исходя из используемой модели системы:

$$I_{\xi\psi} = \left\langle \sum_{k=1}^K \frac{\partial F(\xi, \dots, \psi, \dots, \mathbf{x}[k])}{\partial \xi} \frac{\partial F(\xi, \dots, \psi, \dots, \mathbf{x}[k])}{\partial \psi} \right\rangle, \quad (1.23)$$

где  $F(\xi, \dots, \psi, \dots, \mathbf{x}[k])$  – функция модели, по которой рассчитываются модельные значения измеряемых величин,  $\mathbf{x}[k]$  – вектор пространственных координат, отличающий точки, в которых были проведены измерения.

#### 1.4 Постановка задач и выбор методов исследования

Основным недостатком преобразователей Холла является высокий уровень дополнительной и температурной погрешности, которые не позволяют производить прецизионные измерения полей порядка геомагнитного. Методы ее компенсации используют линейную модель преобразователя Холла, которая несправедлива при больших токах, обеспечивающих высокую чувствительность преобразователя. Вопрос использования такого метода компенсации, основанного на соотношениях взаимности, в нелинейном и нестационарном режиме требует исследования и доработки.

Для задачи магнитной микроскопии существуют преобразователи с активной зоной субмикронного размера [64]. Их недостатком является малая чувствительность или большой уровень шумов, поэтому необходимо

проанализировать возможность использования высокочувствительных преобразователей Холла с большей активной зоной в неоднородном поле.

Задача определения параметров источников магнитного поля кроме точно измеренных распределений поля требует также применение регуляризованного метода решения обратной задачи магнитостатики. Проанализированный в п 1.3.3 параметрический подход к ее решению требует разработку моделей для его использования и анализа их справедливости на численных примерах.

Основными объектами исследования магнитной микроскопии, для которых требуется построить модели, являются распределения токов и намагниченности тел. И если для токов прямая задача сводится к простому интегрированию, то для намагниченных и, в особенности, для ферромагнетиков описывается нелинейными и неоднозначными зависимостями. Разработка модели ферромагнетика требует проведения теоретического исследования и верификации этих моделей в численных и натуральных экспериментах.

## **ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ, ВЛИЯЮЩИХ НА ТОЧНОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ИЗМЕРЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ ХОЛЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ**

Точность измерений магнитного поля преобразователями Холла ограничивается большой дополнительной погрешностью, связанной с его асимметрией, термоэдс контактов, вызванной разогревом пленки протекающим током, нелинейностью ВАХ. Четырехтактный алгоритм коммутации токов позволяет компенсировать часть перечисленных погрешностей, практически подавить фликер-шум измерительных цепей, снизить зависимость показаний преобразователя от температуры [39]. Однако для измерений в геомагнитном поле дополнительная ошибка в несколько мкТл является недопустимой, в связи с чем требуется более подробно исследовать причины возникновения такой дополнительной погрешности.

Увеличение быстродействия магнитометров требует осуществлять коммутацию токов через преобразователь с малым временем выдержки тока через одну пару контактов. Это приводит к тому, что преобразователь находится в нестационарных условиях и процессы, происходящие при этом, требуют дополнительного изучения.

Измерения в неоднородном магнитном поле, где значение поля меняется больше чем на величину порога чувствительности магнитометра на масштабах активной зоны преобразователя, приводят к погрешности усреднения измеряемого распределения. Для изучения характера этой погрешности требуется теоретически и экспериментально исследовать работу преобразователя Холла в неоднородном магнитном поле.

Для методов компенсации погрешностей, основанных на переключении тока через различные контакты преобразователя, требуется найти соотношения симметрии для электрических характеристик нелинейного преобразователя Холла, в условиях нестационарности.

## 2.1 Соотношения взаимности для нелинейной проводимости гальваномагнитной среды

Воспользуемся подходом, предложенным в работе [65]. Процессы переноса в релаксационном приближении описываются кинетическим уравнением Больцмана, которое для среды, находящейся в электрическом и магнитном полях, принимает вид уравнения Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (2.1)$$

Здесь  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  – функция распределения носителей заряда (электронов или дырок),  $f_0$  – равновесная функция распределения,  $q$  – заряд носителя,  $\tau$  – среднее по ансамблю время релаксации,  $\mathbf{v}$  – скорость движения зарядов. Для стационарной, однородной и изотропной среды будем искать решение уравнения (2.1) в виде  $f(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})f_0(\mathbf{p})$ ,

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3} m^3 v_T^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right), \quad (2.2)$$

где  $m$  – эффективная масса носителей заряда  $q$ ,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура носителей заряда,  $v_T = \sqrt{kT/m}$  – тепловая скорость носителей заряда  $q$ . Тогда

$$(m\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{B}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\mathbf{p}\mathbf{E}}{kT} - \frac{1}{v}\right) F + \frac{1}{v}, \quad (2.3)$$

где  $v = q\tau/m$  – подвижность носителей заряда  $q$ .

Перейдем к новым переменным. Рассмотрим случай, когда магнитное и электрическое поля постоянные, однородные, не сонаправлены и отличны от нуля. Пусть

$$\xi_1 = \frac{\mathbf{p}\mathbf{E}}{mv_T E_C}, \quad \xi_2 = \frac{\mathbf{p}\mathbf{B}}{mv_T B_C}, \quad \xi_3 = \frac{p^2}{m^2 v_T^2}, \quad (2.4)$$

где  $B_C = 1/v$ ,  $E_C = \varphi_T/l_T = B_C v_T$ ,  $l_T = v_T \tau$  – длина свободного пробега в проводниках,  $v_T = \sqrt{kT/m}$  – тепловая скорость носителей заряда,  $\varphi_T = kT/q$  – тепловой потенциал.

Выразим импульс как функцию полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а также переменных (2.4). Для этого разложим вектор импульса по векторам  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \times \mathbf{E}$ :

$$\mathbf{p} = A_1 \mathbf{E} + A_2 \mathbf{B} + A_3 \mathbf{B} \times \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

где  $A_i$  – скалярные величины. Умножая уравнения (2.4) скалярно на векторы на  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \times \mathbf{E}$ , получим систему уравнений относительно  $A_i$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \frac{E^2}{mv_T E_C} + A_2 \frac{\mathbf{B}\mathbf{E}}{mv_T E_C}; \\ \xi_2 &= A_1 \frac{\mathbf{B}\mathbf{E}}{mv_T B_C} + \frac{A_2 B^2}{mv_T B_C}; \\ \xi_3 &= \frac{p^2}{m^2 v_T^2} = A_1^2 \frac{E^2}{m^2 v_T^2} + A_2^2 \frac{B^2}{m^2 v_T^2} + A_3^2 \frac{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2}{m^2 v_T^2} + 2A_1 A_2 \frac{\mathbf{B}\mathbf{E}}{m^2 v_T^2}. \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений позволяет определить коэффициенты разложения  $A_i$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= mv_T \frac{B^2 E_C \xi_1 - \mathbf{E}\mathbf{B} B_C \xi_2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \mathbf{E} + mv_T \frac{E^2 B_C \xi_2 - \mathbf{E}\mathbf{B} E_C \xi_1}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \mathbf{B} + \\ &+ mv_T \frac{\sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_2 B_C \mathbf{E} + \xi_1 E_C \mathbf{B})^2}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} [\mathbf{B} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Преобразования (2.4) – (2.5) взаимно однозначны в области  $V$

$$(\xi_2 B_C \mathbf{E} + \xi_1 E_C \mathbf{B})^2 \leq \xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 \quad (2.7)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{E}}{mv_T E_C} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{B}}{mv_T B_C} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \frac{2\mathbf{p}}{m^2 v_T^2} \frac{\partial F}{\partial \xi_3}. \quad (2.8)$$

Тогда уравнение (2.3) преобразуется к виду:

$$\left( \frac{E^2}{E_C^2} + \frac{\sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_2 B_C \mathbf{E} + \xi_1 E_C \mathbf{B})^2}}{E_C B_C} \right) \frac{\partial F}{\partial \xi_1} +$$

$$+ \frac{\mathbf{E} \mathbf{B}}{E_C B_C} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + 2 \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = (\xi_1 - 1) F + 1. \quad (2.9)$$

Дополнительное условие к уравнению (2.9) можно получить из физических соображений. В отсутствии электрического поля  $\xi_1 = 0$ , а функция распределения электронов по импульсам определяется только магнитным полем. Для изотропной среды эта функция не должна зависеть от направления магнитного поля, то есть  $f(\mathbf{p}, \mathbf{E} = 0, -\mathbf{B}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B})$ . Поскольку функция распределения является скаляром, она может зависеть только от скалярных аргументов. В нулевом электрическом поле такими скалярами являются  $p^2$  и  $\mathbf{p} \mathbf{B}$ . Поэтому с учетом соотношений (2.4)

$$F(0, \xi_2, \xi_3 \geq 0) = \Phi(\xi_2, \xi_3), \quad (2.10)$$

где  $\Phi(\xi_2, \xi_3)$  – заданная (известная) функция.

Уравнение в частных производных первого порядка (2.9) с дополнительным условием (2.10) имеет единственное решение в области  $V$  (2.7) [66, 67]. Заметим, что в уравнении (2.4) переменные  $\xi_1, \xi_2$  линейно зависят от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , но в уравнении (2.9) они рассматриваются как независимые переменные, через которые выражаются по формулам (2.6) компоненты импульса  $\mathbf{p}$ . Поэтому при изменении знака полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  переменные  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  в уравнениях (2.9) и (2.10) не меняются, и  $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ ,  $\Phi(\xi_2, \xi_3, -\mathbf{B}) = \Phi(\xi_2, \xi_3, \mathbf{B})$ . Из уравнения (2.5) следует, что

$$p^2 = m^2 v_T^2 \frac{(B^2 E_C \xi_1 - \mathbf{E} \mathbf{B} B_C \xi_2)^2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^4} E^2 + m^2 v_T^2 \frac{(E^2 B_C \xi_2 - \mathbf{E} \mathbf{B} E_C \xi_1)^2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^4} B^2 +$$

$$+ m^2 v_T^2 \frac{(B^2 E_C \xi_1 / B_C - \mathbf{E} \mathbf{B} \xi_2)(E^2 B_C \xi_2 / E_C - \mathbf{E} \mathbf{B} \xi_1)}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^4} (\mathbf{E} \mathbf{B})^2 + \quad (2.11)$$

$$+ m^2 v_T^2 \frac{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - |\xi_2 B_C \mathbf{E} + \xi_1 E_C \mathbf{B}|^2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2}.$$

Из уравнений (2.2) и (2.11) следует, что

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})}{m^3 v_T^3},$$

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Соответственно,

$$f(\mathbf{p}) = \frac{f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})}{m^3 v_T^3},$$

где  $f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  и

$$f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}). \quad (2.12)$$

Кроме того, хотя при изменении знака полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  изменяются компоненты импульса  $\mathbf{p}$ , якобиан  $V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  преобразования (2.6) не меняется. Действительно, с учетом формулы (2.3) получаем:

$$\begin{aligned} V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \left( \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} \right)^{-1} = \\ &= m^2 k^2 T^2 E_C B_C \left\{ \det \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ 2p_1 & 2p_2 & 2p_3 \end{pmatrix} \right\}^{-1} = \\ &= \frac{m^4 v_T^4 E_C B_C}{2\mathbf{p} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{E}]} = \frac{m^3 v_T^3 E_C B_C}{2\sqrt{\xi_3} |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_2 B_C \mathbf{E} + \xi_1 E_C \mathbf{B})^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Тогда для полного тока с учетом формулы (2.6) и обозначения  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  получим выражение

$$\begin{aligned}
j_i &= \iiint \frac{nq p_i}{m} f(\mathbf{p}) d^3 p = \frac{nq E_i}{m^3 v_T^2 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \left\{ B^2 E_C \xi_1 - \mathbf{E} \mathbf{B} B_C \xi_2 \right\} f_2(\xi) |V(\xi)| d^3 \xi + \\
&+ \frac{nq B_i}{m^3 v_T^2 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \left\{ E^2 B_C \xi_2 - \mathbf{E} \mathbf{B} E_C \xi_1 \right\} f_2(\xi) |V(\xi)| d^3 \xi + \\
&+ \frac{nq \varepsilon_{ijk} E_j B_k}{m^3 v_T^2 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_1 B_C \mathbf{E} + \xi_2 E_C \mathbf{B})^2} f_2(\xi) |V(\xi)| d^3 \xi = \\
&= K_1 B^2 E_i - K_2 B_j E_i E_j + K_2 B_i E_j E_j - K_1 B_i B_j E_j + K_3 \varepsilon_{ijk} B_k E_j,
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  – единичный антисимметричный тензор (символ Леви – Чивиты),

$$\begin{aligned}
K_1(E, B, \mathbf{E} \mathbf{B}) &= \frac{nq E_C^3}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \frac{\xi_1 f_2(\xi) d^3 \xi}{\sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - |\xi_1 B_C \mathbf{E} + \xi_2 E_C \mathbf{B}|^2}}, \\
K_2(E, B, \mathbf{E} \mathbf{B}) &= \frac{nq E_C^2 B_C}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \frac{\xi_2 f_2(\xi) d^3 \xi}{\sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - |\xi_1 B_C \mathbf{E} + \xi_2 E_C \mathbf{B}|^2}}, \\
K_3(E, B, \mathbf{E} \mathbf{B}) &= \frac{nq E_C^2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V f_2(\xi) d^3 \xi,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Из формул (2.6), (2.10) и (2.12) следует, что  $K_i(-\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = K_i(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Таким образом, для нелинейной проводимости  $\sigma_{ij} = j_i/E_j$  получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) &= \delta_{ij} \left\{ K_1(\mathbf{E}, \mathbf{B}) B^2 - K_2(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \mathbf{E} \mathbf{B} \right\} + \\
&+ K_2(\mathbf{E}, \mathbf{B}) B_i E_j - K_1(\mathbf{E}, \mathbf{B}) B_i B_j + \varepsilon_{ijk} K_3(\mathbf{E}, \mathbf{B}) B_k.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \sigma_{ji}(-\mathbf{E}, -\mathbf{B}). \tag{2.15}$$

## 2.2 Уравнения состояния гальваномагнитного элемента в неоднородном магнитом поле

Рассмотрим обобщенную конструкцию гальваномагнитного элемента (Рисунок 2.1) в виде объемного многополюсника  $D$  с  $M$  контактами ( $S_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ).

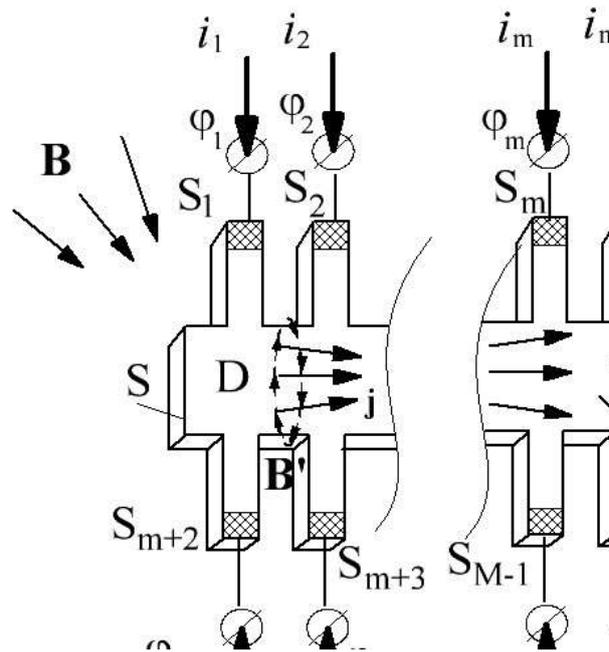


Рисунок 2.1 – Структура гальваномагнитного элемента [68]

Закон Ома для изотропного проводника в магнитном поле имеет вид

$$j_i = \sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{B})E_j, \quad (2.16)$$

причем для тензора квазилинейной проводимости (2.14) выполняется условие взаимности (2.15)  $\sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \sigma_{ji}(-\mathbf{E}, -\mathbf{B})$ , где  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}'$  – полная индукция магнитного поля в проводнике,  $\mathbf{B}_e$  – поле, созданное внешними источниками,  $\mathbf{B}'$  – поле токов, текущих через магнитоактивный элемент.

Из уравнения (2.16) и уравнений магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_e = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial r_j} \right) = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial r_k} + \mu_0 \sigma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial r_j}. \quad (2.17)$$

Пусть в область  $D$ , ограниченную поверхностью  $S$ , через соответствующие контактные поверхности  $S_m$  втекают токи  $i_m$ . Условие для нормальной компоненты плотности тока на границе  $S$  имеет вид:

$$j_n|_S = - \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

где  $f_m(\mathbf{r})$  – функция-носитель поверхности  $S_m$ :

$$\begin{cases} \oint_{S_m} f_m(\mathbf{r}) ds = 1; \\ f_m(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \notin S_m. \end{cases} \quad (2.19)$$

Из первого уравнения (2.17) в этом случае следует, что распределение потенциала является решением внутренней смешанной задачи, когда на границе области задана линейная комбинация нормальной и тангенциальной производных потенциала

$$\sigma_{ij} n_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_S = \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

где  $n_i$  – компоненты внешней нормали  $\mathbf{n}$  поверхности  $S$ .

Примем за ноль средний по поверхности  $S$  тела  $D$  потенциал и будем искать совместное решение уравнений (2.17) с граничными условиями (2.20) методом последовательных приближений. В линейном приближении закон Ома для изотропного проводника в магнитном поле имеет вид  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\sigma}{qn} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ , где  $\sigma$  – проводимость,  $n$  – концентрация носителей заряда  $q$ . Его можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -vB_z & vB_y \\ vB_z & 1 & -vB_x \\ -vB_y & vB_x & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\sigma}{qn};$$

и разрешить относительно плотности тока в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 + (\mathbf{v}\mathbf{B})^2} \begin{pmatrix} 1 + v^2 B_x^2 & -vB_z - v^2 B_x B_y & vB_y + v^2 B_z B_x \\ vB_z + v^2 B_x B_y & 1 + v^2 B_y^2 & -vB_x - v^2 B_z B_y \\ -vB_y - v^2 B_z B_x & vB_x + v^2 B_z B_y & 1 + v^2 B_z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\mathbf{A}_0^{-1} + \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_2^{-1}}{1 + v^2 B^2},$$

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_1^{-1} = v \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2^{-1} = v^2 \begin{pmatrix} B_x^2 & -B_x B_y & B_z B_x \\ B_x B_y & B_y^2 & -B_z B_y \\ -B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом формул (2.8) тензор квазилинейной проводимости (2.14) можно записать в виде

$$\sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \sigma \left[ \delta_{ji} + \varepsilon_{ijk} b_k + \alpha_{ij}(\mathbf{e}, \mathbf{b}) \right], \quad (2.21)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_c \mathbf{e}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_c \mathbf{b}(\mathbf{r})$ , причем  $\alpha_{ij}(0, 0) = 0$ ,  $|\alpha_{ij}(e \leq 1, b \leq 1)| \leq 1$  и

$$\alpha_{ij}(\mathbf{e}, \mathbf{b}) = \alpha_{ji}(-\mathbf{e}, -\mathbf{b}). \quad (2.22)$$

Положим

$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_T \psi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = B_c \mathbf{b}'(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = B_c \mathbf{b}_e(\mathbf{r})$ ,  $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \gamma \psi_1(\mathbf{r}) + \dots$ ,  
 $\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_0(\mathbf{r}) + \gamma \mathbf{e}_1(\mathbf{r}) + \dots$ ,  $\mathbf{b}'(\mathbf{r}) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) + \gamma \mathbf{b}_1(\mathbf{r}) + \dots$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) + \gamma \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \gamma \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) + \dots$ ,  
где  $\gamma = \mu_0 \sigma v \varphi_T$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $J_{0i} = \sigma \varphi_T (\delta_{ji} + \varepsilon_{ijk} b_k) e_{0i}$ ,  $J_{1i} = \varphi_T \sigma \alpha_{ij} e_{0j}$ ,  
 $J_{2i} = \gamma \sigma \varphi_T (\delta_{ji} + \varepsilon_{ijk} b_k) e_{1j}$ , и ограничимся линейным по слабому внешнему полю  $\mathbf{B}_e$   
приближением, считая, что  $|\mathbf{B}_e| \ll B_c$ . Тогда уравнения (2.17) и (2.20) эквивалентны  
цепочке краевых задач Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона

$$\Delta \psi_0 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\sigma \varphi_T} \sum_{m=1}^M j_m f_m(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}_0 = -\gamma \nabla \psi_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{b}_e = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 &= -(\nabla \psi_0)^2 - \frac{1}{\sigma \varphi_T} \nabla \mathbf{j}_1, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \Big|_S &= \frac{1}{\gamma} [\mathbf{b}_e \times \nabla \psi_0] \mathbf{n} + \frac{1}{\gamma} [\mathbf{b}_0 \times \nabla \psi_0] \mathbf{n}, \\ \mathbf{j}_1 \Big|_S &= 0, \quad \mathbf{j}_2 \Big|_S = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^0(\mathbf{r}) &= \alpha_{ij}(\mathbf{e}_0(\mathbf{r}), \mathbf{b}_0(\mathbf{r})) = \\ &= \lambda_{ijk} \frac{\partial \psi_0}{\partial r_k} + \beta_{ijk} b_{0k} + \rho_{ijkl} \frac{\partial \psi_0}{\partial r_k} \frac{\partial \psi_0}{\partial r_l} + \chi_{ijkl} \frac{\partial \psi_0}{\partial r_k} b_{0l} + \eta_{ijkl} b_{0k} b_{0l} + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из соотношений (2.22) и (2.26) следует, что

$$\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik}, \beta_{ijk} = -\beta_{jik}, \rho_{ijkl} = \rho_{jikl}, \chi_{ijkl} = \chi_{jikl}, \eta_{ijkl} = \eta_{jikl}. \quad (2.27)$$

При выполнении вытекающего из первого закона Кирхгофа условия

$$\oint_S \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}) ds = 0$$

решение краевой задачи (2.23) существует и имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r}) = - \sum_{m=1}^M \frac{i_m}{\sigma \varphi_T} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_m(\mathbf{r}') ds', \quad (2.28)$$

где  $G(\mathbf{r} \in D, \mathbf{r}' \in D)$  – вторая функция Грина для области  $D$ , ограниченной поверхностью  $S$  [69]. Поскольку поле  $\mathbf{V}'(\mathbf{r})$  создается только токами в области  $D$ , решение уравнения (2.24) имеет вид

$$b_{0i}(\mathbf{r}) = - \frac{\gamma \varepsilon_{ijk}}{4\pi} \int_D \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{r_k - r'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'. \quad (2.29)$$

Заметим, что с учетом уравнения (2.24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_S} \oint_S [(\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_0) \times \nabla \psi_0] \mathbf{n} ds &= \frac{1}{\gamma_S} \oint_S [(\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_0) \times \nabla \psi_0] ds = \frac{1}{\gamma_D} \int_D \operatorname{div} [(\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_0) \times \nabla \psi_0] d^3 r = \\ &= \frac{1}{\gamma_D} \int_D \nabla \psi_0 \operatorname{rot} \mathbf{b}_0 d^3 r + \frac{1}{\gamma_D} \int_D \nabla \psi_0 \operatorname{rot} \mathbf{b}_e d^3 r - \frac{1}{\gamma_D} \int_D (\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_0) \operatorname{rot} \nabla \psi_0 d^3 r = - \int_D (\nabla \psi_0)^2 d^3 r. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом третьего уравнения системы (2.25) условие разрешимости краевой задачи (2.25) выполняется, и ее решение имеет вид [69]

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}) = & \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right)^2 d^3 r' + \frac{1}{\sigma \varphi_T} \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}_1(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} d^3 r' + \\ & + \frac{1}{\gamma} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' + \frac{1}{\gamma} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_e(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части формулы (2.30) с учетом третьего уравнения системы (2.25) и формулы (2.26):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma \varphi_T} \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}_1(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} d^3 r' &= \frac{1}{\sigma \varphi_T} \int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}_1(\mathbf{r}')] d^3 r' - \frac{1}{\sigma \varphi_T} \int_D \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} d^3 r' = \\ &= \frac{1}{\sigma \varphi_T} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') ds' + \int_D \alpha_{ij}^0(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} d^3 r' = \\ &+ \lambda_{ijk} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_k} d^3 r' + \beta_{ijk} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} b_{0k} d^3 r' + \\ &+ \rho_{ijkl} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_k} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_l} d^3 r' + \\ &+ \chi_{ijkl} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_k} b_{0l}(\mathbf{r}') d^3 r' + \eta_{ijkl} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} b_{0k}(\mathbf{r}') b_{0l}(\mathbf{r}') d^3 r'. \end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое в правой части формулы (2.30) с учетом уравнения (2.25):

$$\begin{aligned} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' &= \int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] \right\} d^3 r' = \\ &= \int_D \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} d^3 r' + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' = \\ &= \int_D \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' - \gamma \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right]^2 d^3 r'. \end{aligned}$$

Для четвертого слагаемого, соответственно, получаем:

$$\oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_e(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' = \int_D \mathbf{b}_e(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r'.$$

Таким образом, с учетом формул (2.26) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) = & - \sum_{m=1}^M \frac{i_m}{\sigma} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_m(\mathbf{r}') ds' + v\varphi_T \int_D \mathbf{B}_e(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' - \\
& - \frac{\gamma\varphi_T}{4\pi} \int_D \int_D \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} \right] \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' d^3 r'' + \\
& + \gamma\varphi_T \lambda_{ijp} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_p} d^3 r' + \\
& + \gamma\varphi_T \beta_{ijp} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} b_{0p}(\mathbf{r}') d^3 r' + \\
& + \gamma\varphi_T \rho_{ijpq} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_p} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_q} d^3 r' + \\
& + \gamma\varphi_T \chi_{ijpq} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_p} b_{0q}(\mathbf{r}') d^3 r' + \\
& + \gamma\varphi_T \eta_{ijpq} \int_D \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} b_{0p}(\mathbf{r}') b_{0q}(\mathbf{r}') d^3 r'. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

### 2.3 Инвариантность матрицы сопротивлений гальваномагнитного многополюсника

Формула (2.31) совместно с формулами (2.28) и (2.29) позволяет получить потенциал внутри и на поверхности гальваномагнитного элемента. Однако, места контактов, к которым прикреплены проводники, не могут рассматриваться как точечные. Измеряемое напряжение при этом равно разности потенциалов между сечениями проводников, подводимых к магнитоактивному элементу, выбранными на некотором расстоянии от активной зоны элемента.

Пусть к контакту с номером  $m$  подключен измеритель напряжения, через который течет ток  $i_V$ . Будем считать, что через боковую поверхность провода ток не течет, а вольтметр подключен к достаточно удаленному от активной зоны преобразователя сечению, которое является эквипотенциальным. Мощность

тепловых потерь в подводящем проводе с учетом условия  $\text{div}(\mathbf{j}) = 0$  и формул (2.18) и (2.19) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \int_{C_m} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r = - \int_{C_m} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \text{grad}(\varphi(\mathbf{r})) d^3 r = \int_{C_m} \varphi(\mathbf{r}) \text{div}(\mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3 r - \\ - \int_{C_m} \text{div}(\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3 r = \int_{s_m} \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) ds = i_V \left( \varphi_m - \int_{S_m} \varphi(\mathbf{r}) f_m(\mathbf{r}) ds \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь  $C_m$  – внутренняя область проводника, подсоединенного к  $m$ -ой площадке,  $s_m$  – его поверхность,  $\varphi_m$  – потенциал на сечении проводника, удаленного от магнитоактивной зоны.

С другой стороны мощность тепловых потерь в проводнике может быть выражена через интегральный закон Джоуля – Ленца:

$$\frac{dQ}{dt} = i_V^2 R_C. \quad (2.33)$$

Здесь  $R_C$  – омическое сопротивление проводника. Учитывая соотношение (2.30), получаем из формулы (2.33)

$$\varphi_m - \int_{S_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds = i_V R_C.$$

Для потенциала, измеряемого идеальным вольтметром при  $i_V$ , стремящемся к нулю, получаем:

$$\varphi_m = \int_S f_m(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') ds'. \quad (2.34)$$

Покажем теперь, что именно измеряемые потенциалы, определенные соотношением (2.34) в однородном магнитном поле в линейном режиме, удовлетворяют соотношениям взаимности Онзагера [70]. Производство энтропии  $S$  для системы с заданными плотностью тока и распределением электрического поля при температуре  $T$  можно найти по аналогии с выводом соотношения (2.32):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{T} \int_D \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M i_m \int_{S_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M X_m J_m. \quad (2.35)$$

Здесь

$$X_m = i_m, J_m = \varphi_m \quad (2.36)$$

– термодинамические сила и поток соответственно. Выражение в виде (2.35) и определение (2.36) позволяет при линейной связи между токами и потенциалами применить теорему взаимности для матрицы сопротивления  $\mathbf{R}$ , определяемой уравнением:

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^M R_{mk} i_k. \quad (2.37)$$

Теорема Онзагера [70] утверждает (см. п. 1.2.2), что в однородном магнитном поле матрица  $\mathbf{R}$  симметрична, т.е. для ее элементов справедливо

$$R_{mk}(\mathbf{B}) = R_{km}(-\mathbf{B}). \quad (2.38)$$

Представим теперь измеряемый потенциал из соотношения (2.31) с учетом соотношений (2.28), (2.29) и (2.31) как сумму пропорционального внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}$  сигнального потенциала и не зависящего от внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  потенциала, который можно разделить на линейную и нелинейную по току  $i$  части. Тогда

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^M R_{mk}^{(1)} i_k + \sum_{k,n=1}^M R_{mkn}^{(2)} i_k i_n + \sum_{k,n,l=1}^M R_{mknl}^{(3)} i_k i_n i_l + \dots, \quad (2.39)$$

где

$$R_{mk}^{(1)}(\mathbf{B}_e) = R_{mk}^{(S)}(\mathbf{B}_e) + R_{mk}^{(A)}, \quad (2.40)$$

$$R_{mk}^{(S)}(\mathbf{B}_e) = \frac{1}{qn_D} \int_D \mathbf{B}_e(\mathbf{r}') \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}'} f_k(\mathbf{r}'') ds'' \right\} \times \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} f_m(\mathbf{r}) ds \right\} \right] d^3 r'. \quad (2.41)$$

Решение внутренней задачи Неймана (2.24) единственно с точностью до константы [69], которая определяется при выборе нулевого потенциала. Поскольку за ноль принят средний по поверхности тела  $S$  потенциал, из формул (2.18) и (2.28) следует, что

$$\oint_S \left[ \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds \right] j_n(\mathbf{r}') ds' = 0.$$

Для выполнения этого условия при произвольном распределении нормальной компоненты тока  $j_n$  по поверхности  $S$ , удовлетворяющей первому правилу Кирхгофа, достаточно, чтобы

$$\oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds = 0. \quad (2.42)$$

Функция Грина задачи Неймана, удовлетворяющая дополнительному условию (2.42), является единственной и симметричной [69]:

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}''). \quad (2.43)$$

Меняя в первом поверхностном интеграле (2.41) переменную интегрирования  $\mathbf{r}''$  на  $\mathbf{r}$ , получим с учетом условия (2.43)

$$R_{mk}^{(S)} = \frac{1}{qn_D} \int \mathbf{B}_e(\mathbf{r}') [\Gamma_k(\mathbf{r}') \times \Gamma_m(\mathbf{r}')] d^3 r', \quad (2.44)$$

где обозначено

$$\Gamma_m(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} f_m(\mathbf{r}') ds'. \quad (2.45)$$

Из соотношения (2.44) видно, что матрица  $\mathbf{R}^{(S)}$  антисимметричная, следовательно, для сигнальной части тензора линейного отклика соотношения взаимности Онзагера в виде (2.38) выполняется даже в неоднородном внешнем магнитном поле:

$$R_{mk}^{(S)}(\mathbf{B}_e(\mathbf{r})) = R_{km}^{(S)}(-\mathbf{B}_e(\mathbf{r})) = -R_{km}^{(S)}(\mathbf{B}_e(\mathbf{r})). \quad (2.46)$$

Аналогично из условия (43) следует, что

$$R_{mk}^{(A)} = \frac{1}{\sigma} \oint_S \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_k(\mathbf{r}') f_m(\mathbf{r}) ds ds' = R_{km}^{(A)}, \quad (2.47)$$

и полный тензор линейного отклика вида (2.40) является взаимным

$$R_{mk}^{(1)}(\mathbf{B}_e(\mathbf{r})) = R_{km}^{(1)}(-\mathbf{B}_e(\mathbf{r})). \quad (2.48)$$

Для тензора третьего ранга квадратичного отклика, обозначая  $\Gamma_{mi}$  –  $i$ -я компонента вектора  $\mathbf{\Gamma}_m$  вида (2.46), с учетом соотношений симметрии (2.27) для тензоров  $\lambda_{ijk}$  и  $\beta_{ijk}$  получаем

$$\begin{aligned}
R_{mkn}^{(2)} &= \frac{\mu_0}{4\pi qn} \int \int_D [\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{r})] \left[ \mathbf{\Gamma}_n(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] d^3 r d^3 r' + \\
&+ \frac{\mu_0}{qn} \lambda_{ijp} \int_D \Gamma_{mi}(\mathbf{r}') \Gamma_{kj}(\mathbf{r}') \Gamma_{np}(\mathbf{r}') d^3 r' + \\
&+ \gamma \frac{\mu_0}{qn} \beta_{ijp} \varepsilon_{pst} \int \int_{DD} \Gamma_{mi}(\mathbf{r}) \Gamma_{kj}(\mathbf{r}) \Gamma_{ns}(\mathbf{r}') \frac{(r_t - r'_t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r' = -R_{kmn}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Таким образом, тензор третьего ранга квадратичного отклика является антисимметричным по первым двум индексам.

Для тензора четвертого ранга кубического отклика, соответственно, получаем

$$\begin{aligned}
R_{mknl}^{(3)} &= \frac{\mu_0 \rho_{ijpq}}{qn \sigma \varphi_T} \int_D \Gamma_{mi}(\mathbf{r}') \Gamma_{kj}(\mathbf{r}') \Gamma_{np}(\mathbf{r}') \Gamma_{lq}(\mathbf{r}') d^3 r' + \\
&+ \frac{\gamma \mu_0 \chi_{ijpq}}{qn \sigma \varphi_T} \varepsilon_{qst} \int \int_{DD} \Gamma_{mi}(\mathbf{r}) \Gamma_{kj}(\mathbf{r}) \Gamma_{np}(\mathbf{r}) \Gamma_{ls}(\mathbf{r}') \frac{(r_t - r'_t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r' + \\
&+ \frac{\gamma^2 \mu_0 \eta_{ijpq}}{qn \sigma \varphi_T} \varepsilon_{pst} \varepsilon_{quv} \int \int \int_{DDD} \Gamma_{mi}(\mathbf{r}) \Gamma_{kj}(\mathbf{r}) \Gamma_{ns}(\mathbf{r}') \Gamma_{lu}(\mathbf{r}'') \frac{(r_t - r'_t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \frac{(r_v - r''_v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} d^3 r d^3 r' d^3 r''.
\end{aligned}$$

Из соотношений симметрии (2.27) для тензоров  $\rho_{ijkl}$ ,  $\chi_{ijkl}$  и  $\eta_{ijkl}$  следует, что тензор четвертого ранга кубического отклика является симметричным по первым двум индексам

$$R_{mknl}^{(3)} = R_{kmnl}^{(3)}. \tag{2.50}$$

По аналогии можно показать, что все тензоры четных нелинейностей являются антисимметричными, а тензоры нечетных нелинейностей являются симметричными по первым двум индексам. Если обозначить упорядоченную комбинацию токов через зажимы элемента в виде вектора  $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_M\}$ , то формула (2.39) принимает вид

$$\Phi_m = \sum_{k=1}^M R_{mk}(\mathbf{i}, \mathbf{B}_e) i_k, \quad (2.51)$$

где

$$R_{mk}(\mathbf{i}, \mathbf{B}_e) = R_{mk}^{(1)}(\mathbf{B}_e) + \sum_{n=1}^M R_{mkn}^{(2)} i_n + \sum_{n,l=1}^M R_{mknl}^{(3)} i_n i_l + \dots \quad (2.52)$$

Из соотношений симметрии (2.48) – (2.50) следует условие взаимности для матрицы нелинейных сопротивлений гальваномагнитного элемента в неоднородном магнитном поле

$$R_{mk}(\mathbf{i}, \mathbf{B}_e(\mathbf{r})) = R_{km}(-\mathbf{i}, -\mathbf{B}_e(\mathbf{r})). \quad (2.53)$$

## 2.4 Преобразователь Холла в неоднородном магнитном поле

### 2.4.1 Вычисление системной функции гальваномагнитного элемента

Экспериментальную проверку соотношений (2.46) и (2.47) в неоднородном магнитном поле можно провести для гальваномагнитного четырехполюсника, например, преобразователя Холла, структура которого приведена на Рисунке 2.2.

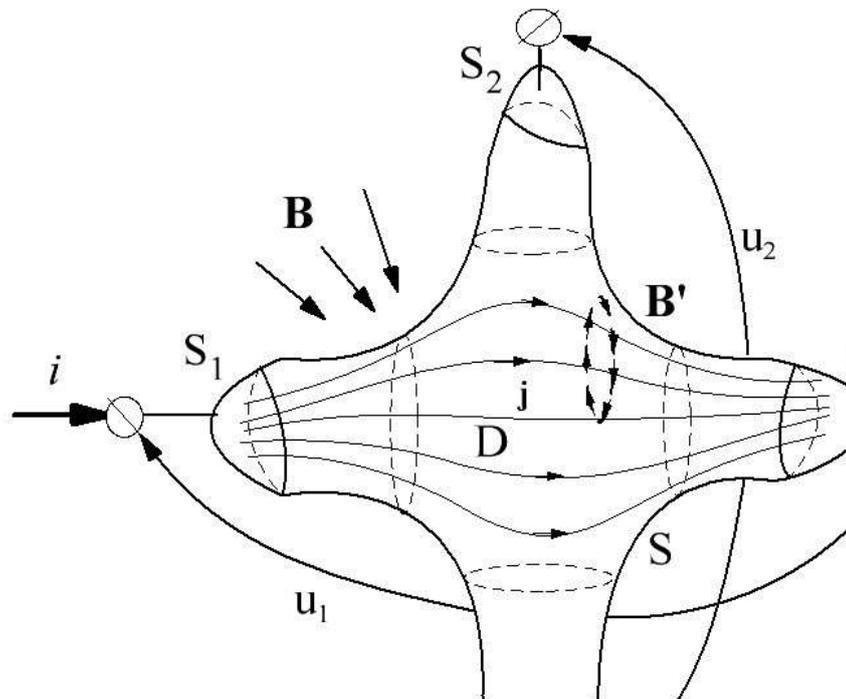


Рисунок 2.2 – Структура преобразователя Холла

Проверка соотношений взаимности для нелинейного гальваномагнитного элемента проводится в двух режимах измерений:

1) Контакты 1 и 3 подключены к источнику тока  $i$ , между контактами 2 и 4 измеряется напряжение  $u_1 = \varphi_2^{(1)} - \varphi_4^{(1)}$ , при этом  $i_1 = i, i_3 = -i, i_2 = i_4 = 0$ .

2) Контакты 2 и 4 подключены к источнику тока  $i$ , между контактами 1 и 3 измеряется напряжение  $u_2 = \varphi_1^{(2)} - \varphi_3^{(2)}$ , при этом  $i_2 = i, i_4 = -i, i_1 = i_3 = 0$ .

В свою очередь из формулы (2.44) следует способ регистрации отклика преобразователя на внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$ . Измерение проводится в режиме 1. Через контакты 1 и 3 пропускается постоянный ток  $i_0$  и измеряется напряжение  $u_1$  между контактами 2 и 4. Заметим, что выражение (2.28) представляет собой распределение потенциала при протекании тока без учета влияния магнитного поля. Используя формулы (2.31) и (2.45), положив  $\mathbf{B}_e = 0, \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \text{grad}(\varphi)$ , получим выражения для распределения плотности тока в магнитоактивном четырехполюснике для обоих случаев подключения:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) = i(\Gamma_1(\mathbf{r}) - \Gamma_3(\mathbf{r})) = i \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} [f_3(\mathbf{r}') - f_1(\mathbf{r}')] ds',$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = i(\Gamma_4(\mathbf{r}) - \Gamma_2(\mathbf{r})) = i \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} [f_4(\mathbf{r}') - f_2(\mathbf{r}')] ds'.$$

Здесь  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}), \mathbf{j}_2(\mathbf{r})$  – плотности тока в гальваномагнитном элементе в отсутствие внешнего магнитного поля в соответствующих случаях. Тогда выражение (2.44) может быть записано в следующем виде:

$$R_H(\mathbf{B}_e) = \frac{\varphi_2^{(1S)} - \varphi_4^{(1S)}}{i} = \frac{1}{qnt^2} \int_D \mathbf{B}_e(\mathbf{r}') [\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \times \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')] d^3 r'. \quad (2.54)$$

В уравнении (2.54) координаты отсчитываются от центра магнитоактивного элемента. При экспериментальной проверке полученных выражений для системной функции гальваномагнитного элемента удобно рассматривать измеряемую величину

$R_H$  как функцию координат его центра, тогда уравнение (2.54) можно преобразовать в свертку

$$R_H(\mathbf{r}) = K_H \int_D \mathbf{B}_e(\mathbf{r}') \mathbf{W}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r', \quad (2.55)$$

где  $\mathbf{r}$  – координаты центра элемента;  $K_H = 1/qn$  – коэффициент Холла,  $\mathbf{W}(\mathbf{r})$  – векторная объемная системная функция гальваномагнитного четырехполюсника:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \times \mathbf{j}_2(\mathbf{r})]}{i^2}. \quad (2.56)$$

Приближение малого тока в соотношении (2.59) математически требуется для строгого выполнения первого условия краевой задачи (2.24), в правую часть которой входят значения потенциала в нулевом магнитном поле. Физически условие (2.56) обеспечивает справедливость линейного приближения по внешнему магнитному полю, поскольку понятие системной функции применимо только к линейным системам.

Для тонкопленочного магнитоактивного элемента задача сводится к двумерной. Пусть область  $D$  представляет собой цилиндр высотой  $d$  с основанием  $S$ , лежащим в плоскости  $xu$ , то есть пленку достаточно тонкую, чтобы распределение тока и магнитного поля вдоль оси  $z$  считать равномерным. Тогда векторы  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{j}_2(\mathbf{r})$  можно считать лежащими в плоскости  $xu$ , а их векторное произведение направленным вдоль оси  $z$ . Тройной интеграл в формуле (2.55) можно взять сначала по оси  $z$ , что эквивалентно умножению на  $d$  двойного интеграла по основанию  $S$ .

Введем относительную линейную плотность тока  $\lambda$  в отсутствии магнитного поля

$$\lambda(x, y) = \lim_{i \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{i} \int_0^d \mathbf{j}(x, y, z) dz \right] = \lim_{i \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{i} \mathbf{j}(x, y, 0) \right]$$

и перепишем формулу (2.55) в виде:

$$R_H(\mathbf{r}) = K_H \int_S B_n(\mathbf{r}') w(x - x', y - y') dx' dy', \quad (2.57)$$

$$w(x, y) = \frac{\lambda_{1x}(x, y) \cdot \lambda_{2y}(x, y) - \lambda_{2x}(x, y) \cdot \lambda_{1y}(x, y)}{d}. \quad (2.58)$$

#### 2.4.2 Проверка соотношений взаимности в неоднородном магнитном поле

Для проверки соотношений (2.51), (2.53) и формулы (2.58) разработана специальная установка, структурная схема которой приведена на Рисунке 2.3.

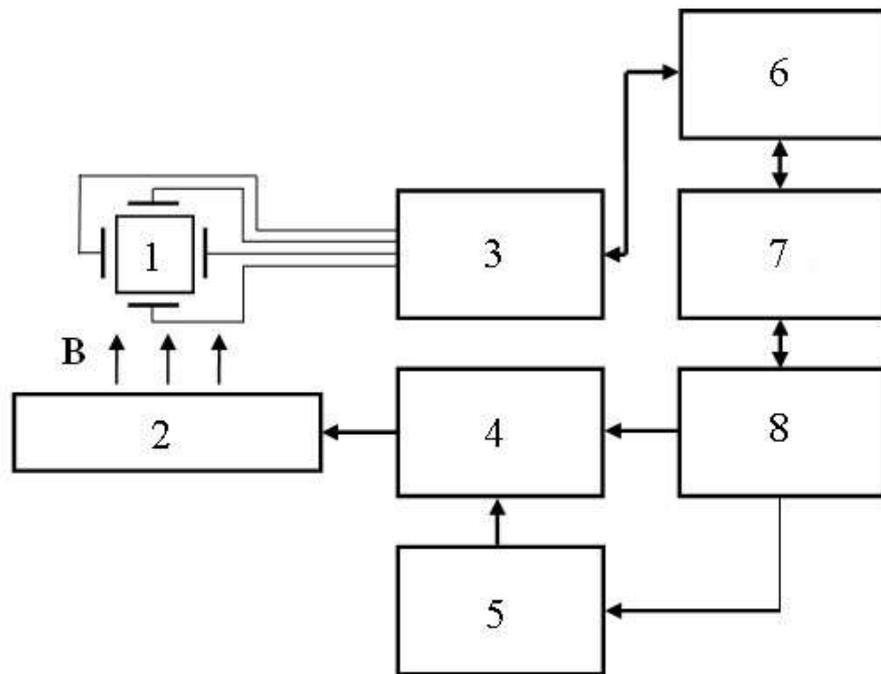


Рисунок 2.3 – Структурная схема установки для экспериментальной проверки расчета системной функции преобразователя Холла: 1) преобразователь Холла, 2) система проводников, 3) цифровой холловский магнитометр, 4) блок коммутации токов, 5) источник тока, 6) персональный компьютер (ПК), 7) преобразователь интерфейсов, 8) микроконтроллер

Интерфейсная программа ПК (6) осуществляет управление и синхронизацию измерений и установки распределения тока. С помощью преобразователя

интерфейсов (7) осуществляется передача кодовой последовательности на микроконтроллер (8), который по команде ПК управляет блоком коммутации токов (БКТ) (4). Источник тока (5) является опорным для БКТ, осуществляющим коммутацию тока в системе проводников (2). На систему проводников закрепляется исследуемый преобразователь (1), подключенный к цифровому холловскому магнитометру (3) [70] – он измеряет магнитное поле и передает полученные данные в ПК, интерфейсная программа которого записывает их в файл для дальнейшей обработки. Магнитометр позволяет выполнять измерения магнитного поля в разных режимах: ток через датчик может пропускаться как через токовые, так и через потенциальные контакты. При этом измерения напряжения проводятся на двух оставшихся свободных контактах.

Функционально установка состоит из трех частей – персонального компьютера, цифрового холловского магнитометра и блока формирования магнитного поля. Подробное описание установки приведено в приложении А. Программа экспериментов предполагала измерение отклика преобразователя Холла при различных режимах работы и расположении датчика относительно проводников с током. При всех измерениях усреднение проводилось по 50 отсчетам магнитного поля при каждом значении выставленного кода, то есть для каждого различного распределения магнитного поля. Кроме среднего рассчитывалось и среднеквадратичное отклонение для каждого отсчета распределения – оно указано на графиках в виде доверительных интервалов.

Распределения тока, входящие в формулу (2.64) для системной функции, вычислялись в среде физического моделирования COMSOL. Рассмотрим в качестве примера тонкопленочный гальваномагнитный преобразователь Холла ПХЭ602817А, геометрия которого приведена на Рисунке 2.4 [36].

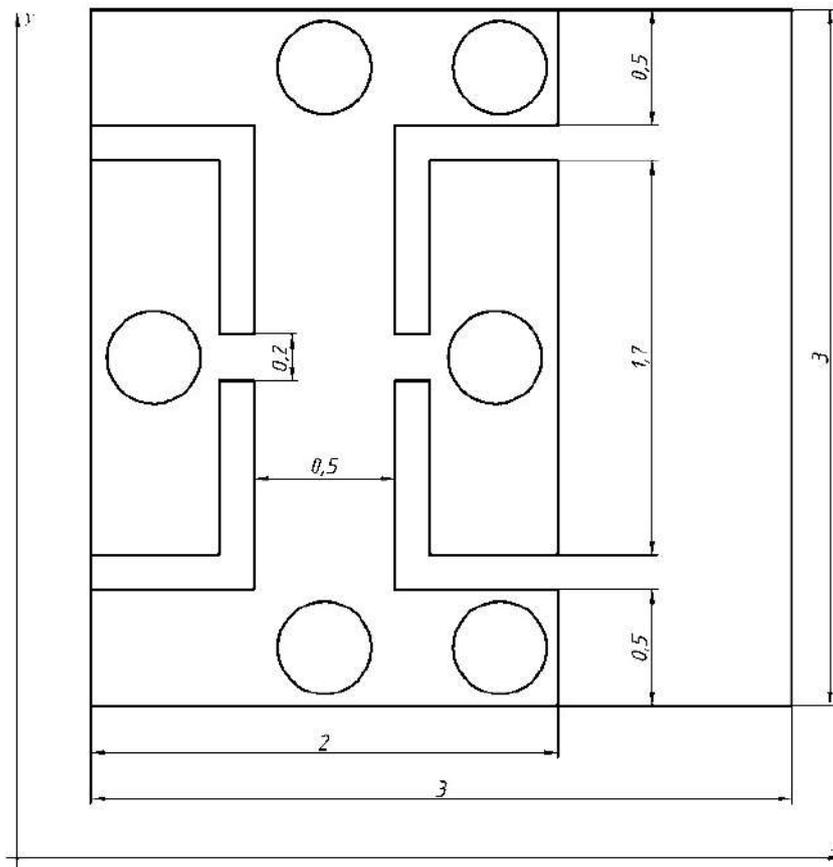


Рисунок 2.4 – Конструкция преобразователя ПХЭ602817А

Построим его системную функцию по формуле (2.64) через распределение токов. Перейдем к двумерной задаче, предполагая, что плотность втекающего в область преобразователя тока равномерна по границе контактов. Толщина пленки датчика составляет  $d = 10$  мкм.

Численное моделирование выполнялось сеточным методом с использованием адаптивной сетки, с максимальным размером элемента в 9 мкм. Общее число элементов составило 158394. Расчет был произведен на ПК с процессором Pentium(R) Dual-Core T4300 и 3 Гбайт оперативной памяти. Двумерная системная функция преобразователя Холла показана на Рисунке 2.5.

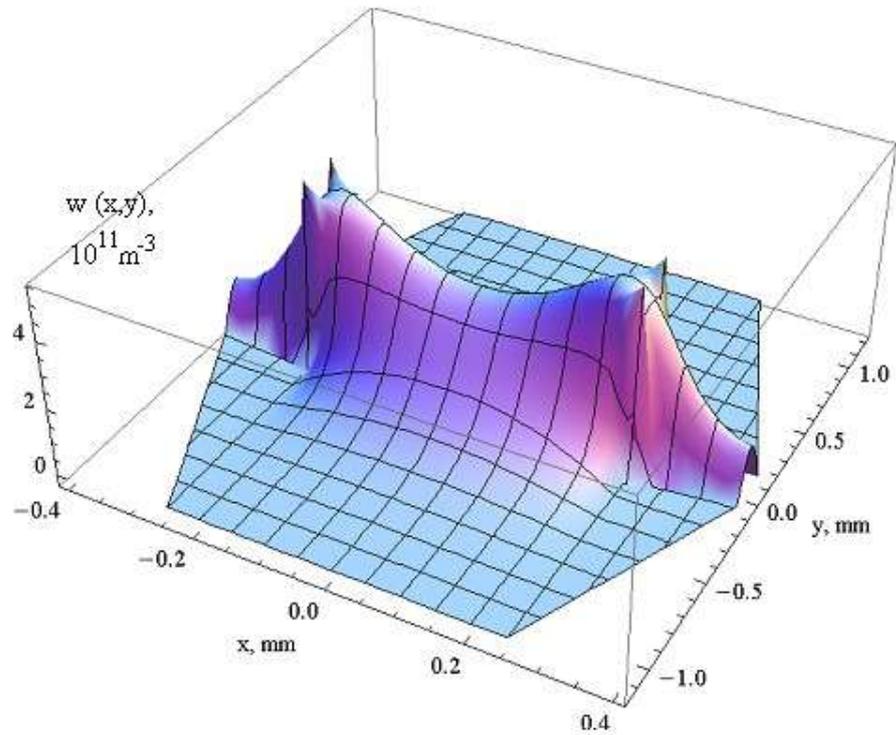


Рисунок 2.5 – График двухмерной системной функции преобразователя Холла ПХЭ602817А

Для учета системной функции, зависящей от двух координат, необходимо создавать распределения магнитного поля, локального по обеим координатам. Это принципиально возможно (к примеру, соленоид малых размеров), но практически сложно осуществимо. Для экспериментальной проверки более удобными являются одномерные системные функции. Они получаются, если в уравнении (2.58) положить  $B_n(x', y') = B_n(x')$ :

$$R_H(x) = \int_{x-x_{\min}}^{x-x_{\max}} B_n(x') \int_{y-y_{\min}}^{y-y_{\max}} w(x-x', y-y') \cdot dy' \cdot dx'.$$

Здесь  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ ;  $y_{\max}$ ,  $y_{\min}$  – координаты, определяющие размеры датчика по соответствующим осям. Тогда, вводя одномерные системные функции для  $x$  и  $y$

$$w_x(x) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} w(x, y') \cdot dy', \quad w_y(y) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} w(x', y) \cdot dx', \quad (2.59)$$

получим выражения для напряжений сигнала

$$R_H(x) = \int_{x-x_{\min}}^{x-x_{\max}} B_n(x') w_x(x-x') \cdot dx';$$

$$R_H(y) = \int_{y-y_{\min}}^{y-y_{\max}} B_n(y') w_y(y-y') \cdot dy'. \quad (2.60)$$

Для получения одномерных аппаратных функций, двумерная аппаратная функция была проинтегрирована согласно (2.59). На Рисунках 2.6 и 2.7 показаны результаты интегрирования (2.59). Они различаются тем, по какой оси предполагается однородность магнитного поля.

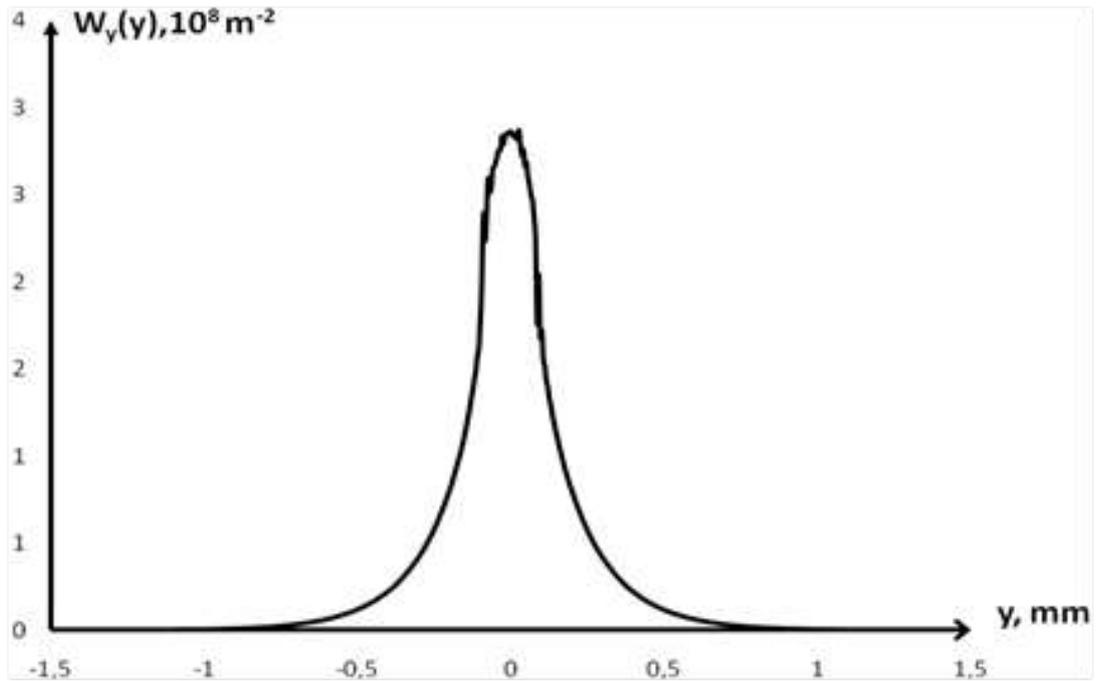


Рисунок 2.6 – График одномерной системной функции преобразователя ПХЭ602817А в однородном по оси  $x$  поле

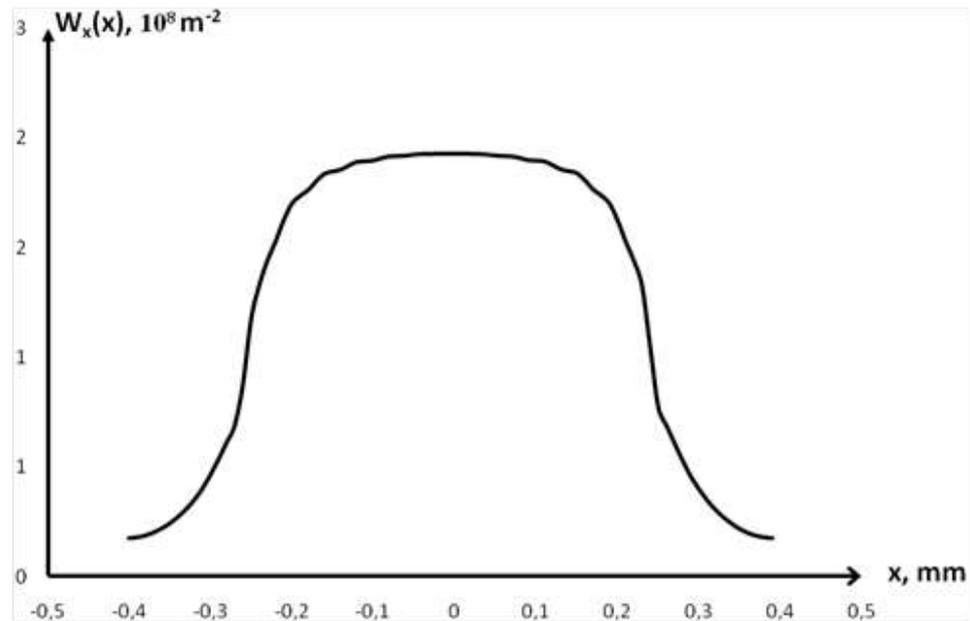


Рисунок 2.7 – График одномерной системной функции преобразователя ПХЭ602817А в однородном по оси  $y$  поле

На Рисунке 2.8 показаны измеренное усредненное (сплошной линией) и расчетное (пунктиром) распределения магнитного поля при  $h = 0,2 \text{ мм}$ ,  $I = 64 \text{ мА}$ .

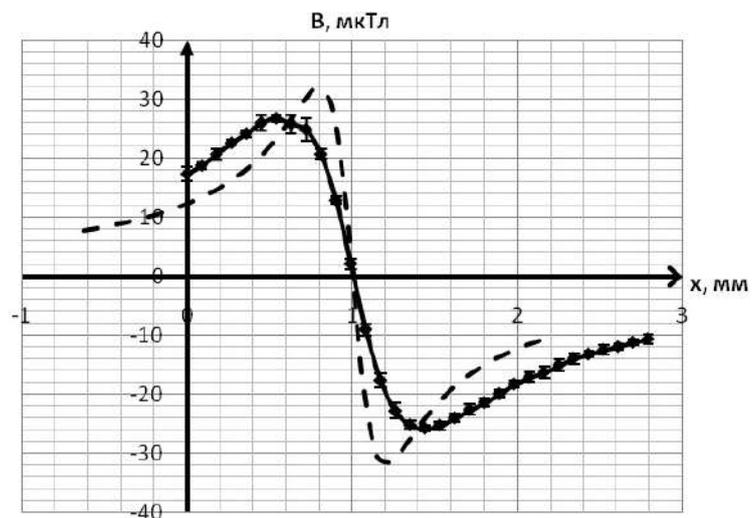


Рисунок 2.8 – Измеренное усредненное (сплошной линией) и расчетное (пунктиром) распределения магнитного поля над системой проводников

Различие между расчетным и измеренным распределением объясняется действием аппаратной функции преобразователя Холла вида дискретной свертки с системной функцией (2.57).

При помощи полученных из формулы (2.55) одномерных системных функций, рассчитана реакция преобразователя Холла на токи в системе проводников. Экспериментальные отсчеты накладываются на кривую, полученную по формуле (2.58) с помощью рассчитанной системной функции, что говорит о достоверности предложенного метода расчета системной функции магнитоактивного элемента.

Схема проверки соотношений взаимности показана на Рисунке 2.9. В ходе проверки проводятся две серии измерений – Рисунок 2.9 (а) и (б), – отличающихся контактами, через которые пропущен ток и на которых измеряется напряжение (см. п. 2.4.1).

При этом переключение режима измерения производится при помощи электроники холловского магнитометра (приложение А), и преобразователь остается неподвижным.

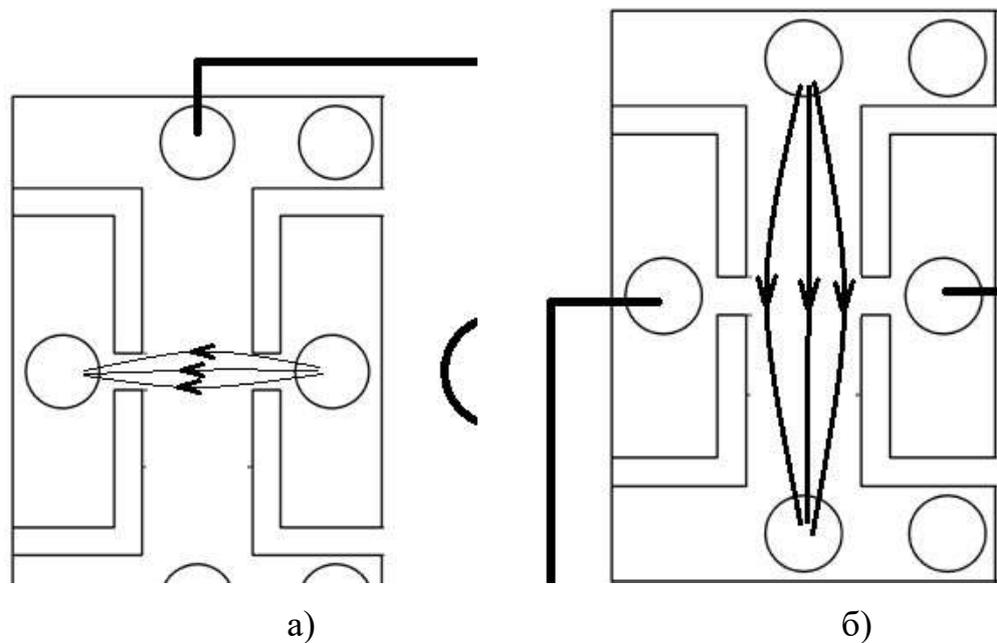


Рисунок 2.9 – Схема проверки соотношений взаимности для преобразователя Холла:

- а) Напряжение измеряется на потенциальных контактах, ток пропускается через токовые; б) Напряжение измеряется на токовых контактах, ток пропускается через потенциальные

В каждой серии измерений производится переключение токов в проводниках, создающих магнитное поле. Полученные значения напряжений для каждого номера проводника сравниваются. Критерием выполнения соотношений взаимности является величина относительной ошибки  $\Delta$ , равная отношению среднеквадратичного отклонения к суммарной энергии сигналов:

$$\Delta = \sqrt{2 \frac{\sum_{n=1}^N (u_1[n] - u_2[n])^2}{\sum_{n=1}^N (u_1[n])^2 + \sum_{n=1}^N (u_2[n])^2}}. \quad (2.61)$$

Здесь  $N$  – количество экспериментальных отсчетов,  $u_1[n]$  и  $u_2[n]$  – измеряемые напряжения в первой и второй сериях измерений для каждого номера проводника с током  $n$ . В ходе эксперимента по предложенной схеме относительная ошибка  $\Delta$  составила приблизительно 2%.

## 2.5 Исследование переходных процессов в преобразователе Холла

Коммутация токов в преобразователе Холла позволяет улучшить его метрологические характеристики, однако создает резкое изменение распределения тока в магниточувствительной пленке и напряженности электрического и внутреннего магнитного полей. При разработке магнитометра на основе преобразователей Холла серии ПХЭ ООО "Сенсор" (Санкт-Петербург) и фирмы "Asahi-Kasei EMD" серий HG и HW были обнаружены переходные процессы напряжений, возникающие после переключения контактов преобразователя. Исследованию причин возникновения таких процессов посвящен этот раздел.

### 2.5.1 Установка для исследования нестационарных процессов в скомпенсированном магнитном поле

Исследование переходных процессов в преобразователе Холла выполнялось на экспериментальной установке, структура которой приведена на Рисунке 2.10.

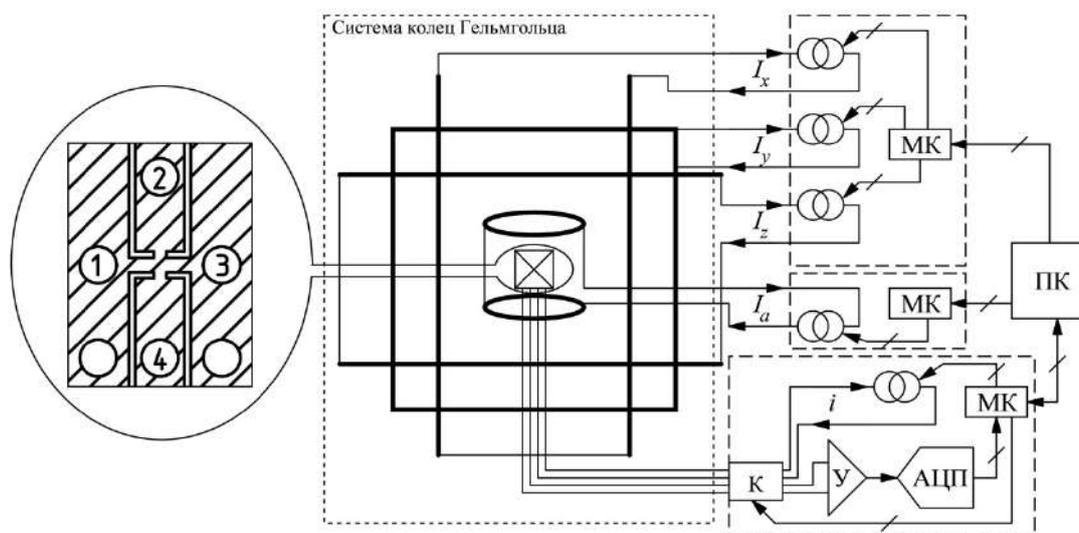


Рисунок 2.10 – Структурная схема экспериментальной установки

Три пары катушек Гельмгольца, питаемые от программно управляемых источников тока  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$ , позволяют компенсировать геомагнитное поле в области преобразователя Холла и создать заданное внешнее магнитное поле. Программно управляемый источник тока  $i$  через коммутатор  $K$  подключается поочередно к контактам 1–3 или 2–4 преобразователя Холла. Напряжения с соответствующих контактов преобразователя Холла или выводов термопар с помощью коммутатора  $K$  после измерительного усилителя  $U$  оцифровываются многоканальным аналого-цифровым преобразователем АЦП. Управление процессом измерений и обработка данных производится ПК через соответствующие микроконтроллеры (МК).

Особенностью установки являлась модификация программного обеспечения МК и ПК, выполненная автором. Она позволила осуществлять настройку режима работы ключей, АЦП и последовательности сбора данных в разных режимах для

исследовательских задач. Программа МК позволяет осуществлять измерение напряжений с настраиваемой частотой дискретизации от 50 кГц до 5 Гц. При этом количество отсчетов измеренных напряжений может варьироваться от 1 до 100. Последовательность следующих друг за другом четырех тактов может быть задана в настройках. Основные режимы работы:

– **Однократное измерение:** позволяет установить заданную конфигурацию ключей и измерить напряжение на входе АЦП однократно.

– **Режим четырехтактного алгоритма:** позволяет производить измерения напряжения Холла в соответствии с заданной последовательностью коммутации. Используется для установления скомпенсированного геомагнитного поля и упрощенного тестирования работоспособности устройства.

– **Режим циклических переходных процессов:** коммутация осуществляется в соответствии с заданной последовательностью, но на каждом шаге измеряется от 1 до 100 отсчетов напряжений. Позволяет обнаружить наличие нестационарности исследуемого преобразователя.

– **Режим включения тока из равновесия:** после применения настройки через преобразователь устанавливается заданный ток и измеряется переходной процесс напряжения длиной от 1 до 100 отсчетов. После процедуры измерений ток через преобразователь отключается. Может быть использован для измерения переходных характеристик преобразователя Холла по отношению к воздействию электрического тока.

– **Режим выключения тока из равновесия:** после применения настройки ток через преобразователь выключается и измеряется переходной процесс напряжения длиной от 1 до 100 отсчетов. После проведения измерений ток через преобразователь включается и устанавливается заданное программой новое положение ключей. Может быть использован для измерения переходных процессов термоэлектрической природы.

Программа сбора данных и управления для ПК позволяет создавать план измерений и реализовывать его в автоматическом режиме. Варьируемыми параметрами являются:

- ток через преобразователь Холла;
- ток через магнитный соленоид;
- количество отсчетов сигналов напряжений в каждом такте;
- частота дискретизации АЦП;
- последовательность переключения ключей;
- режим работы.

Результаты измерений представляют собой последовательности отсчетов напряжения, которые могут быть пересчитаны в последовательности напряжений Холла по формуле:

$$U_H(t) = (U_4(t) - U_2(t) + U_1(t) - U_3(t)) / 4. \quad (2.62)$$

Все выполненные модификации позволили исследовать динамику напряжений на контактах преобразователя в скомпенсированном магнитном поле, при различных значениях тока через него в автоматическом режиме, при заданной последовательности коммутации токов.

### 2.5.2 Основные закономерностей переходных процессов

Для того, чтобы удостовериться, что причины переходных процессов не вызваны элементами измерительной схемы, все эксперименты повторялись на резистивном эквиваленте преобразователя Холла. Сравнение изменения напряжения в режиме «циклических переходных процессов» показано на Рисунке 2.11. Коммутация осуществлялась в соответствии с последовательностью тактов четырехтактного алгоритма (см. п. 1.2.2). Как видно из Рисунка 2.11, на каждом такте измерений на преобразователе наблюдается переходной процесс напряжения, который отсутствует на графиках для эквивалента.

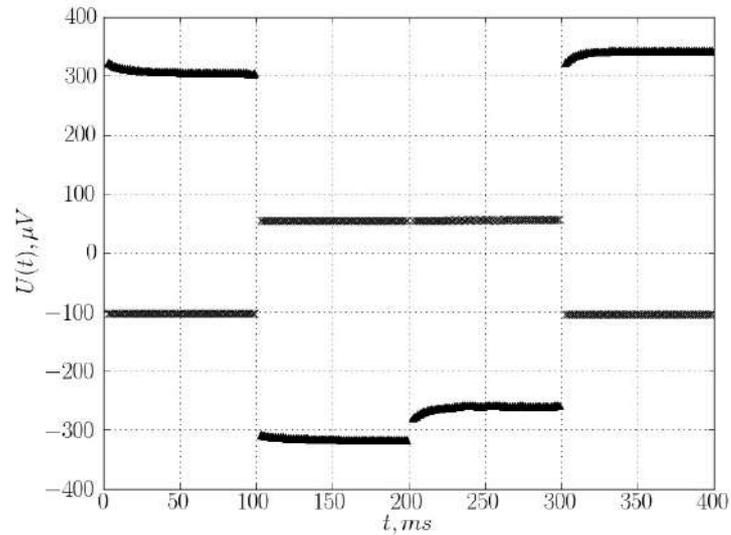


Рисунок 2.11 – Сравнение изменения напряжений на преобразователе Холла (треугольные маркеры) и его эквиваленте (маркеры в виде креста) при работе в четырехтактном режиме

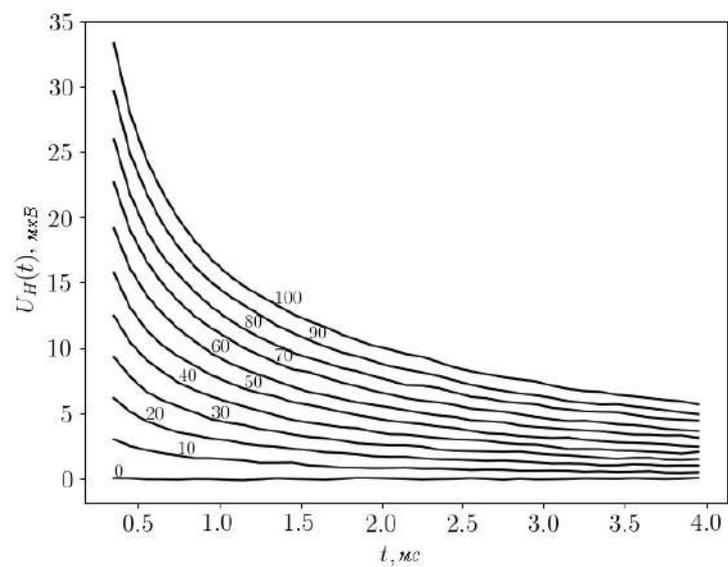


Рисунок 2.12 – Переходной процесс напряжения Холла в преобразователе ПХЭ606117А при разных значениях тока проходящих через преобразователь, которые указаны на рисунке цифрами в мА

Обнаруженные переходные процессы напряжения приводят к соответствующему переходному процессу в напряжении Холла, рассчитываемому по формуле (2.62) (Рисунок 2.12). В этом эксперименте частота дискретизации была выбрана 10 кГц, между переключениями ключей измерялось 40 отсчетов напряжений. Последовательность коммутации токов соответствовала четырехтактному алгоритму.

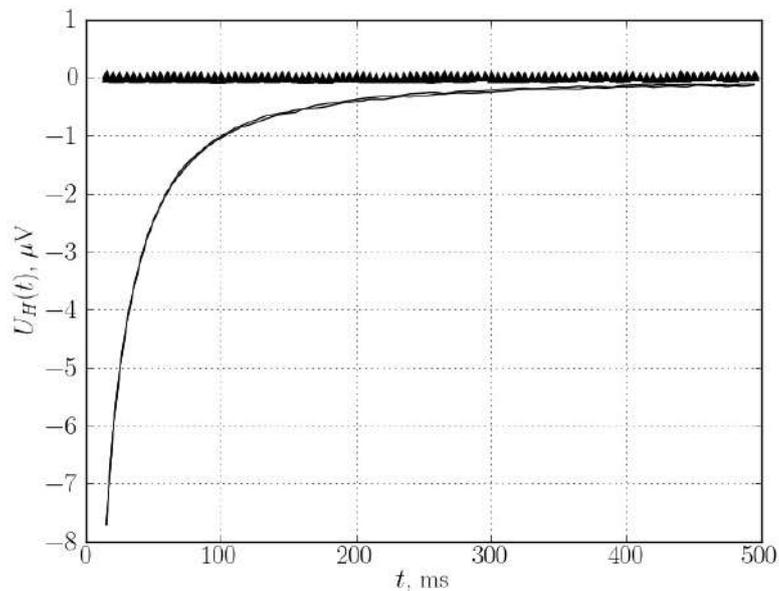


Рисунок 2.13 – Сравнение переходного напряжения Холла в разных режимах измерения тактов: сплошная линия – напряжения в режиме «циклических переходных процессов», треугольниками показаны напряжения в режиме «включение тока из равновесия»

На основании анализа результата, показанного на Рисунке 2.13, сделан вывод, что протекание тока через преобразователь изменяет его состояние таким образом, что при последовательном измерении напряжений в тактах алгоритма приводит к дополнительной погрешности.

Для большей информативности проведены измерения переходного процесса в режиме «циклический переходной процесс» при различной длительности такта

(Рисунок 2.14). Характер переходного процесса меняется в зависимости от времени такта, что приводит к разной величине дополнительной погрешности.

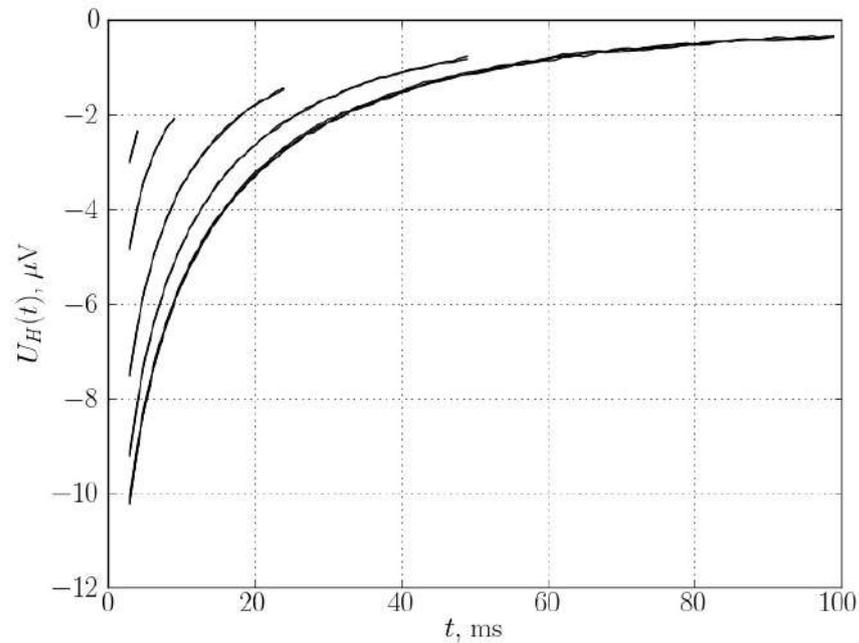


Рисунок 2.14 – Переходной процесс напряжения Холла при различной длительности такта

Для того чтобы выявить эффекты влияния магнитного поля на этот процесс, измерения были проведены при одном и том же значении тока через преобразователь, но разным токе через соленоид. Результаты приведены на Рисунке 2.15. Зависимость переходного процесса от внешнего магнитного поля не обнаружена.

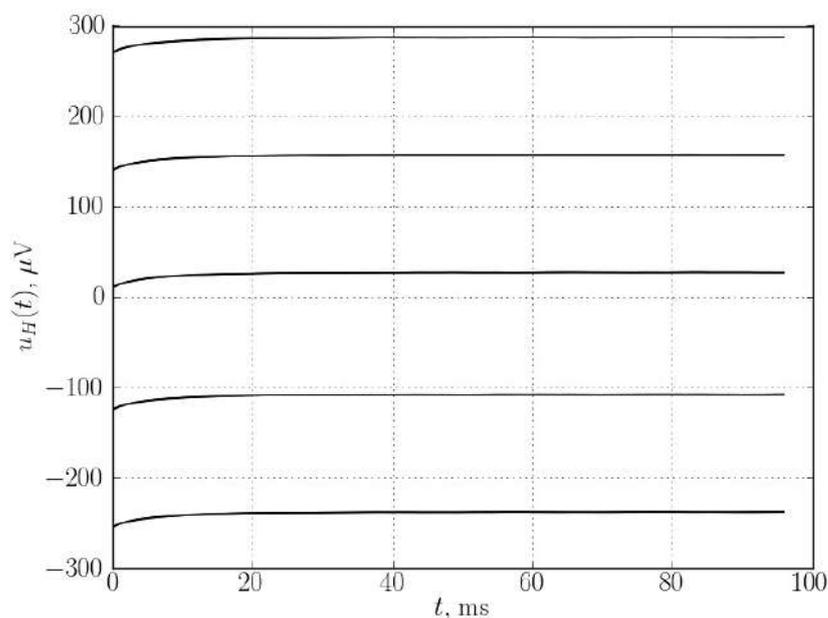


Рисунок 2.15 – Зависимость напряжения Холла от тока через задающую катушку. Здесь сверху вниз зависимости при токах  $-100$ ,  $-50$ ,  $0$ ,  $50$ ,  $100$  мА, при токе через преобразователь Холла  $100$  мА

В ходе серии экспериментов удалось выявить следующие основные особенности переходных процессов:

- 1) Амплитуда переходного процесса напряжения Холла зависит от тока через преобразователь Холла линейно с точностью не хуже 10%.
- 2) Амплитуда переходного процесса не зависит от магнитного поля в диапазоне  $\pm 500$  мкТл с точностью шумов магнитометра.
- 3) Характерное время затухания слабо зависит от тока (как эффект второго порядка малости).
- 4) Характерное время затухания и амплитуда процесса сильно зависят от того, как отводится тепло от преобразователя и от длительности такта.

### 2.5.3 Взаимность в нестационарных условиях

Проверка выведенных соотношений (2.53) и (2.40), в частности, для магнитоактивного четырехполюсника в работе [71] выполнялась для последней точки переходного процесса в некотором выбранном режиме работы. Представляется важным вопрос выполнения этих соотношений и в нестационарных условиях:

$$R_{mk}(\mathbf{i}, \mathbf{V}_e(\mathbf{r}), t) = R_{km}(-\mathbf{i}, -\mathbf{V}_e(\mathbf{r}), t). \quad (2.63)$$

Для измерения недиагональных элементов матрицы сопротивлений измеряются напряжения в двух режимах при нескольких значениях тока  $i_k$ :

1. Контакты 1 и 3 подключены к источнику тока  $i_k$ , между контактами 2 и 4 измеряется напряжение  $u_1 = \varphi_2^{(1)} - \varphi_4^{(1)}$ , при этом  $I_1 = i_k, I_3 = -i_k, I_2 = I_4 = 0$ .

2. Контакты 2 и 4 подключены к источнику тока  $i_k$ , между контактами 1 и 3 измеряется напряжение  $u_2 = \varphi_1^{(2)} - \varphi_3^{(2)}$ , при этом  $I_2 = i_k, I_4 = -i_k, I_1 = I_3 = 0$ .

В формуле (2.63) все элементы матрицы сопротивлений должны измеряться одновременно. Вместо этого измерения можно производить в разные моменты времени, но в одинаковых условиях. Для этого использовался режим «включения тока из равновесия». После ожидания установления теплового равновесия устанавливалось необходимое значение тока через преобразователь, и производилось измерение 100 отсчетов напряжения в течение 0,5 с. Здесь предполагается что  $\tau$  – время, отсчитываемое от момента установки нового значения тока  $i$ .

Измеренные напряжения  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\tau)$  содержат погрешности, обусловленные, термоэдс контактов преобразователя и дрейфом нуля измерительных приборов. Поэтому используются величины

$$\begin{aligned} u_3(\tau, \mathbf{V}_e, i) &= (u_1(\tau, \mathbf{V}_e, i) - u_1(\tau, \mathbf{V}_e, -i)) / 2, \\ u_4(\tau, \mathbf{V}_e, i) &= (u_2(\tau, \mathbf{V}_e, i) - u_2(\tau, \mathbf{V}_e, -i)) / 2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из формул (2.63) и (2.64) можно получить нелинейные функции с размерностью сопротивления:

$$\begin{aligned}
R_1(\tau, \mathbf{B}_e, i) &= \frac{u_3(\tau, \mathbf{B}_e, i)}{i} = R_{21}(\tau, \mathbf{B}_e, i) - R_{23}(\tau, \mathbf{B}_e, i) - \\
&- R_{41}(\tau, \mathbf{B}_e, i) + R_{43}(\tau, \mathbf{B}_e, i), \\
R_2(\tau, \mathbf{B}_e, i) &= \frac{u_4(\tau, \mathbf{B}_e, i)}{i} = R_{12}(\tau, \mathbf{B}_e, i) - R_{14}(\tau, \mathbf{B}_e, i) - \\
&- R_{32}(\tau, \mathbf{B}_e, i) + R_{34}(\tau, \mathbf{B}_e, i).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Линейные части нелинейных функций  $R_1$  и  $R_2$  могут быть отделены полиномиальной аппроксимацией функций  $u_3(i)$  и  $u_4(i)$  с параметрами  $t$  и  $\mathbf{B}_e$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3(\tau, \mathbf{B}_e, i) &= a_0(\tau, \mathbf{B}_e) + a_1(\tau, \mathbf{B}_e)i + a_2(\tau, \mathbf{B}_e)i^2 + \dots, \\
\tilde{u}_4(\tau, \mathbf{B}_e, i) &= b_0(\tau, \mathbf{B}_e) + b_1(\tau, \mathbf{B}_e)i + b_2(\tau, \mathbf{B}_e)i^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.66}$$

В этих выражениях коэффициенты  $a_0(\tau, \mathbf{B}_e)$  и  $b_0(\tau, \mathbf{B}_e)$  определяют остаточную систематическую погрешность измерений, которая обусловлена смещением дрейфа измерительных приборов. Коэффициенты  $a_1(\tau, \mathbf{B}_e)$  и  $b_1(\tau, \mathbf{B}_e)$  описывают сопротивление асимметрии четырехполюсника и эффект Холла. Проверяемые соотношения взаимности связаны с линейной частью многочлена (2.66) и имеют вид:

$$a_1(\tau, \mathbf{B}_e) = b_1(\tau, -\mathbf{B}_e). \tag{2.67}$$

Экспериментальная проверка соотношений взаимности (2.67) и соответствующей им формулы (2.64) производилась для преобразователя Холла ПХЭ602117А. Семейство вольтамперных характеристик четырехполюсника для различных значений времени  $\tau$  представлено на Рисунке 2.16.

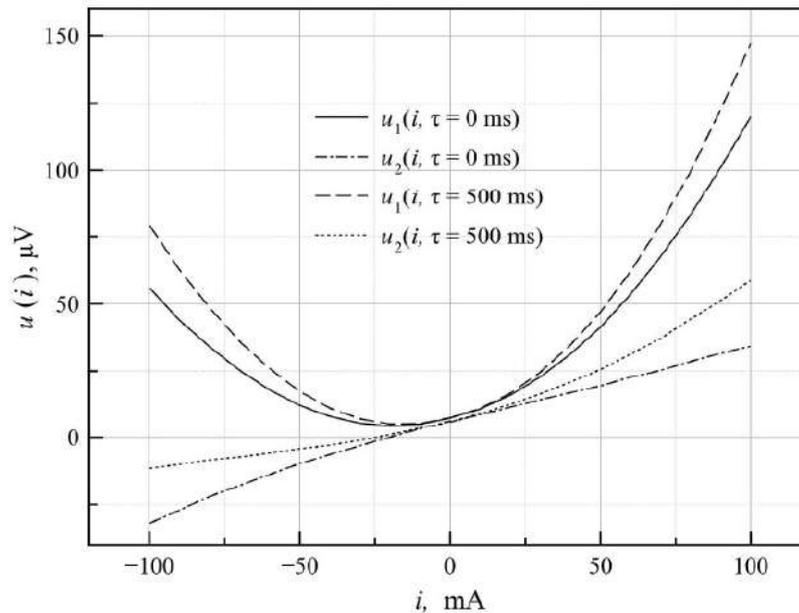


Рисунок 2.16 – Вольтамперные характеристики для различных значений  $\tau$

Поскольку величина  $a_1(\tau, \mathbf{B}_e) - b_1(\tau, -\mathbf{B}_e)$  имеет шумоподобный характер при изменении  $\tau$  и  $B_e$  в пределах 15...500 мс и  $-150...150$  мкТл соответственно, то в качестве меры взаимности использовалось следующее выражение:

$$\Delta = \frac{\langle a_1(\tau, \mathbf{B}_e) - b_1(\tau, -\mathbf{B}_e) \rangle}{\sqrt{\langle a_1^2(\tau, \mathbf{B}_e) + b_1^2(\tau, -\mathbf{B}_e) \rangle}}. \quad (2.68)$$

Значение  $\Delta$ , полученное в эксперименте для преобразователя Холла ПХЭ606117А составило  $2 \cdot 10^{-2}$ , ПХЭ602117А –  $2 \cdot 10^{-3}$ . Это позволяет сделать вывод, что соотношения взаимности (2.63) действительны с точностью выполняемых электрических измерений и в нестационарном режиме.

### 2.5.4 Измерение температурного градиента

Несмотря на выполнение соотношений взаимности для измерений из равновесного состояния в технически важных применениях ожидание установления равновесия при коммутации недопустимо, поскольку в этом случае потребуются значительные паузы между измерительными тактами. На основе анализа

предварительного исследования, описанного в п. 2.5.2, можно предположить, что в чувствительной пленке имеется большой градиент температуры.

Для исследования переходных процессов преобразователя Холла был модифицирован – к каждой из четырех контактных площадок (Рисунок 2.17(б)) был припаян спай одной из четырех медно-константановых термопар. Второй спай термопар размещался на алюминиевой контактной панели (пунктирный прямоугольник на Рисунке 2.17(в) через тонкий изолирующий слой. Термоэдс с двух термопар измеряется одновременно двумя синхронно работающими каналами АЦП, разность измеренных напряжений пропорциональна разности температур соответствующих контактных площадок преобразователя Холла с учетом коэффициента Зеебека около 40 мкВ/К. Температурный дрейф напряжения смещения измерительных усилителей порядка 0,1 мкВ/К.

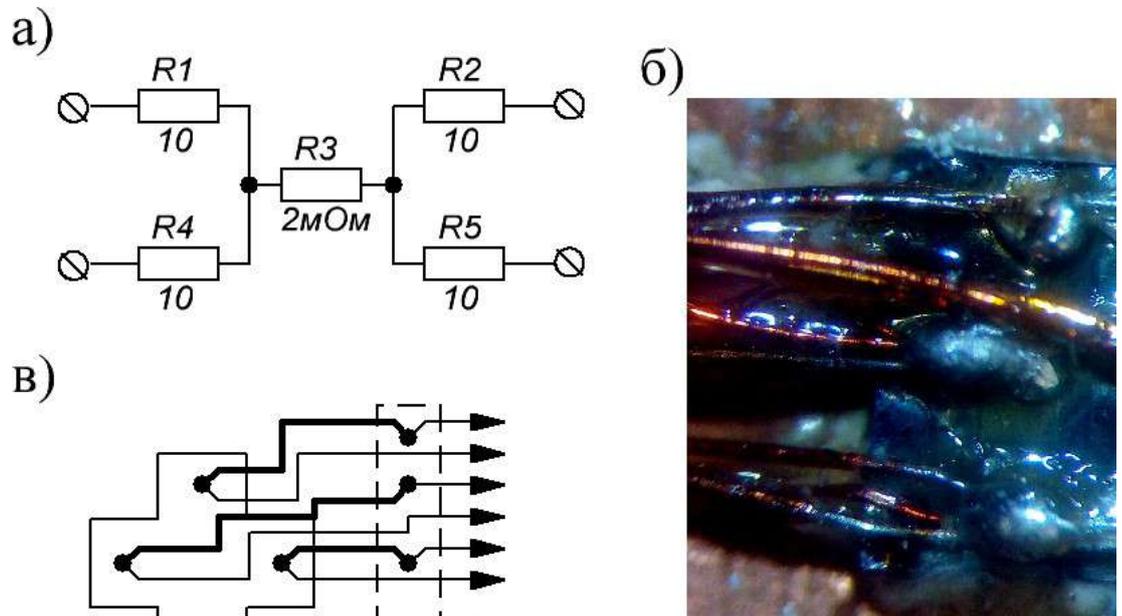


Рисунок 2.17 – Модифицированный преобразователь Холла: а) резистивный эквивалент, б) фотография преобразователя, в) подключение термопар, толстая линия – константановый провод, тонкая линия – медный провод

На Рисунках 2.18 и 2.19 приведены графики динамики напряжения и разности температур между контактами преобразователя в разных режимах коммутации тока. Видно, что напряжение между контактами преобразователя Холла и разность их температур коррелированы. Различие может быть обусловлено теплоемкостью индиевых контактов преобразователя Холла. Эти графики показывают, что переходный процесс обусловлен термоэдс, возникающей между пленкой из антимионида индия и медным проводником.

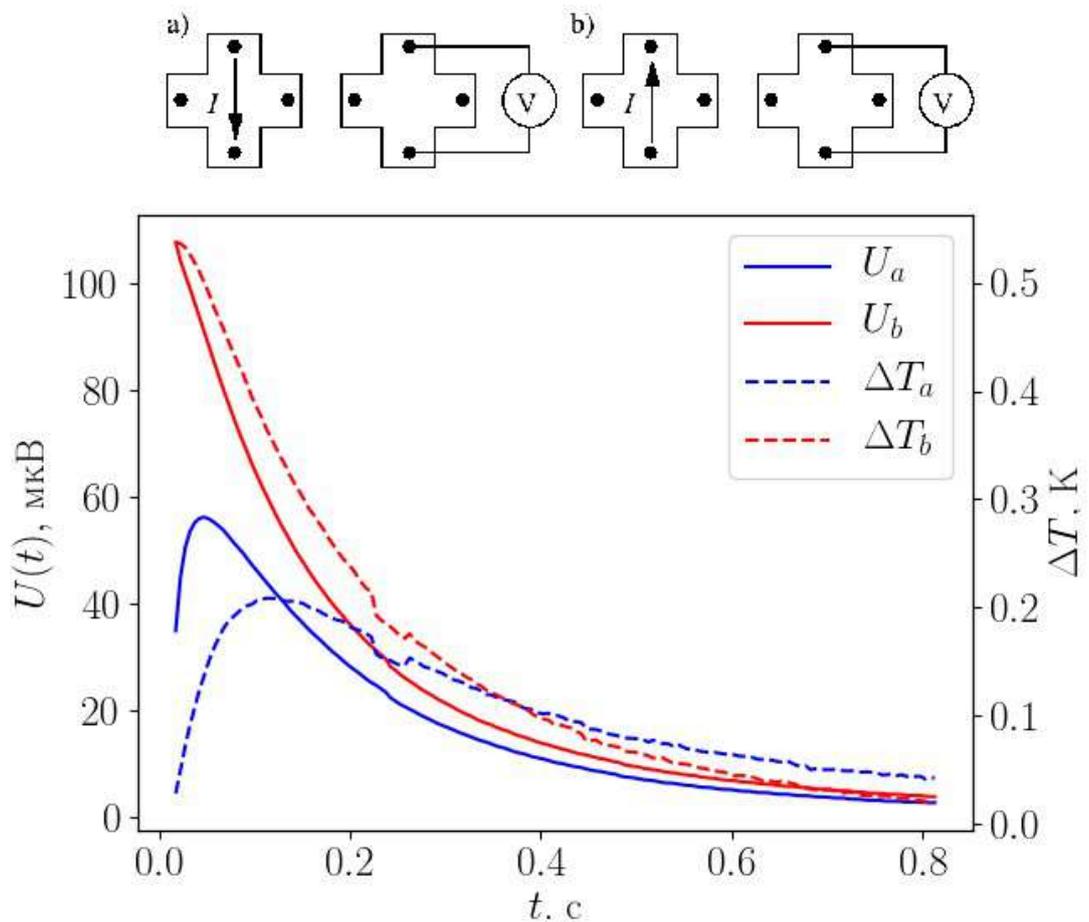


Рисунок 2.18 – Переходные процессы для напряжения и разности температур на контактах преобразователя Холла для направлений тока а) и б)

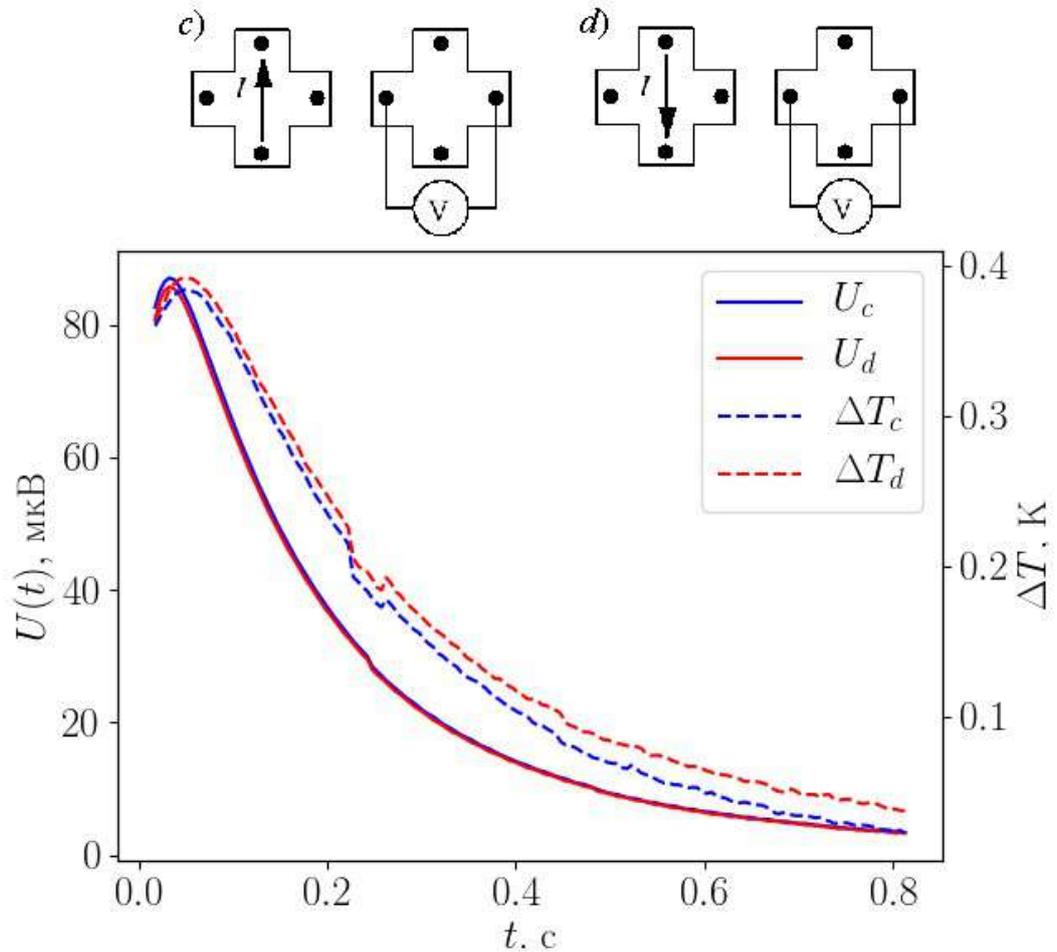


Рисунок 2.19 – Переходные процессы для напряжения и разности температур на контактах преобразователя Холла для направлений тока с) и d)

На Рисунках 2.18 и 2.19 видно различие между переходными процессами в преобразователе Холла после переключения тока в различных направлениях (синие и красные линии). Это значит, что нагрев пленки преобразователя Холла определяется его направлением. Эта асимметрия может быть обусловлена теплом Пельтье, выделяющимся между индиевым контактом и пленкой преобразователя Холла из антимонида индия. В пользу этого объяснения говорит отмеченная в п. 2.5.2 пропорциональность амплитуды переходного процесса значению тока.

## 2.6 Выводы по главе

Разработанный метод вычисления системной функции позволяет описывать реакцию преобразователя Холла на неоднородное магнитное поле, что подтверждается экспериментальным результатом при измерении поля системы проводников с током, расположенных на расстоянии порядка размера активной зоны преобразователя. Новизной метода является оригинальный способ вычисления системной функции преобразователя, основанный на решении задач о распределении тока через разные пары контактов. Эффективность метода определяется возможностью использования стандартных средств расчета токов без существенной модификации. Метод может использоваться для проектирования гальваномагнитных устройств, но ограничивается случаем малого самовоздействия тока.

Теоретически доказанные и экспериментально проверенные соотношения взаимности для нелинейного нестационарного элемента – преобразователя Холла обосновывают возможность применения методов измерения напряжения Холла при различных способах коммутации токов в неоднородном магнитном поле в нестационарных условиях. Применимость этих соотношений ограничивается слабой величиной внешнего магнитного поля и квазистационарностью процессов в гальваномагнитной среде.

Из графика 2.12 видно, что возникающая дополнительная погрешность измерения магнитного поля может достигать 30 мкТл, она не компенсируется четырёхтактным алгоритмом коммутации токов и обусловлена действиями эффектов Пельтье и Зеебека в условиях нестационарности и неоднородности температурного поля преобразователя. Выявленные закономерности переходных процессов могут являться основой для разработки метода компенсации этой дополнительной погрешности.

## ГЛАВА 3 МЕТОДЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Во второй главе показано, что в точность измерений холловским преобразователем ограничивается дополнительной погрешностью, обусловленной невозможностью компенсации эффекта Пельтье в магниточувствительной пленке преобразователя с помощью четырехтактного алгоритма (пп. 2.5.2 и 2.5.4).

Еще одним ограничением точности является то, что показания преобразователя Холла не привязаны к абсолютному значению поля, в одном датчике преобразователи Холла имеют разную чувствительность и смещение, следовательно, требуют калибровки. Одним из способов является измерение геомагнитного поля при разных положениях датчика в пространстве, но при этом требуется контролировать модуль геомагнитного поля в процессе всех измерений. Для этого может применяться протонный релаксационный магнитометр, однако стандартный метод обработки его сигнала позволяет получить только одно значение поля за цикл релаксации (3...6 с), что замедляет процедуру калибровки. Для увеличения быстродействия процесса калибровки требуется разработать способ контроля геомагнитного поля в пределах релаксационного цикла.

### 3.1 Аддитивная температурная погрешность при разных последовательностях коммутации токов

#### 3.1.1 Компенсация термоэдс джоулева тепла

При проведении измерений с одновременной компенсацией геомагнитного поля вычисленное напряжение Холла содержит только некомпенсированное смещение:

$$U_H(t) = U_{TH}(t) = (U_{T1}(t) + U_{T2}(t) - U_{T3}(t) - U_{T4}(t)) / 4, \quad (3.1)$$

где  $t$  отсчитывается от начала каждого такта.

Предположим, что теплоемкость материала преобразователя не зависит от температуры, связь разности температуры пар контактов  $ab$  и  $cd$  с тепловыделением

определяется решением линейного уравнения теплопроводности. При работе по четырехтактному алгоритму можно ввести четыре функции для каждой из пар контактов  $\Delta T_{kab}(t), \Delta T_{kcd}(t)$ , где  $k = 1, 2, 3, 4$  – индексы, соответствующие тактам алгоритма.

Будем учитывать, что ток при протекании через пленку приводит к выделению джоулевого тепла и теплового потока, создаваемого эффектом Пельтье. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta T_{3ab}(t) &= \Delta T_{1ab}(t) = I^2 f_{13cd}(t); \quad \Delta T_{4ab}(t) = \Pi g_{24ab}(t) + I^2 f_{24ab}(t); \\ \Delta T_{2ab}(t) &= -\Pi g_{24ab}(t) + I^2 f_{24ab}(t); \quad \Delta T_{4cd}(t) = \Delta T_{2cd}(t) = I^2 f_{24ab}(t); \\ \Delta T_{3cd}(t) &= -\Pi g_{13cd}(t) + I^2 f_{13cd}(t); \quad \Delta T_{1cd}(t) = \Pi g_{13cd}(t) + I^2 f_{13cd}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь функции времени  $f$  описывают реакцию на тепловые процессы, вызванные джоулевым теплом, функции  $g$  – эффектом Пельтье,  $\Pi$  – коэффициент Пельтье материала чувствительной пленки. Цифровые индексы обозначают номера тактов, для которых используются эти функции, буквенные индексы – названия контактов, через которые пропускался ток.

Для четырехтактного алгоритма разница температур в каждом такте определяется бесконечной суммой функций  $\Delta T_{kab}(t), \Delta T_{kcd}(t)$ , смещенных на времена, кратные длительности такта  $\tau$ . Оборвем эти суммы на третьих слагаемых и запишем выражения для термоэдс между контактами во время каждого такта:

$$\begin{aligned} U_{T1} &= \varepsilon(\Delta T_{1ab}(\tau) + \Delta T_{4ab}(2\tau) + \Delta T_{3ab}(3\tau)); \\ U_{T2} &= \varepsilon(\Delta T_{2cd}(\tau) + \Delta T_{1cd}(2\tau) + \Delta T_{4cd}(3\tau)); \\ U_{T3} &= \varepsilon(\Delta T_{3ab}(\tau) + \Delta T_{2ab}(2\tau) + \Delta T_{1ab}(3\tau)); \\ U_{T4} &= \varepsilon(\Delta T_{4cd}(\tau) + \Delta T_{3cd}(2\tau) + \Delta T_{2cd}(3\tau)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\varepsilon$  – коэффициент Зеебека. Следовательно, общий вклад термоэдс в результате измерения напряжения Холла с учетом соотношений (3.3) и второго соотношения Томпсона [72] имеет вид:

$$\begin{aligned}
U_{TH} &= \varepsilon(\Delta T_{1ab}(\tau) + \Delta T_{2cd}(\tau) - \Delta T_{3ab}(\tau) - \Delta T_{4cd}(\tau) + \Delta T_{4ab}(2\tau) + \Delta T_{1cd}(2\tau) - \Delta T_{2ab}(2\tau) + \\
&- \Delta T_{3cd}(2\tau) + \Delta T_{3ab}(3\tau) + \Delta T_{4cd}(3\tau) - \Delta T_{1ab}(3\tau) - \Delta T_{2cd}(3\tau))/4 = \\
&= \varepsilon^2 IT(g_{24ab}(2\tau) + g_{13ab}(2\tau))/2.
\end{aligned}$$

Таким образом, четырехтактный алгоритм позволяет скомпенсировать погрешность, обусловленную квадратичным по току процессом, то есть джоулевым теплом. Линейный по току процесс, связанный с эффектом Пельтье, не может быть скомпенсирован четырехтактным алгоритмом. Он приводит к смещению порядка 10...30 мкТл значения измеряемой индукции магнитного поля, которое зависит от температуры.

### 3.1.2 Компенсация термоэдс тепла Пельтье

Для компенсации эффекта Пельтье разработан новый алгоритм коммутации токов, включающий в себя такты с нулевым значением тока через преобразователь. Дополнительной сложностью при разработке такого алгоритма является то, что добавление тактов с нулевым значением тока существенно изменяют тепловой режим работы преобразователя.

Схема разработанного алгоритма показана на Рисунке 3.1. Он состоит из двадцати тактов, разделенных на четыре одинаковых блока, каждый из которых, кроме обычных тактов четырехтактного алгоритма, содержит один такт с нулевым значением тока через преобразователь. Для всех тактов можно поступить аналогично четырехтактному случаю и записать выражения термоэдс для всех тактов:

$$\begin{aligned}
U_{T11} &= \varepsilon(F_{1ab}(\tau) + F_{3ab}(3\tau)); & U_{T21} &= \varepsilon(F_{2cd}(\tau) + F_{1cd}(2\tau)); & U_{T31} &= \varepsilon(F_{3ab}(\tau) + F_{2ab}(2\tau) + F_{1ab}(3\tau)); \\
U_{T41} &= \varepsilon(F_{4cd}(\tau) + F_{3cd}(2\tau) + F_{2cd}(3\tau)); & U_{T10} &= \varepsilon(F_{4ab}(2\tau) + F_{3ab}(3\tau)); \\
U_{T22} &= \varepsilon(F_{2cd}(\tau) + F_{4cd}(3\tau)); & U_{T32} &= \varepsilon(F_{3ab}(\tau) + F_{2ab}(2\tau)); & U_{T42} &= \varepsilon(F_{4cd}(\tau) + F_{3cd}(2\tau) + F_{2cd}(3\tau)); \\
U_{T12} &= \varepsilon(F_{1ab}(\tau) + F_{4ab}(2\tau) + F_{3ab}(3\tau)); & U_{T20} &= \varepsilon(F_{1cd}(2\tau) + F_{4cd}(3\tau)); \\
U_{T33} &= \varepsilon(F_{3ab}(\tau) + F_{1ab}(3\tau)); & U_{T43} &= \varepsilon(F_{4cd}(\tau) + F_{3cd}(2\tau)); & U_{T13} &= \varepsilon(F_{1ab}(\tau) + F_{4ab}(2\tau) + F_{3ab}(3\tau)); \\
U_{T23} &= \varepsilon(F_{2cd}(\tau) + F_{1cd}(2\tau) + F_{4cd}(3\tau)); & U_{T30} &= \varepsilon(F_{2ab}(2\tau) + F_{1ab}(3\tau));
\end{aligned}$$

$$U_{T44} = \varepsilon(F_{4cd}(\tau) + F_{2cd}(3\tau)); \quad U_{T14} = \varepsilon(F_{1ab}(\tau) + F_{4ab}(2\tau)); \quad U_{T24} = \varepsilon(F_{2cd}(\tau) + F_{1cd}(2\tau) + F_{4cd}(3\tau));$$

$$U_{T34} = \varepsilon(F_{3ab}(\tau) + F_{2ab}(2\tau) + F_{1ab}(3\tau)); \quad U_{T40} = \varepsilon(F_{3cd}(2\tau) + F_{2cd}(3\tau)).$$

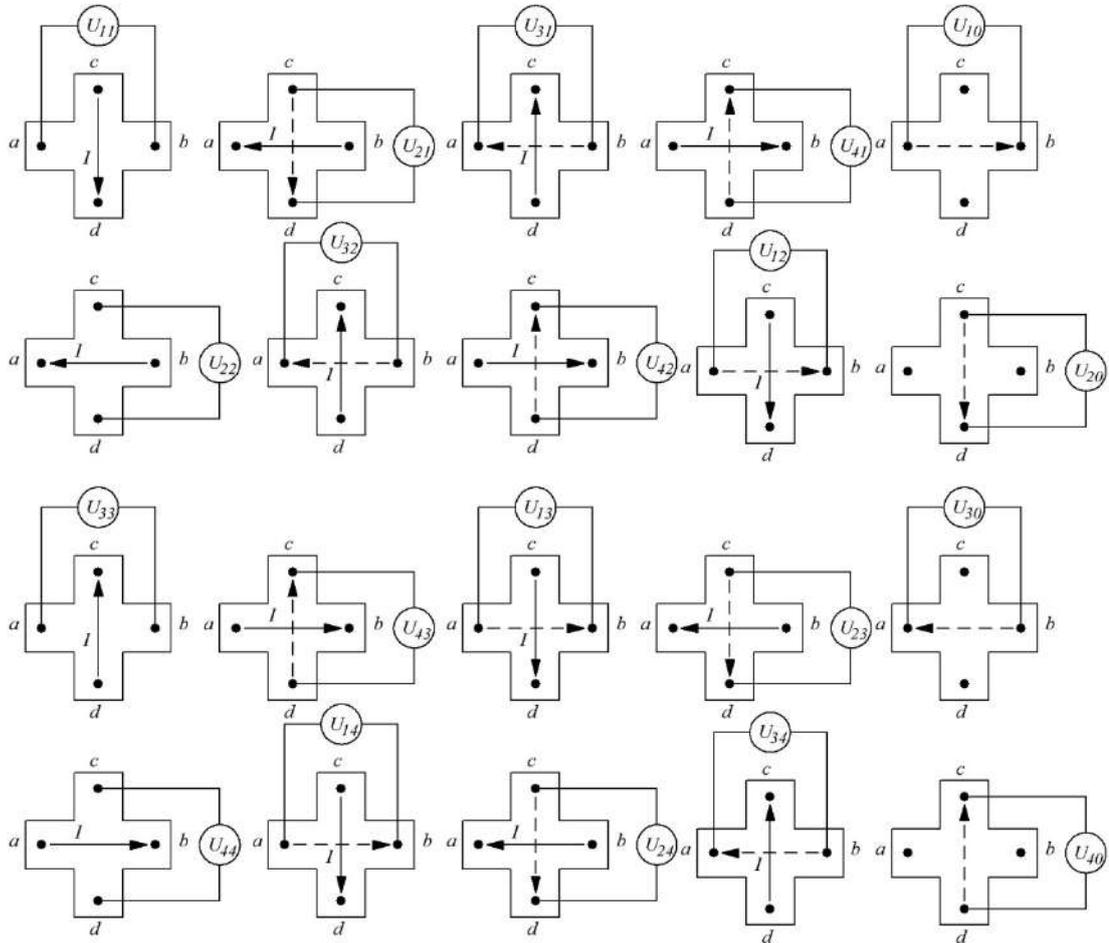


Рисунок 3.1 – Схема нового алгоритма коммутации токов преобразователя Холла (пунктиром показано направление тока на предыдущем такте)

Для каждого из блоков ошибка, вычисляемая по последней формуле (3.1) для соответствующих напряжений каждого блока, имеет вид:

$$U_{TH1} = U_{TH} - \frac{\varepsilon}{4}(F_{4ab}(2\tau) + F_{4cd}(3\tau));$$

$$U_{TH2} = U_{TH} - \frac{\varepsilon}{4}(F_{1cd}(2\tau) - F_{1ab}(3\tau)); \quad (3.4)$$

$$U_{TH3} = U_{TH} + \frac{\varepsilon}{4}(F_{2ab}(2\tau) - F_{2cd}(3\tau));$$

$$U_{TH4} = U_{TH} + \frac{\varepsilon}{4}(F_{3cd}(2\tau) + F_{3ab}(3\tau)).$$

Для тактов с нулевым током строим комбинацию, аналогичную напряжению Холла:

$$\begin{aligned} U_{TH0} &= \\ &= \frac{\varepsilon}{4}(F_{4ab}(2\tau) + F_{3ab}(3\tau) + F_{1cd}(2\tau) + F_{4cd}(3\tau) - F_{2ab}(2\tau) - F_{1ab}(3\tau) - F_{3cd}(2\tau) - F_{2cd}(3\tau)) = (3.5) \\ &= \frac{\varepsilon^2 IT}{2}(g_{24ab}(2\tau) + g_{13ab}(2\tau)). \end{aligned}$$

Ошибка среднего напряжения Холла, построенного из результатов (3.4) для каждого блока, составляет

$$\langle U_{TH} \rangle = \frac{U_{TH1} + U_{TH2} + U_{TH3} + U_{TH4}}{4} = \frac{3\varepsilon^2 IT}{8}(g_{24ab}(2\tau) + g_{13ab}(2\tau)). (3.6)$$

Анализируя уравнения (3.5) и (3.6), получаем, что температурная зависимость может быть скомпенсирована вычитанием из усредненного напряжения Холла величины  $\frac{3}{4}U_{TH0}$ .

### 3.1.3 Сравнение величины аддитивной температурной погрешности холловского магнитометра в разных режимах коммутации токов

Экспериментальная проверка работы алгоритма производилась в диапазоне от 20 до 60 °С в поле менее 0,1 мкТл на описанной в п. 2.5.1 установке. Температура в эксперименте контролировалась термопарой К-типа, подключенной к измерительной схеме аналогичной измерителю напряжения Холла. Для преобразователя Холла ПХЭ602117А зависимость аддитивной части напряжения удалось снизить с 33 нВ/К для четырехтактного алгоритма до 1 нВ/К, что приблизительно соответствует снижению дополнительной температурной погрешности магнитометра с 33 нТл/К до

1 нТл /К. Для проведения измерений корпус преобразователя помещался в кипящую воду и затем остывал до комнатной температуры.

### 3.2 Методы обработки сигналов свободной индукции релаксационного магнитометра

Калибровку векторного холловского магнитометра осуществляют в однородном известном магнитном поле [73]. Для повторения подобной схемы разработан релаксационный магнитометр на основе измерения параметров сигнала свободной прецессии ядерных спинов протонов воды (п. 1.1.3). Его подробное описание дано в Приложении Б. Существующие методы обработки сигнала такого магнитометра позволяют измерять одно значение поля за один релаксационный цикл, занимающий время порядка нескольких секунд [25]. Для увеличения быстродействия процесса калибровки предлагается исследовать методы измерения мгновенной частоты на сигналах свободной ядерной индукции с целью обеспечения измерений в пределах одного релаксационного цикла.

Сравнение описанных методов проводилось численным моделированием для сигнала свободной прецессии в виде

$$x[n] = A \sin(2\pi f n / f_d) \exp(-\gamma n) + \xi[n], \quad (3.7)$$

где  $\gamma$  – коэффициент экспоненциального затухания сигнала, а  $\xi$  – аддитивный Гауссов шум. Частота дискретизации  $f_d$  выбрана 10 МГц, что соответствует реальной частоте дискретизации в разработанном релаксационном магнитометре, частота сигнала  $f = 2000$  Гц, что соответствует частоте сигнала затухания свободной индукции в поле Земли.

Поскольку зашумленность сигнала затухания свободной индукции является главной проблемой при определении частоты ядерного магнитного резонанса, каждый из предложенных методов исследован на устойчивость к шумам. Для этого положим в модели (3.7) коэффициент затухания  $\gamma = 0,0001$  и определим зависимость

дисперсии оценки и смещения каждого из методов от коэффициента сигнал/шум (КСШ) для  $10^5$  отсчетов сигнала.

На Рисунке 3.2 приведен график зависимости дисперсии оценки частоты от КСШ.

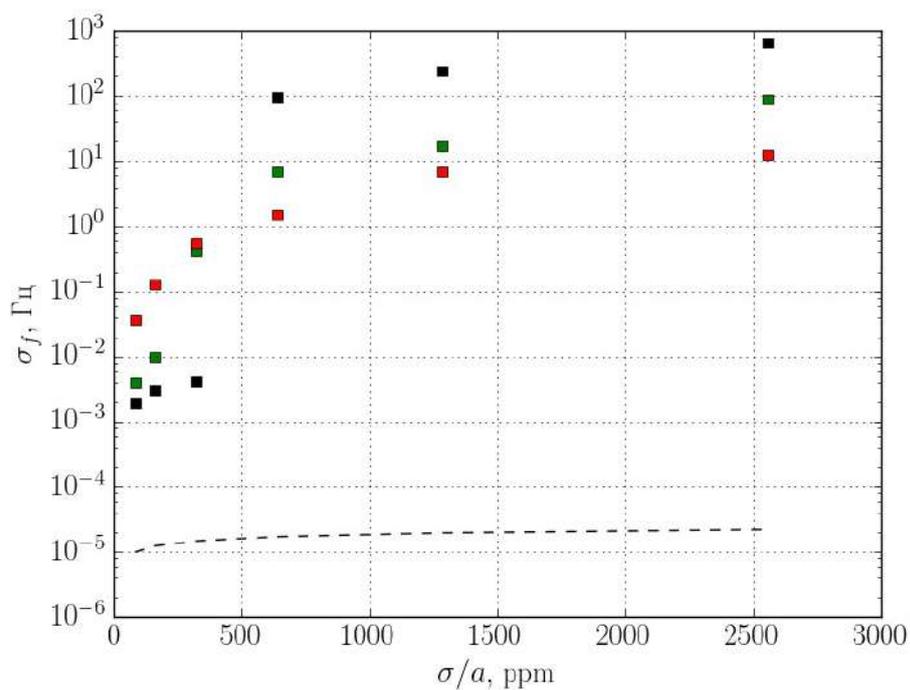


Рисунок 3.2 – График зависимости дисперсии оценки частоты от КСШ. Черным обозначены результаты с использованием метода периодомера, красным – пятиточечного метода и зеленым – метода Прони. Пунктирной линией обозначен предел Рао – Крамера для заданных модельных сигналов (1.22), (1.23)

На Рисунке 3.3 приведен график зависимости смещения оценки частоты сигнала свободной индукции методов от КСШ.

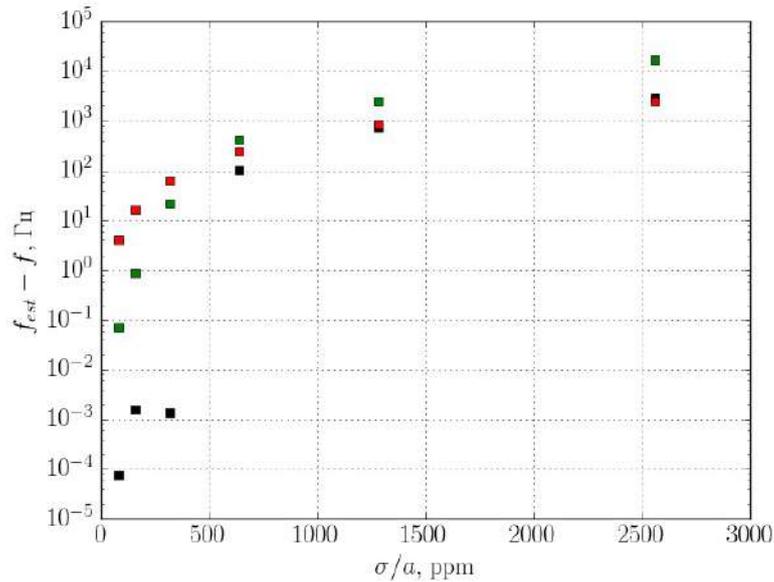


Рисунок 3.3 – График зависимости смещения методов от КСШ. Черным обозначены результаты с использованием метода периодомера, красным – пятиточечного метода и зеленым – метода Прони

Для сравнения производительности методов измерялось время работы каждого из алгоритмов, реализованных в C#. Для сигнала, содержащего  $10^6$  отсчетов, время работы метода Прони составило 10 секунд, время работы пятиточечного метода и метода периодомера составили по 22 миллисекунды.

Сравнения показали, что периодомер неустойчив к шумам и при КСШ, близком к ожидаемому в действующем измерителе, имеет значительно большую дисперсию и смещение, чем метод Прони и пятиточечный метод. Учитывая, что метод Прони требует больших вычислительных затрат, для модельных сигналов пятиточечный метод квазиоптимален при поиске частоты сигналов затухания свободной индукции.

Для определения погрешностей релаксационного магнитометра использовался дифференциальный метод. Погрешность измерений вычислялась по разности значений индукции магнитного поля  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$ , полученных с двух идентичных одновременно работающих приборах. При этом  $B_1(t) = B(t) + \delta B_1(t)$  и  $B_2(t) = B(t) + \delta B_2(t)$ , где  $B(t)$  –

динамика геомагнитного поля,  $\delta B_1(t)$  и  $\delta B_2(t)$  – приведенные ко входу флуктуации для каждого из приборов. Также  $\Delta B(t) = B_1(t) - B_2(t) = \delta B_1(t) - \delta B_2(t)$  не зависит от динамики геомагнитного поля. При условии, что  $\delta B_1(t)$  и  $\delta B_2(t)$  – независимые случайные процессы с дисперсией  $\sigma_B^2$ , дисперсия процесса  $\Delta B(t)$   $\sigma_{\Delta B}^2 = 2\sigma_B^2$ . Поэтому, измеряя  $\Delta B(t)$ , можно оценить чувствительность каждого прибора в отдельности. Для этого проводились измерения с двумя одинаковыми датчиками, разнесенными на расстояние 10 см и подключенными к двум одинаковым одновременно работающим приборам. Измерения проводились в однородном геомагнитном поле. Сигнал затухания свободной индукции обрабатывался тремя различными цифровыми фильтрами с центральной частотой 2165 Гц.

Порог чувствительность прибора  $V_B$  оценивался по среднеквадратичному отклонению (СКО)  $\sigma_{\Delta B}$  разности показаний с датчиков в 25 измерениях по формуле:

$$V_B = \frac{\sigma_{\Delta B}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2M\gamma}} \sum_{i=1}^M (\Delta f_i - \langle \Delta f_i \rangle)^2,$$

где  $M$  – количество выборок,  $\Delta f_i$  – разность частот, оцененных по  $K = N = 937500$  отсчетов в трехсекундном измерительном цикле,  $\langle \Delta f_i \rangle$  – разность частот, усредненная по всем выборкам. Для фильтра с шириной полосы 8 Гц порог чувствительность составил 31 пТл, а для фильтра с шириной полосы 2 Гц – 16,5 пТл при времени измерения 3 с.

Для определения точности измерения мгновенных значений индукции магнитного поля в пределах одного релаксационного цикла оценивалась динамика разности частот  $\Delta f[n]$  по окну 3,2 мс ( $K = 1001$ ,  $N = 937500$ ). Затем по  $M = 25$  выборкам строилась спектральная плотность мощности (СПМ)  $G[v]$  оценок мгновенных значений разности индукции магнитного поля:

$$G[v] = \frac{T}{ME\gamma^2} \sum_{i=1}^M |S_i[v]|^2,$$

где  $S_i[\nu]$  – дискретный спектр разности оценок мгновенных частот  $\Delta f[n]$   $i$ -ой выборки,  $T = N\Delta t$  – время, за которое производилась оценка частоты,  $E$  – энергия гауссового окна.

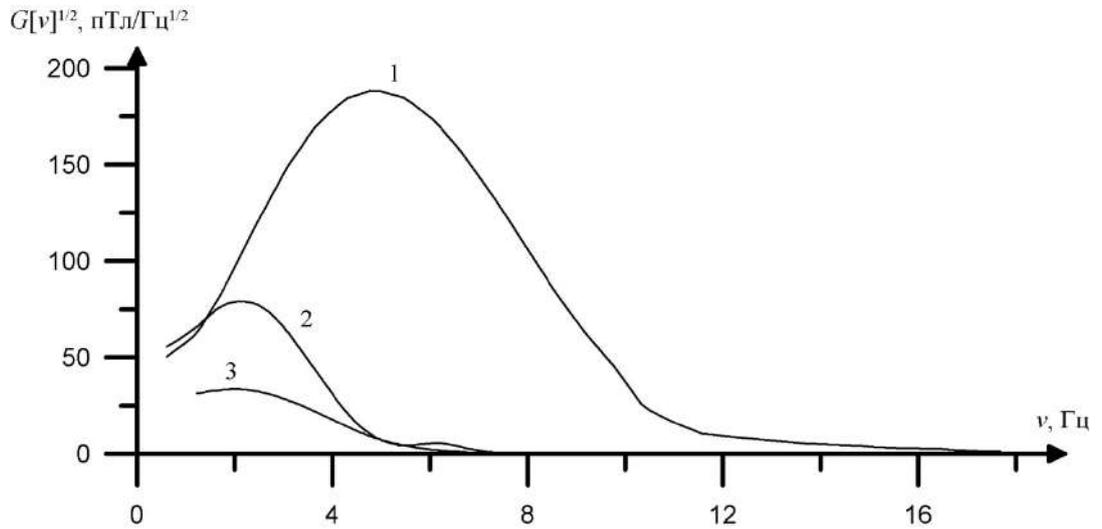


Рисунок 3.4 – График корня СПМ оценки мгновенного значения разности индукции магнитного поля для разной полосы пропускания цифрового фильтра: 1 – 8 Гц, 2 – 4 Гц, 3 – 2 Гц

На Рисунке 3.4 представлены графики спектральных интенсивностей приведенного ко входу каждого из датчиков магнитного шума  $B_n(\nu) = \sqrt{G[\nu]}/2$  при обработке сигналов тремя разными цифровыми фильтрами. На частоте 1 Гц величина  $B_n$  составляет примерно 40 пТл/Гц<sup>1/2</sup> при обработке сигнала данных цифровыми фильтрами с полосой пропускания 8 Гц и 4 Гц, и 20 пТл/Гц<sup>1/2</sup> при полосе пропускания фильтра 2 Гц. Погрешность определения СПМ  $\delta G[\nu]$  вычислялась по формуле:

$$\delta G[\nu] = \frac{T^2}{\gamma^2 M E^2} \sum_{i=1}^M \left( |S_i[\nu]|^2 - \langle |S_i[\nu]|^2 \rangle \right)^2.$$

Здесь  $\langle |S_i[\nu]|^2 \rangle$  – среднее значение спектра  $\Delta f[n]$ . Относительные погрешности составили не более 2% и на графике не показаны.

Для полученных в ходе измерений отношения СКО шума  $\sigma$  к начальной амплитуде сигнала  $a$  составляет примерно 10. При оценке предельно возможного СКО отсчетов индукции магнитного поля для сигнала с таким КСШ использовался критерий

Рао – Крамера [63]. В качестве модели выбран экспоненциально затухающий синусоидальный сигнал  $x(t) = a \exp(-\lambda t) \sin(2\pi f t + \varphi)$ . Здесь  $a$  – начальная амплитуда сигнала,  $\lambda$  – коэффициент затухания,  $f$  – частота сигнала,  $\varphi$  – начальная фаза. Для дискретизированного с временным интервалом  $\Delta t = 3,2$  мкс сигнала  $x(t)$ , содержащего  $N = 937500$  отсчетов сигнала при отношении СКО шума  $\sigma$  к начальной амплитуде сигнала  $a$  порядка 10 предел Рао – Крамера имеет значение  $5 \cdot 10^{-5}$  Гц, что соответствует СКО индукции магнитного поля порядка 1,2 пТл. Расчет предела Рао – Крамера производился при помощи метода, описанного в п. 1.3.3 с учетом априорной неопределенности четырех параметров  $a, \lambda, f, \varphi$ .

### 3.3 Выводы по главе

На основе результатов второй главы исследования удалось разработать метод компенсации аддитивной погрешности, связанной с проявлением эффекта Пельтье, и снизить аддитивный температурный дрейф для преобразователя ПХЭ602117А с уровня 33 нТл/К до 1 нТл/К. Новизной этого метода является использование тактов с нулевым значением тока через преобразователь. Применяемый подход может быть использован и в других типах измерительных преобразователей со схожими причинами дополнительной погрешности. Применимость метода ограничена предположением о малости мультипликативной температурной погрешности

Применение параметрических методов оценивания мгновенной частоты сигнала релаксационного магнитометра позволило достичь уровня чувствительности порядка 20 пТл и впервые сделало возможным производить оценивание изменяющегося поля в пределах релаксационного цикла. Подобный метод обработки сигнала свободной индукции может быть использован и для исследования сигналов свободной индукции и спинового эха в магнитометрах и спектрометрах. Ограничением является предположение о квазигармоническом характере сигнала релаксации, которое может нарушаться в сильно неоднородных полях.

## **ГЛАВА 4 МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Одним из наиболее эффективных подходов к решению обратной магнитостатической задачи (п. 1.3.1) является ее параметризация. При этом существенно сокращается число неизвестных переменных, что является одним из средств регуляризации такой задачи.

Решение может быть осуществлено по измеренным пространственным распределениям магнитного поля, при этом следует учитывать не только погрешности магнитометра, рассмотренные во второй и третьей главе, но и погрешности системы перемещения. Объединение холловского магнитометра и системы перемещения требует разработки другой процедуры калибровки (отличной от п. 1.2.3), учитывающей расположение образца относительно системы координат системы перемещения.

В рамках параметрического подхода к решению обратной магнитостатической задачи необходимо разработать и апробировать математическую модель ферромагнетизма, учитывающую изменение состояния тела на примере необратимых деформаций для разработки метода их обнаружения.

### **4.1 Холловский магнитный микроскоп**

Холловский магнитный микроскоп представляет собой аппаратно-программный комплекс определения параметров токовых распределений на поверхности тонкого образца по измеряемой вне его топографии магнитного поля. Аппаратная часть состоит из трехкомпонентного холловского магнитометра [70] и системы позиционирования датчиков. Программная часть позволяет осуществить сбор данных по выбранной прямоугольной сетке.

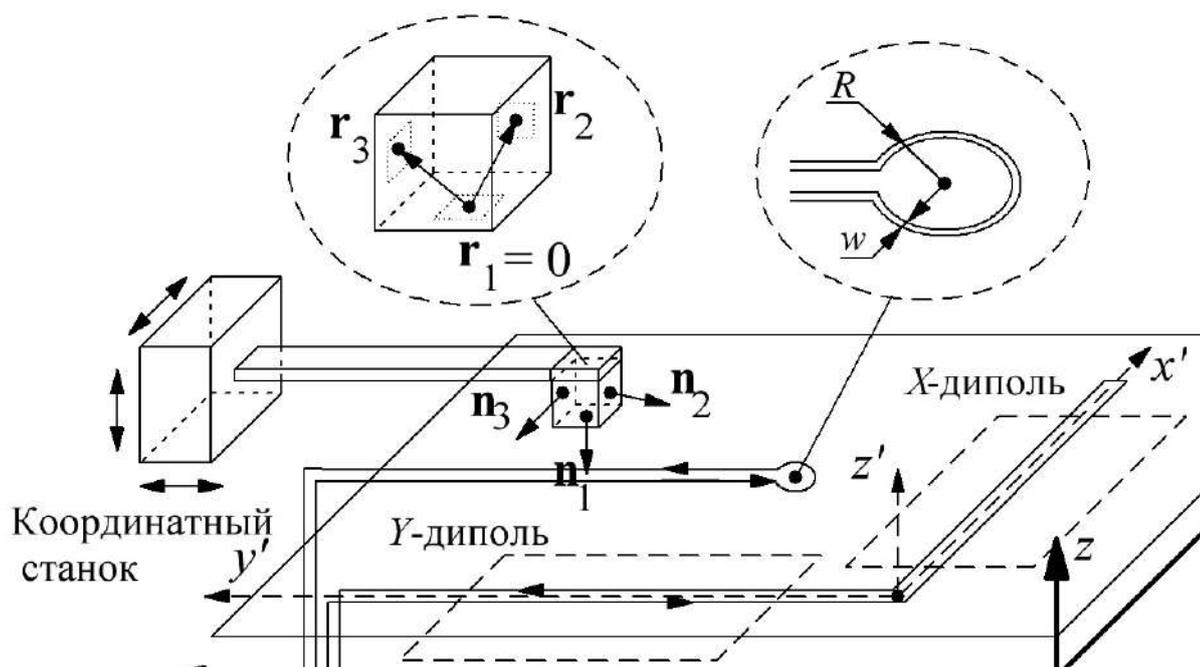


Рисунок 4.1 – Холловский магнитный микроскоп

Система перемещения реализована на базе программно-управляемого станка EP2006H. Точность позиционирования в горизонтальной плоскости составляет 5 мкм, а по вертикали 9 мкм. Управление системой перемещения и магнитометром осуществляется специально разработанной интерфейсной программой. Она в автоматическом режиме запускает процесс измерения в моменты, когда шаговые двигатели находятся в покое и магнитное поле тока, текущего по их обмоткам, не вносит ошибки в результаты измерений. Для уменьшения систематической ошибки при измерении топография магнитного поля исследуемого образца, датчик магнитометра и предметный столик вынесены на прикрепленную к станку немагнитную консоль. С одной стороны, ее использование уменьшает искажение магнитного поля деталями станка, но с другой стороны использование консоли приводит к появлению дополнительной погрешности при позиционировании преобразователя, которую необходимо компенсировать калибровкой.

#### 4.1.1 Калибровка магнитного микроскопа по ленточным токовым диполям

В процессе калибровки и определения характеристик магнитного микроскопа исследованы распределения магнитного поля, создаваемые токовыми диполями, отфрезерованными станком EP2006H на фольгированном текстолите и закрепленными на плоском предметном столике. Использовались кольцевые и ленточные диполи. Последние задают базовую систему координат предметного столика  $Oxyz$ .

Токовые ленточные диполи представляют собой линейные проводники, по которым протекает одинаковый по значению, но противоположный по направлению ток. На поверхности фольги были выфрезерованы Г-образные пары проводников, к одному концу которых подключен источник тока, а другой конец замкнут. На расстоянии много меньшем расстояния до краев системы, диполь создает распределение, аналогичное бесконечному ленточному диполю. Г-образная система проводников позволяет использовать две области около проводников X-диполь и Y-диполь, в которых ленты диполей направлены вдоль соответствующих осей. Толщина проводящего слоя составляет  $d = 35$  мкм, ширина проводников  $w = 100$  мкм, расстояние между центрами проводников  $l = 200$  мкм. Длина проводников значительно больше расстояния между ними (Рисунок 4.2).

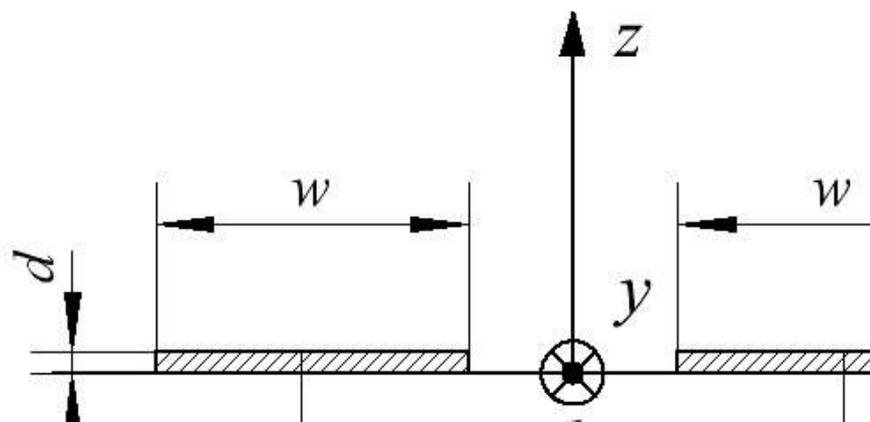


Рисунок 4.2 – Y-диполь

В реальном эксперименте распределение нормальной компоненты магнитного поля производится на плоскости  $O'x'y'$ , которая смещена и повернута относительно плоскости предметного столика  $Oxy$ . Система координат измерителя  $O'x'y'z'$  получается сдвигом на вектор  $\{0, 0, h\}$  и последовательными поворотами вокруг осей  $z, x, z$  на углы Эйлера: угол прецессии  $\alpha$ , угол нутации  $\beta$  и на угол собственного вращения  $\gamma$  системы координат предметного столика  $Oxyz$  [74]. Уравнение плоскости  $O'x'y'$ , в которой перемещается датчик магнитометра, в системе координат предметного столика имеет вид:  $z(x, y) = \sin(\alpha)\text{tg}(\beta)x - \cos(\alpha)\text{tg}(\beta)y + h$ . Вектор индукции магнитного поля в системе координат предметного столика  $Oxyz$  преобразуется к системе координат измерителя  $O'x'y'z'$  через матричное преобразование:

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \\ \tilde{B}_z \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} B_x^m \\ B_y^m \\ B_z^m \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\text{где } \hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Для калибровки магнитного микроскопа следует определить высоту сдвига  $h$ , а также углы прецессии  $\alpha$ , нутации  $\beta$  и собственного вращения  $\gamma$ . Неизвестными калибруемыми параметрами являются также ориентация чувствительной оси  $\mathbf{n}_p$ , расположение преобразователя  $\mathbf{r}_p$ , крутизна  $S_p$  и смещение  $u_{0p}$   $p$ -ого преобразователя. Связь измеряемых напряжений и вектора индукции магнитного поля описывается выражением:

$$u_p(\mathbf{r}) = S_p \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \mathbf{n}_p + u_{0p}. \quad (4.2)$$

В результате исследования выявлено, что поверхность предметного столика имеет значительную для проводимой калибровки кривизну. Для описания этой кривизны используется модель поверхности второй степени. В качестве базовой

системы координат выберем  $O'x'y'z'$ , тогда плоскость с проводниками может быть описана следующим уравнением:

$$z_0(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0. \quad (4.3)$$

Ленточные диполи располагались приблизительно (не хуже 10 градусов) параллельно соответствующим осям  $O'x'y'z'$ .

При калибровке датчиком магнитного микроскопа измеряются двумерные распределения поля размером  $L_x \times L_y$  точек с шагом  $\Delta_x, \Delta_y$  над  $X$ - и  $Y$ -диполями, при этом напряжения Холла преобразователей датчика  $u_p$  в соответствии с выражением (4.2) могут быть записаны следующим образом:

$$u_p^{(X,Y)}(\mathbf{r}) = S_p \mathbf{B}^{(X,Y)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \mathbf{n}_p + u_{0p}. \quad (4.4)$$

Здесь  $\mathbf{B}^{(X,Y)}$  – индукция магнитного поля, создаваемая системой  $X$ - и  $Y$ -диполей. Она описывается следующими выражениями:

$$B_x^{(X)}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_x}^{L_x} \left\{ \frac{(k_1(z - z_0(x', y_{01}(x')))) - (2a_{11}x' + a_{12}y_{01}(x') + a_1)(y - y_{01}(x'))}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{01}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{01}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \times \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{01}(x') + a_1)^2} + \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{02}(x') + a_1)^2} \times \\ \left. \times \frac{(k_1(z - z_0(x', y_{02}(x')))) - (2a_{11}x' + a_{12}y_{02}(x') + a_1)(y - y_{02}(x'))}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{02}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{02}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dx',$$

$$B_y^{(X)}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_x}^{L_x} \left\{ \frac{-(z - z_0(x', y_{01}(x'))) + (2a_{11}x' + a_{12}y_{01}(x') + a_1)(x - x')}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{01}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{01}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \times \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{01}(x') + a_1)^2} + \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{02}(x') + a_1)^2} \times \\ \left. \times \frac{-(z - z_0(x', y_{02}(x'))) + (2a_{11}x' + a_{12}y_{02}(x') + a_1)(x - x')}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{02}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{02}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dx',$$

$$\begin{aligned}
B_z^{(X)}(x, y, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_x}^{L_x} \left\{ \frac{(y - y_{01}(x') - k_1(x - x')) \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{01}(x') + a_1)^2}}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{01}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{01}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(y - y_{02}(x') - k_1(x - x')) \sqrt{1 + k_1^2 + (2a_{11}x' + a_{12}y_{02}(x') + a_1)^2}}{\left( (x - x')^2 + (y - y_{02}(x'))^2 + (z - z_0(x', y_{02}(x')))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dx', \\
B_x^{(Y)}(x, y, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_y}^{L_y} \left\{ \frac{-k_2(z - z_0(x_{01}(y'), y')) + (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)(x - x_{01}(y'))}{\left( (x - x_{01}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{01}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \times \right. \\
&\quad \times \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)^2} + \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{02}(y') + a_2)^2} \times \\
&\quad \left. \times \frac{-k_2(z - z_0(x_{02}(y'), y')) + (2a_{22}y' + a_{12}x_{02}(y') + a_2)(x - x_{02}(y'))}{\left( (x - x_{02}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{02}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dy', \\
B_y^{(Y)}(x, y, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_y}^{L_y} \left\{ \frac{(z - z_0(x_{01}(y'), y')) - (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)(y - y')}{\left( (x - x_{01}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{01}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \times \right. \\
&\quad \times \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)^2} + \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{02}(y') + a_2)^2} \times \\
&\quad \left. + \frac{(z - z_0(x_{01}(y'), y')) - (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)(y - y')}{\left( (x - x_{02}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{02}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dy', \\
B_z^{(Y)}(x, y, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_y}^{L_y} \left\{ \frac{(k_2(y - y') - (x - x_{01}(y'))) \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{01}(y') + a_2)^2}}{\left( (x - x_{01}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{01}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k_2(y - y') - (x - x_{02}(y'))) \sqrt{1 + k_2^2 + (2a_{22}y' + a_{12}x_{02}(y') + a_2)^2}}{\left( (x - x_{02}(y'))^2 + (y - y')^2 + (z - z_0(x_{02}(y'), y'))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} dy'.
\end{aligned}$$

При этом введены следующие обозначения:  $y_{01}(x) = k_1x + b_1 + l\cos(\alpha_1)/2$ ,  $y_{02}(x) = k_1x + b_1 - l\cos(\alpha_1)/2$ ,  $\alpha_1 = \arctg(k_1)$ ,  $x_{02}(y) = k_2y + b_2 + l\cos(\alpha_2)/2$ ,  $x_{01}(y) = k_2y + b_2 - l\cos(\alpha_2)/2$ ,  $\alpha_2 = \arctg(k_2)$ ,  $k_1, k_2$  – коэффициенты наклона  $X$ -диполя и  $Y$ -диполя, соответственно.

Искомыми параметрами являются  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0, k_1, k_2, b_1, b_2$  и все параметры датчиков  $S_p, \mathbf{r}_p, \mathbf{n}_p, u_{0p}$ , где  $p = 0, 1, 2$  – номера преобразователей в датчике. Оценка калибровочных коэффициентов производится путем минимизации функционала ошибки

$$\begin{aligned}
 E = & \sum_{i=-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sum_{j=-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \sum_{p=0}^2 \left( u_p^{(X)}[i, j] - \left( S_p \left( B_x^{(X)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{xp} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + B_y^{(X)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{yp} + B_z^{(X)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{zp} \right) + u_{0p} \right)^2 + (4.5) \\
 & + \sum_{i=-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sum_{j=-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \sum_{p=0}^2 \left( u_p^{(Y)}[i, j] - \left( S_p \left( B_x^{(Y)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{xp} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + B_y^{(Y)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{yp} + B_z^{(Y)}(i\Delta_x - r_{xp}, i\Delta_y - r_{yp}, r_{zp}) n_{zp} \right) + u_{0p} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Начальное приближение оценок строится с помощью генетического алгоритма, для которого задаются границы поиска параметров, исходя из априорной информации:

- перпендикулярность ленточных диполей:  $k_1 + k_2 \ll k_1 - k_2$ ;
- приблизительное расположение преобразователей Холла по осям  $O'x'y'z'$ :  $n_{0x} \gg n_{0y}, n_{0z}, n_{1y} \gg n_{1x}, n_{1z}, n_{2z} \gg n_{2x}, n_{2y}$ ;
- датчики расположены в ограниченной области:  $|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p| < 5 \text{ мм}$ . Для всех  $q, p = 0, 1, 2$ ;
- высота преобразователей над плоскостью проводников не более 5 мм.

Дальнейшая минимизация осуществляется методом нелинейной оптимизации – по алгоритму Нелдера – Мида [75].

Пространственное разрешение оценивалось как по определению координат модельных распределений, так и косвенно в поле с большим градиентом. Дважды измерялось распределение поля вблизи границы никелевой фольги ( $20 \times 20 \times 0,2$  мм), где градиент поля составлял около 100 мкТл/мм. Максимальное отклонение разности этих двух распределений составило  $\pm 0,5$  мкТл, что эквивалентно погрешности позиционирования  $\pm 5$  мкм, соответствующей паспортным значениям станка EP2006H.

#### 4.1.2 Определение параметров токовых диполей

В таблице 1 приведены результаты калибровки по одному преобразователю Холла, чувствительная ось которого находится нормально к поверхности  $Oxy$ . Производилось сканирование распределения поля над лентами (при токе через ленты 104 мА) на участке  $5 \times 1$  мм с шагом по 0,2 мм, при 100 усреднениях поля в каждой точке (Рисунок 4.3). По результатам двух серий экспериментов по одному и тому же ленточному диполю видно, что ошибка определения положения лент с током в пространстве меньше 20 мкм, а точность определения тока через ленты на уровне стабильности источника тока (0,01%).

Вторая серия экспериментов заключалась в определении расстояния между двумя одинаковыми ленточными диполями, расположенными в разных частях предметного столика, по результатам независимых измерений. На первом этапе ток пропускался через первый ленточный диполь, играющий роль калибровочного диполя. На втором этапе ток пропускался через второй ленточный диполь, параметры которого также оценивались. Заданное расстояние было 3,5 мм, а найденное – 3,498 мм, ошибка определяемого параметра составила порядка 2 мкм, что соответствует пределу Рао – Крамера 1.9 мкм для приведенных условий в модели, вычисленной по формулам (1.22), (1.23).

Таблица 1 – Результаты калибровки для одного датчика нормальной компоненты

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$n_x$	$n_y$	$n_z$	$S$	$I$ , мА	$h$ , мм	$x_0$ , мм
-0,25	0,225	0,106	-0,061	-0,307	0,949	0,715	104,152	2,070	2,252
-0,26	0,233	0,109	-0,061	-0,307	0,949	0,715	104,09	2,057	2,250

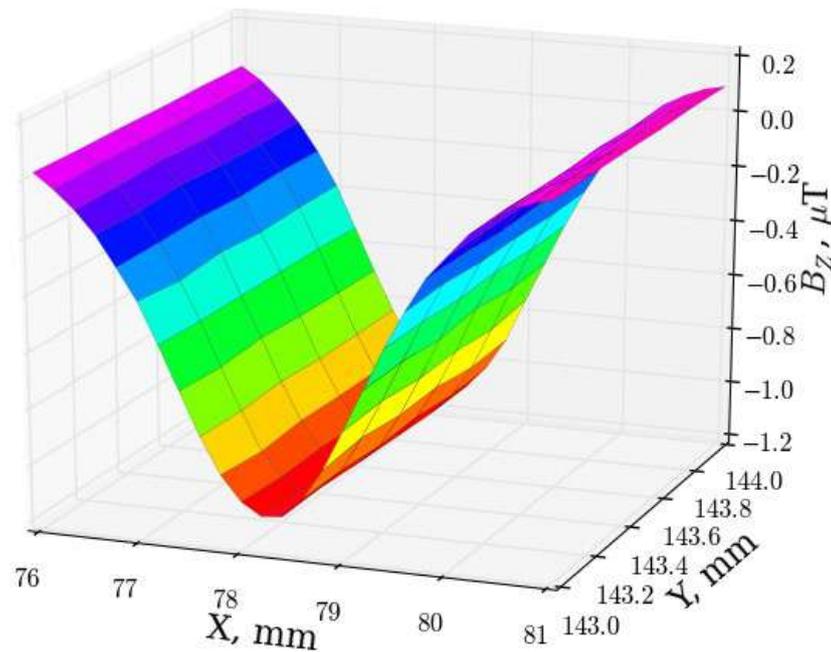


Рисунок 4.3 – Нормальная компонента индукции магнитного поля, создаваемого ленточным диполем

При заданных параметрах распределения и эксперимента значение минимально возможного СКО определяемого параметра  $x_0$  составляет порядка 2 мкм, для значения СКО измеряемой индукции магнитного поля – 0,1 мкТл, которым и обладал используемый магнитометр.

Исходные магнитограммы были исследованы также спектральным методом, предложенным в [76]. Сравнения разрешения параметрического метода со спектральным показало, что, несмотря на отсутствие нулей Фурье-образа

интегрального ядра задачи, восстановление плотности тока по нормальной составляющей индукции магнитного поля возможно с разрешением не лучше, чем полуширина интегрального ядра, что по порядку величины соответствует высоте плоскости измерений над плоскостью образца. Пример восстановленного распределения спектральным методом приведен на Рисунке 4.4.

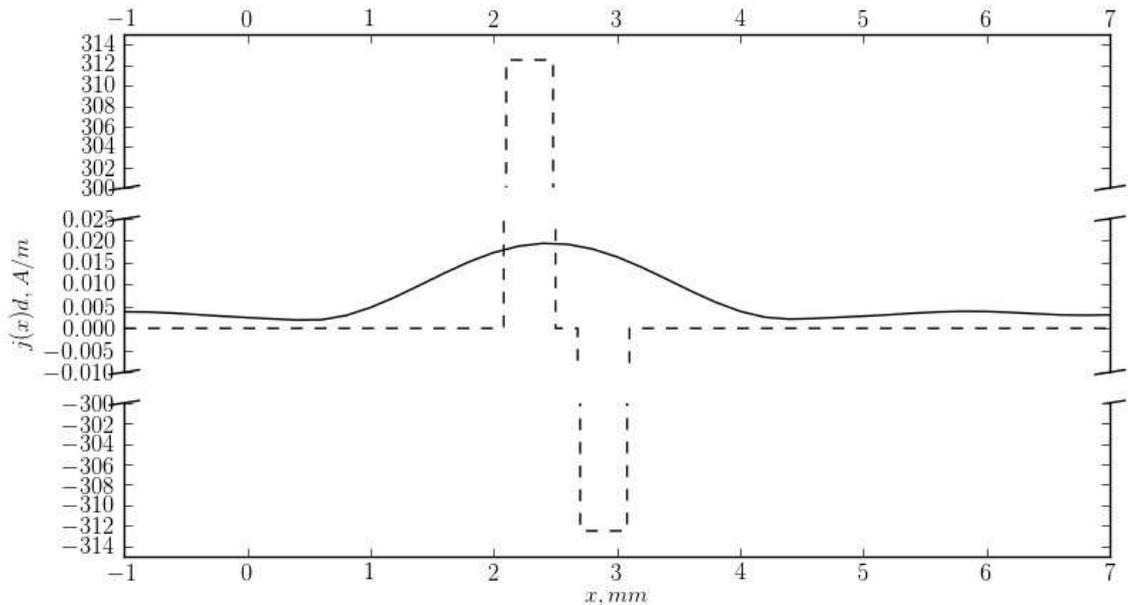


Рисунок 4.4 – Восстановленное спектральным методом распределение тока.

Пунктиром показано заданное распределение тока

Восстановленное спектральным методом распределение тока оказывается по амплитуде на несколько порядков меньше заданного в эксперименте, его форма существенно искажается. При этом определить параметры распределения по восстановленному спектральным методом распределению тока не представляется возможным.

В другом эксперименте определялось пространственное положение круговой петли относительно  $X$ - и  $Y$ -диполей (Рисунок 4.5). Нормальная компонента индукции магнитного поля замкнутой круговой петли с током  $I = 0,1$  А радиуса  $R = 1$  мм, с шириной проводника  $w = 0,1$  мм описывается выражением:

$$\begin{aligned}
B_z(x, y, z) = & -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left( (x-x_0) \cos(\varphi) + (y-y_0) \sin(\varphi) + R + \frac{w}{2} + \right. \right. \\
& + \left. \sqrt{\left( x-x_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \cos(\varphi) \right)^2 + \left( y-y_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \sin(\varphi) \right)^2 + z^2} \right) - \\
& - \frac{R + \frac{w}{2}}{\sqrt{\left( x-x_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \cos(\varphi) \right)^2 + \left( y-y_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \sin(\varphi) \right)^2 + z^2}} - \\
& - \ln \left( (x-x_0) \cos(\varphi) + (y-y_0) \sin(\varphi) + R - \frac{w}{2} + \right. \\
& + \left. \sqrt{\left( x-x_0 - \left( R - \frac{w}{2} \right) \cos(\varphi) \right)^2 + \left( y-y_0 - \left( R - \frac{w}{2} \right) \sin(\varphi) \right)^2 + z^2} \right) + \\
& + \left. \frac{R + \frac{w}{2}}{\sqrt{\left( x-x_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \cos(\varphi) \right)^2 + \left( y-y_0 - \left( R + \frac{w}{2} \right) \sin(\varphi) \right)^2 + z^2}} \right\} d\varphi.
\end{aligned}$$

Поскольку реальная петля имеет отводы, то при подборе коэффициентов область от центра петли до подводящих проводов (включая и их) не используется. При этом отклонение распределения модельной петли от замкнутого кольца с током составляет не более 1%.

Заданное расстояние от центральных линий X- и Y-диполей до центра круговой петли составляют 3,533 мм и 7,173 мм, соответственно. В результате подбора параметров математической модели по методу наименьших квадратов получены следующие значения расстояний:  $x_0 = 3,5364$  мм и  $y_0 = 7,1768$  мм. Таким образом, отклонение от заданного значения меньше 5 мкм. Ошибка определения  $w$  и  $R$  составила порядка 1 мкм, ошибка значения пропускаемого тока составила 1 мА.

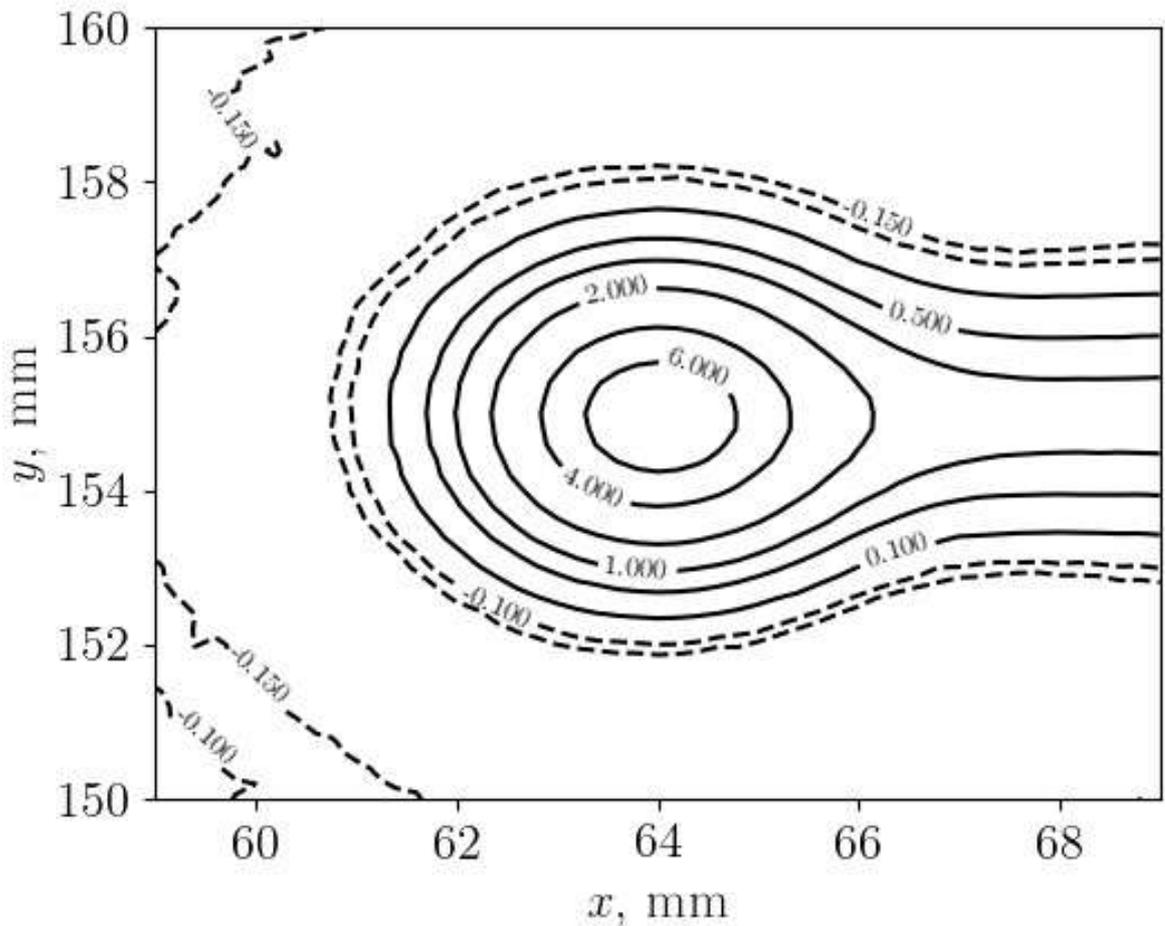


Рисунок 4.5 – Магнитограмма компоненты  $B_z$  в мкТл круговой токовой петли (координаты приведены в  $O'x'y'z'$ , сплошные изолинии соответствуют положительным значениям  $B_z$ , пунктирные – отрицательным)

Вычисленные значения предела Рао – Крамера (1.22) и (1.23) для этого эксперимента, когда СКО отсчетов поля 6 нТл, составляет 0.17 мкм для  $x_0, y_0$ ; 0,41 мкм для  $R$  и 0.1 мА для  $I$ . Видно, что полученная ошибка большей частью обусловлена ограничениями точности системы перемещения. Уменьшение тока через петлю могло бы позволить достичь предела Рао – Крамера и в этом эксперименте, поскольку тогда ошибка системы перемещения была бы сравнимой с погрешностью, вносимой шумом результатов измерений.

## 4.2 Численное моделирование изменения магнитных свойств ферромагнетика при деформации

В качестве объекта исследования для магнитного микроскопа выбрана остаточная намагниченность ферромагнетиков, индуцированная необратимыми деформациями. Вывод модели магнитных свойств ферромагнетика осуществлен проф. Игнатьевым В.К. и Лебедевым Н. Г. при участии автора и изложен в приложении В. Уравнения динамики спинового  $\mathbf{m}$  и орбитального  $\mathbf{l}$  моментов во внешнем поле  $\mathbf{H}$  имеют вид:

$$\alpha \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \beta \left[ \frac{d\mathbf{m}}{dt} \times \mathbf{m} \right] = \gamma \mu_0 [\mathbf{H} \times \mathbf{m}] - \frac{\Omega_l}{\mu_B} (\mathbf{m}\mathbf{l}) [\mathbf{m} \times \mathbf{l}] - \frac{\Omega_t}{\mu_B^3} (\mathbf{m}\mathbf{l})^3 [\mathbf{m} \times \mathbf{l}], \quad (4.6)$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\Omega_l}{4\mu_B^2} (\mathbf{m}\mathbf{l}) [\mathbf{m} \times \mathbf{l}] + \frac{\Omega_t}{4\mu_B^4} (\mathbf{m}\mathbf{l})^3 [\mathbf{m} \times \mathbf{l}] - \Omega_{b2} (\mathbf{b}\mathbf{l}) [\mathbf{b} \times \mathbf{l}] + \Omega_b (\mathbf{b}\mathbf{l})^3 [\mathbf{b} \times \mathbf{l}], \quad (4.7)$$

где  $\Omega_l$ ,  $\Omega_t$  – константы, описывающие спин-орбитальное взаимодействие,  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{b2}$  – константы, отвечающие за взаимодействие с кристаллическим полем,  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\beta$  описывает электромагнитное трение,  $\alpha$  – масштабный коэффициент,  $\mu_B$  – магнетон Бора.

При построении упрощенных уравнений движения намагниченности магнитомягкого однородного многодоменного ферромагнетика ограничимся случаем сильного кристаллического поля, когда  $\Omega_b \gg \Omega_l$ , и движением вектора  $\mathbf{l}$  можно пренебречь. Тогда для описания динамики намагниченности можно ограничиться одним уравнением (4.6), в котором вектор  $\mathbf{l}$  постоянен и направлен вдоль вектора  $\mathbf{b}$  кристаллического поля, который в случае одноосного кристалла направлен вдоль оси легкого намагничивания. Пренебрежем размагничиванием, магнитным диполь-дипольным взаимодействием доменов, влиянием доменных стенок и, для упрощения выкладок, последним слагаемым в правой части уравнения (4.6) и будем считать, что коэффициент  $\alpha$  в нем близок к единице. Тогда уравнение (4.6) динамики одного домена принимает вид

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} + \beta \left[ \frac{d\mathbf{m}}{dt} \times \mathbf{m} \right] = \gamma \mu_0 [\mathbf{H} \times \mathbf{m}] - \frac{\Omega_l}{\mu_B} (\mathbf{m} \mathbf{l}) [\mathbf{m} \times \mathbf{l}], \quad (4.8)$$

из которого следует условие равновесия домена

$$\left[ \mathbf{m} \times \left\{ \gamma \mu_0 \mathbf{H} + \frac{\Omega_l}{\mu_B} (\mathbf{m} \mathbf{l}) \mathbf{l} \right\} \right] = 0. \quad (4.9)$$

Тогда  $\mathbf{m} = a \left\{ \gamma \mu_0 \mathbf{H} + \frac{\Omega_l}{\mu_B} (\mathbf{m} \mathbf{l}) \mathbf{l} \right\}$ , то есть в состоянии равновесия вектор  $\mathbf{m}$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{l}$ .

Пусть  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}$ , и вектор  $\mathbf{l}$  образует угол  $\psi$  с единичным вектором  $\mathbf{e}$ . Тогда условие (4.9) равновесия домена принимает вид

$$H \sin(\varphi) = H_C \sin(2\psi - 2\varphi), \quad (4.10)$$

где  $H_C = \frac{\Omega_l m}{2\gamma \mu_0 \mu_B}$ ,  $\varphi$  – угол между векторами  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{e}$ .

При  $H = 0$  уравнение (4.10) имеет 4 решения в диапазоне  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi < \pi/2$ :  $\varphi_1 = \psi - \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \psi$ ,  $\varphi_3 = \psi + \pi/2$ ,  $\varphi_4 = \psi + \pi$ . Значения  $\varphi_2$  и  $\varphi_4$  соответствуют минимумам потенциальной энергии спин-орбитального взаимодействия и устойчивым состояниям равновесия, значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  соответствуют максимумам потенциальной энергии и неустойчивым состояниям равновесия. Можно принять, что при  $0 \leq \psi < \pi/2$  существуют две устойчивых зависимости  $\cos(\varphi)$  от магнитного поля  $H$  и угла  $\psi$ :  $\cos(\varphi_+) = f(H, \psi)$  и  $\cos(\varphi_-) = -f(-H, \psi)$ .

Для проверки этой гипотезы выполнено численное решения уравнений (4.8) и (4.10). На основании уравнения (4.8) для производных компонент магнитного момента получены выражения следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \hat{A} \left( \gamma \mu_0 [\mathbf{H} \times \mathbf{m}] - \frac{\Omega_l}{\mu_B} (\mathbf{m} \mathbf{l}) [\mathbf{m} \times \mathbf{l}] \right), \quad (4.11)$$

$$\text{где } \hat{A} = \frac{1}{1 + (\beta m)^2} \begin{pmatrix} 1 + (\beta m_x)^2 & \beta(\beta m_x m_y - m_z) & \beta(\beta m_x m_z + m_y) \\ \beta(\beta m_x m_y + m_z) & 1 + (\beta m_y)^2 & \beta(\beta m_y m_z - m_x) \\ \beta(\beta m_x m_z - m_y) & \beta(\beta m_y m_z + m_x) & 1 + (\beta m_z)^2 \end{pmatrix}.$$

Получаемая система нелинейных дифференциальных уравнений для вектора магнитного момента решается численно методом Рунге-Кутты 4-ого порядка, предназначенного для решения систем дифференциальных уравнений с явно выраженными производными искомых функций.

Решение уравнения (4.10) удалось получить благодаря тому, что обратная функция  $H(\varphi, \psi)$  существует при всех  $\psi$  от 0 до  $\pi/2$ . После построения этой функции была выполнена интерполяция зависимости  $\varphi(H, \psi)$ , а затем и  $f(H, \psi)$ .

Покажем численным моделированием, что динамический процесс, описываемый в (4.8), при медленном изменении внешнего поля является квазистатическим с положением равновесия, которое является решением уравнения (4.10). Для этого приведем (4.11) и (4.10) к безразмерному виду при помощи введения следующих величин  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H_c$ ,  $\mathbf{m} = \mathbf{m}/m$ ,  $\tau = \Omega_I t \frac{m}{\mu_B}$ :

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = \left( \frac{1}{2} [\mathbf{h} \times \mathbf{m}] - (\mathbf{m}\mathbf{l}) [\mathbf{m} \times \mathbf{l}] \right); \quad (4.12)$$

$$h \sin(\varphi) = \sin(2\psi - 2\varphi). \quad (4.13)$$

На Рисунке 4.6 показаны результаты численного решения уравнения  $m_x(t)$  (4.12) и равновесным значением  $m_x = \cos(\varphi)$  из уравнения (4.13). Как видно из рисунка, решение уравнения (4.12) и (4.13) совпадают в случае устойчивого равновесия. Дополнительно решение (4.12) показывает возможность переходов из верхнего в нижнее устойчивое состояние в определенном направлении, а решения уравнения (4.13), показанные на рисунке пунктиром, отвечают за состояния неустойчивого равновесия и в реальности не наблюдаются.

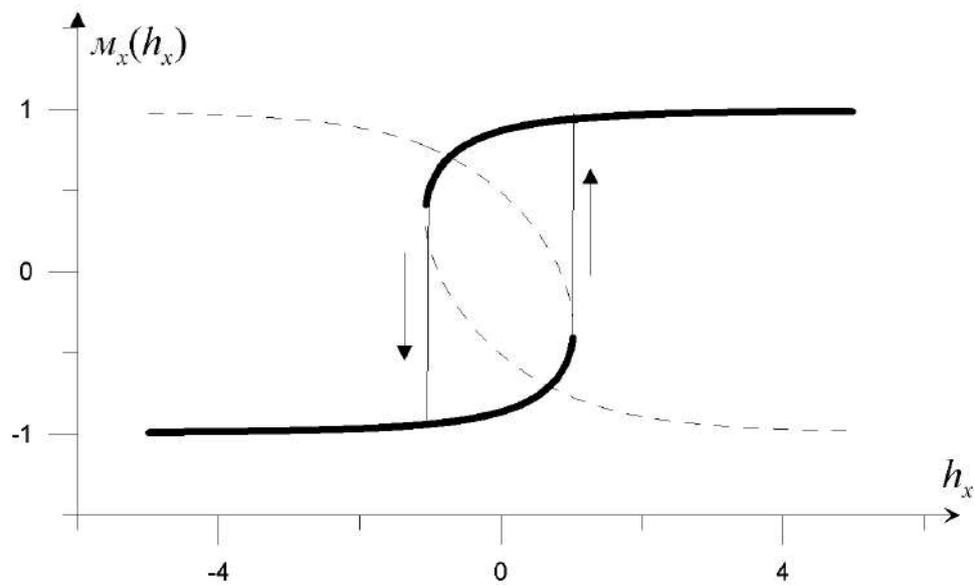


Рисунок 4.6 – График зависимости  $m_x(h_x)$ , при  $\psi = \pi/6$ ,  $h_x(t) = 5\sin(\omega t)$ ,  $\omega \ll \Omega_l$ . Сплошными жирными линиями обозначены решения (4.13) устойчивого равновесия, пунктирными линиями обозначены решения (4.13) неустойчивого равновесия, сплошными тонкими линиями обозначено решение (4.12). Стрелками указаны направление изменения  $m_x$

Для моделирования уравнений для средних вида (4.12) и (4.13) потребовалось найти удовлетворительную аппроксимацию устойчивых состояний, т.е. функции  $f(h, \psi) = f(H=hH_c, \psi)$  при различных значениях  $\psi$ . Для этого потребовалось найти положения нескольких характерных точек функции  $f(h, \psi)$ : при  $h = -\infty, 0, h_c(\psi)$ , где  $h_c(\psi)$  – значение  $h$ , при котором  $\frac{\partial f(h, \psi)}{\partial h} = +\infty$ .

Найдем значение  $h_c(\psi)$  и  $\varphi_c(\psi)$ . Для этого продифференцируем выражение (4.13) по  $\varphi$ , считая  $h$  функцией  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin(\varphi) + h \cos(\varphi) = -2 \cos(2\psi - 2\varphi).$$

Используя условие на производную  $\frac{\partial h}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial f(h, \psi)}{\partial h} \right)^{-1} = 0$ , учитывая

также уравнение (4.12), получаем:  $tg(\varphi) = -\frac{1}{2}tg(2\psi - 2\varphi)$ , что сводится к решению следующего уравнения:  $2tg^3(\varphi) - 3tg(2\psi)tg^2(\varphi) - tg(2\psi) = 0$ , которое в действительных числах для углов  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\pi/2$  имеет решение

$$\varphi_c(\psi) = \arctg \left[ \frac{1}{2} \left( u(\psi) - \frac{u(\psi)^2}{q(\psi)} + q(\psi) \right) \right], \quad (4.13)$$

где  $q(\psi) = \sqrt[3]{2u(\psi) + u(\psi)^3 + 2\sqrt{u(\psi)^2 + u(\psi)^4}}$ , а  $u(\psi) = tg(2\psi)$ .

Тогда, используя (4.13) в (4.10), получаем выражение для  $h_c(\psi)$ :

$$h_c(\psi) = \frac{\sin(2\psi - 2\varphi_c(\psi))}{\sin(\varphi_c(\psi))}. \quad (4.14)$$

Уравнения (4.13) и (4.14) позволяют аппроксимировать функцию  $f(H, \psi)$ :

$$f(H \geq -H_C, \psi) = (\cos(\psi) - \cos(\varphi_c(\psi)))(1 - \cos(\varphi_c(\psi))) \times \\ \times \sqrt{\frac{H/H_C + h_c(\psi)}{H/H_C(\cos(\psi) - \cos(\varphi_c(\psi)))^2 + h_c(\psi)(1 - \cos(\varphi_c(\psi)))^2}} + \cos(\varphi_c(\psi)). \quad (4.15)$$

Рассмотрим в единичном объеме однородного и изотропного ферромагнетика малую группу доменов с одинаковым модулем магнитного момента  $m$ , для которых угол между осью легкого намагничивания и вектором  $\mathbf{e}$  лежит в пределах от  $\psi$  до  $\psi + d\psi$ . Если все направления проекции оси легкого намагничивания домена  $\mathbf{b}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{e}$ , равновероятны, эта группа, находящаяся в равновесии в поле  $H$ , создает намагниченность, проекция которой на вектор  $\mathbf{e}$  равна

$$dM = \frac{2m}{\pi\nu} \{n_+(\psi)\cos(\varphi_+) + n_-(\psi)\cos(\varphi_-)\}d\psi = \frac{2m}{\pi\nu} \{\alpha(\psi)f_+(H, \psi) + f_-(H, \psi)\}d\psi. \quad (4.16)$$

Здесь  $0 \leq n_+(\psi) \leq 1$  – доля доменов, магнитный момент которых составляет угол  $\varphi_+$  с вектором  $\mathbf{e}$ ,  $0 \leq n_-(\psi) \leq 1$  – доля доменов, магнитный момент которых составляет угол  $\varphi_-$  с вектором  $\mathbf{e}$ ,  $n_+(\psi) + n_-(\psi) = 1$ ,  $\alpha(\psi) = n_+(\psi) - n_-(\psi)$ ,  $f_+(H, \psi) = [f(H, \psi) + f(-H, \psi)]/2$ ,  $f_-(H, \psi) = [f(H, \psi) - f(-H, \psi)]/2$ .

Из уравнения (4.10) следует, что при  $|H| \leq H_C$  для всех углов  $\psi$  в диапазоне  $0 \leq \psi < \pi/2$  оба стационарных состояния  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  являются устойчивыми, и функция  $\alpha(\psi)$  может принимать любое значение на интервале  $[-1, 1]$ . При  $H > h_c(\psi)H_C$  стационарное состояние  $\varphi_+$  является устойчивым для данного угла  $\psi$ , а стационарное состояние  $\varphi_-$  неустойчиво. Обратная ситуация будет при  $H < -h_c(\psi)H_C$ . Можно принять, что переход из неустойчивого состояния в устойчивое происходит за время порядка периода прецессии. Тогда

$$\alpha(\psi, H, t + \gamma\mu_0|H|) = \alpha(\psi, H, t)\theta(\cos(\psi - \varphi_c(\psi)) - H/H_C) + \text{sign}(H)\theta(H/H_C - \cos(\psi - \varphi_c(\psi))), \quad (4.17)$$

$$M(H, t) = \frac{2m}{\pi\nu} \int_0^{\pi/2} \{\alpha(\psi, H, t)f_+(H, \psi) + f_-(H, \psi)\} \sin(\psi) d\psi. \quad (4.18)$$

Формулы (4.17) и (4.18) играют роль материальных уравнений для прямой магнитостатической задачи, описывающей магнитное поле  $\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t)$ , создаваемое намагниченным телом  $D$  с распределенной намагниченностью  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  как вне, так и внутри себя. Тогда в формулах (4.17) и (4.18)  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  – эффективное магнитное поле в домене с центром в точке  $\mathbf{r}$ . Оно складывается из внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t)$  и поля  $\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t)$  (1.15):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \text{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}', t) d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} M_n(\mathbf{r}', t) ds'. \quad (4.19)$$

Здесь  $S$  – поверхность тела  $D$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M(\mathbf{r}, t)\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)/H(\mathbf{r}, t)$ ,  $M_n(\mathbf{r}, t)$  – нормальная компонента намагниченности на поверхности  $S$  тела  $D$ , несобственные интегралы понимаются как предел при стремлении к нулю радиуса шарового выреза с центром в точке  $\mathbf{r}$ .

Система уравнений (4.17) – (4.19) представляет собой параметрическую модель, связывающую распределение намагниченности в объеме однородного и изотропного мягкого ферромагнетика без механических напряжений с параметрами его микроструктуры, формы и магнитной предыстории.

Для проверки разработанной модели гистерезиса проведены две серии численных экспериментов: для одного домена и для совокупности доменов с равномерно распределенными осями легкого намагничивания, в которых рассчитывалась зависимость проекции динамики намагниченности  $M_x(t)$  от значения внешнего магнитного поля  $H_x(t)$ .

Полученные уравнения для средних (4.17), (4.18) также моделировались. Результаты моделирования при заданном внешнем поле  $h_x(t) = 20\sin(\omega t)$  представляют собой хорошо сходящиеся с качественными данными петлями гистерезиса

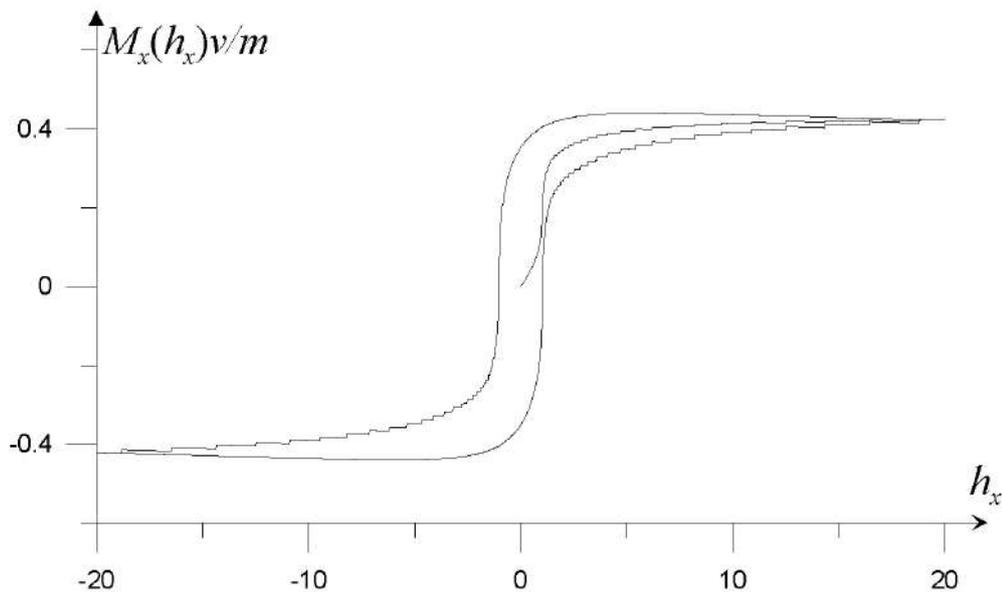


Рисунок 4.7 – Зависимость проекции полной намагниченности на внешнее магнитное поле от величины поля

На Рисунке 4.7 хорошо заметны описываемые моделью скачки Браугаузена, возникающие вследствие перескока с одной области устойчивого равновесия на другую для каждого домена.

Для описания деформаций в модель введена тетрагональная поправка искажения кубической симметрии кристаллического поля железа и произведено усреднение молекулярных магнитных моментов по физически малому объему

(Приложение В). На основании этой модели производилось численное моделирование свойств ферромагнетика в деформированном состоянии. Модель описывает зависимость равновесного значения намагниченности  $\mathbf{M}^e$  от величины внешнего по отношению к объему магнитного поля  $\mathbf{H}$ , направления кристаллического поля  $\mathbf{h}_K$  и самой намагниченности:

$$\mathbf{M}^e = M_S \frac{3\mathbf{H} + \mathbf{M} + 3\mathbf{h}_K}{M_S^2 + 9H^2 + 9\mathbf{H}\mathbf{h}_K} \sqrt{M_S^2 + 6\mathbf{H}\mathbf{M} + 9H^2} - 3\mathbf{M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{h}_K + 2\mathbf{H})}{M_S^2 + 9H^2 + 9\mathbf{H}\mathbf{h}_K}. \quad (4.20)$$

Уравнение релаксации макроскопической намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  к равновесной намагниченности  $\mathbf{M}^e(\mathbf{r})$  имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^e}{T_1}. \quad (4.21)$$

Здесь  $T_1$  – время продольной релаксации намагниченности,  $M_S$  – намагниченность насыщения, а кристаллическое поле определяется формулой (В.20) и (В.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_K = & \frac{M_K}{M_S^3} \left( (\mathbf{m}\mathbf{a})^3 \mathbf{a} + (\mathbf{m}\mathbf{b})^3 \mathbf{b} + (\mathbf{m}\mathbf{c})^3 \mathbf{c} \right) - \frac{2M_T}{M_S} (\mathbf{m}\mathbf{c})\mathbf{c} - \\ & \frac{M_A}{M_S} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} - \frac{M_T}{M_S} \mathbf{c}(\mathbf{c}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})) - \\ & - \frac{M_T}{M_S} (\mathbf{m}\mathbf{c})\hat{\mathbf{u}}\mathbf{c} - \frac{M_B}{M_S} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m}) - \frac{2M_T}{M_S} (\mathbf{c}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m}))\hat{\mathbf{u}}\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  определяют оси легкого намагничивания,  $M_T$  – параметр тетрагональности поля,  $M_K$  – параметр величины взаимодействия с кристаллической решеткой,  $M_A$ ,  $M_B$  – подгоночные параметры влияния деформации,  $\hat{\mathbf{u}}$  – тензор деформаций.

Верификация полученных теоретически выражений (4.20) и (4.21) на экспериментальных данных осуществлялась численным моделированием зависимостей средней по объему намагниченности от внешнего поля  $\mathbf{H}_e$  и анализа их характерных особенностей. Численное моделирование осуществлялось прямым решением уравнения (4.21) методом Рунге-Кутты.

При численном моделировании в качестве объекта исследования использовался параллелепипед из однородного ферромагнетика размером  $L_x \times L_y \times L_z$ , то есть объем измерения совпадал с объемом параллелепипеда. Задавались компоненты постоянного внешнего поля  $\mathbf{H}_e$ , компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ , где  $\alpha, \beta = x, y, z$ , тензор деформации определялся с помощью обобщенного закона Гука:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) & (1 + \sigma)\sigma_{xy} & (1 + \sigma)\sigma_{xz} \\ (1 + \sigma)\sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) & (1 + \sigma)\sigma_{yz} \\ (1 + \sigma)\sigma_{xz} & (1 + \sigma)\sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона [78], и случайным образом формировались оси легкого намагничивания доменов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , введенные в выражении (4.22)

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\gamma(\mathbf{r})) - \sin(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\beta(\mathbf{r}))\sin(\gamma(\mathbf{r})) \\ \sin(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\gamma(\mathbf{r})) + \cos(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\beta(\mathbf{r}))\sin(\gamma(\mathbf{r})) \\ \sin(\beta(\mathbf{r}))\sin(\gamma(\mathbf{r})) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha(\mathbf{r}))\sin(\gamma(\mathbf{r})) - \sin(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\beta(\mathbf{r}))\cos(\gamma(\mathbf{r})) \\ -\sin(\alpha(\mathbf{r}))\sin(\gamma(\mathbf{r})) + \cos(\alpha(\mathbf{r}))\cos(\beta(\mathbf{r}))\cos(\gamma(\mathbf{r})) \\ \sin(\beta(\mathbf{r}))\cos(\gamma(\mathbf{r})) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha(\mathbf{r}))\sin(\beta(\mathbf{r})) \\ -\cos(\alpha(\mathbf{r}))\sin(\beta(\mathbf{r})) \\ \cos(\beta(\mathbf{r})) \end{bmatrix},$$

где  $0 \leq \alpha(\mathbf{r}) < \pi$ ,  $0 \leq \beta(\mathbf{r}) < 2\pi$ ,  $0 \leq \gamma(\mathbf{r}) < 2\pi$  – случайные углы Эйлера, а также задавалось значение критерия окончания итераций  $\varepsilon_0$ . В качестве начального использовалось случайное распределение намагниченности с нулевым средним.

На каждом шаге итераций очередное распределение намагниченности  $\mathbf{M}'(\mathbf{r})$  определялось путем численного решения уравнения (4.21). Величина  $\mathbf{M}^e(\mathbf{r})$  рассчитывалась по формуле (4.20), а входящее в него поле  $\mathbf{h}_K(\mathbf{r})$  – по формуле (4.22). Поле размагничивания  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$  вычислялось методом быстрого преобразования Фурье и

использовалось для формирования поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_e(\mathbf{r})$ . Критерием окончания итерации являлось соотношение:

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \iiint_V \frac{|\mathbf{M}'(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})|^2}{M'^2(\mathbf{r}) + M^2(\mathbf{r})} d^3r < \varepsilon_0,$$

при невыполнении которого полагалось  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}'(\mathbf{r})$  и осуществлялся переход к очередному шагу итераций.

Моделирование макроскопической намагниченности проводилось для параллелепипеда с намагниченностью насыщения  $M_S = 1.6 \cdot 10^6 \text{ А/м}$ , характерной для магнитомягкой стали. Область моделирования разбивалась на  $N_x = 256$ ,  $N_y = 8$ ,  $N_z = 8$  одинаковых ячеек. На начальном состоянии в каждой ячейке задавался вектор намагниченности с модулем  $|\mathbf{M}| = \sqrt{M_S^2 - 9M_K^2}$  и ориентированным в случайном направлении.

На Рисунке 4.8 приведены экспериментальная зависимость относительной коэрцитивной силы  $H_C/M_S$  деформированного ферромагнетика от значения приложенного продольного давления  $p = \sigma_{xx}$  [77] (сплошная линия) и зависимость, полученная в результате численного моделирования при  $M_S = 1.6 \cdot 10^6 \text{ А/м}$ ,  $M_K = 4500 \text{ А/м}$ ,  $M_T = 30M_K$ ,  $M_A = 118M_K$ ,  $M_B = -72000M_K$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\sigma = 0.28$  (пунктир). Для оценки влияния тетрагонального параметра кристаллического поля точками приведена зависимость, полученная при  $M_T = 0$ . Из графиков видно, что влияние тетрагонального возмущения кристаллического поля на коэрцитивную силу деформированного ферромагнетика мало при отрицательных деформациях и существенно при положительных.

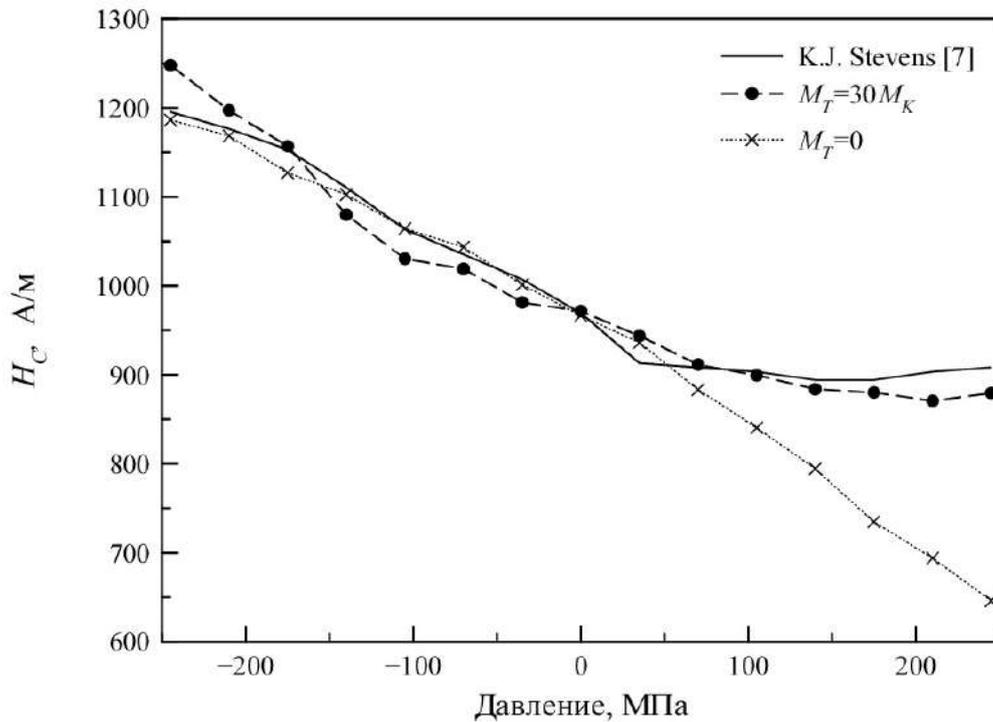


Рисунок 4.8 – График зависимости коэрцитивной силы  $H_c$  от значения приложенного давления при  $M_K/M_S = 2,8 \cdot 10^{-3}$  (сплошной линией показаны экспериментальные данные из работы [78], пунктирная линия с круглыми маркерами – результаты моделирования, пунктирная с x-маркерами).

### 4.3 Определение параметров плоских намагниченных образцов

Согласно поставленной в п. 1.4 задаче и с использованием результатов моделирования ферромагнетика в п. 4.2. требуется разработать способ оценки параметров источников магнитного поля. Технически значимым параметром является наличие необратимой деформации, порождающее характерное распределение намагниченности, предсказываемое моделью из параграфа 4.2. Поэтому следующим действием будет разработка метода обнаружения таких областей по результатам измерений магнитного микроскопа.

#### 4.3.1 Метод оценивания медленно меняющейся намагниченности

Паразитным явлением для задачи определения зон деформации является медленно меняющаяся намагниченность, причиной возникновения которой является

остаточная намагниченность всего образца и реакция на относительно однородное внешнее магнитное поля. Для устранения влияния этой намагниченности можно применить пространственный фильтр высокой частоты, что приведет к потере части информации об образце. Более предпочтительным способом анализа является параметризация медленно меняющейся намагниченности образца с учетом его формы и размеров.

Используем приближение медленного изменения намагниченности в формуле (1.15) и опишем ее в виде функции:

$$M_l(\mathbf{r}) = M_{0l} + a_{lj}r_j, \quad (4.23)$$

здесь  $l = x, y, z$ ,  $M_{0l}$  – постоянная составляющая намагниченности  $a_{lj}$  – линейные коэффициенты разложения. Тогда

$$B_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} a_{ll} d^3 r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} n_l (M_{0l} + a_{lj}r'_j) ds', \quad (4.24)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,  $n_l$  – компоненты единичной нормали к поверхности  $S$ . Соответственно:

$$B_i(\mathbf{r}) = a_{ll} P_i(\mathbf{r}) + M_{0l} R_{il}(\mathbf{r}) + a_{lj} T_{ilj}(\mathbf{r}). \quad (4.25)$$

Здесь

$$P_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r',$$

$$R_{il}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} n_l ds', \quad (4.26)$$

$$T_{ilj}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} n_l r'_j ds'.$$

Интегралы (4.26) не зависят от параметров модели и могут быть найдены аналитически или численно для заданной геометрии образца. Коэффициенты разложения (4.25) могут быть найдены решением задачи минимизации функционала ошибки:

$$J_1 = \sum_{p,i} \left( B'_i(\mathbf{r}_p) - a_{ll} P_i(\mathbf{r}_p) + M_{0l} R_{il}(\mathbf{r}_p) + a_{lj} T_{ilj}(\mathbf{r}_p) \right)^2. \quad (4.27)$$

Здесь  $B'_i(\mathbf{r}_p)$  – показания прибора в точках  $\mathbf{r}_p$ . Параметры  $M_{0j}$ ,  $a_{lj}$  могут быть найдены из функционала (4.27) методом наименьших квадратов. Однако численным моделированием было установлено, что такая задача не позволяет восстановить искомые параметры даже на распределениях, построенных на той же модели (4.24). Это связано с тем, что для линейной задачи (4.27) существуют распределения  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , которые не создают вне образца магнитное поле. Для устранения такой неоднозначности необходимо дополнительное условие  $\text{rot}(\mathbf{M}) = 0$ , соответствующее случаю, когда через магнетик не протекал ток. Прямым вычислением для намагниченности в виде (4.25), с учетом линейной независимости слагаемых степенного ряда, получаем:

$$a_{lm} = a_{ml}. \quad (4.28)$$

Таким образом, число искомых параметров сокращается до 9. Минимизация функционала (4.27) с условием (4.28) позволяет найти заданные параметры модели в численных экспериментах. Для всех параметров  $P_i(\mathbf{r})$ ,  $R_{ij}(\mathbf{r})$ ,  $T_{ijl}(\mathbf{r})$  получены аналитические выражения интегралов (4.26). Вычисленные неопределенные интегралы модели (4.26) имеют вид:

$$P'_z(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = (z - z_1) \arctan\left(\frac{y - y_1}{z - z_1}\right) - (z - z_1) \arctan\left(\frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(z - z_1)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) +$$

$$+ (y - y_1) \ln(x - x_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + (x - x_1) \ln(y - y_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|);$$

$$P'_x(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = P'_z(z, y, x, z_1, y_1, x_1); P'_y(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = P'_z(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$R'_{zx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = -\ln(y - y_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|);$$

$$R'_{zy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zx}(y, x, z, y_1, x_1, z_1);$$

$$R'_{zz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \arctan\left(\frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(z - z_1)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right);$$

$$R'_{xz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zx}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$R'_{xy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zy}(z, y, x, z_1, y_1, x_1);$$

$$R'_{xx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zz}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); R'_{yz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zy}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$R'_{yx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{xy}(y, x, z, y_1, x_1, z_1);$$

$$R'_{yy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = R'_{zz}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{zxx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = -x_1 \ln(y - y_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|);$$

$$T'_{zxy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - y \ln(y - y_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|);$$

$$T'_{zzz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = -z_1 \arctan\left(\frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(z - z_1)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right);$$

$$T'_{zyx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zxy}(y, x, z, y_1, x_1, z_1); T'_{zyz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(y, x, z, y_1, x_1, z_1);$$

$$T'_{zzx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = x \arctan\left(\frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(z - z_1)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) + (z - z_1) \ln(y - y_1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|);$$

$$T'_{zzy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(y, x, z, y_1, x_1, z_1);$$

$$T'_{zzz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = -z_1 \arctan\left(\frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(z - z_1)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right);$$

$$T'_{xxx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); T'_{xxy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzy}(z, y, x, z_1, y_1, x_1);$$

$$T'_{xxz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzx}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); T'_{xyx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyz}(z, y, x, z_1, y_1, x_1);$$

$$T'_{xyy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyy}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); T'_{xyz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyx}(z, y, x, z_1, y_1, x_1);$$

$$T'_{xzx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); T'_{xzy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zxy}(z, y, x, z_1, y_1, x_1);$$

$$T'_{xzz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzx}(z, y, x, z_1, y_1, x_1); T'_{yxx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzx}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{yxy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(x, z, y, x_1, z_1, y_1); T'_{yxz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zxy}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{yyx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzx}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{yyy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zzz}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{yzx}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyx}(x, z, y, x_1, z_1, y_1); T'_{yzy}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyz}(x, z, y, x_1, z_1, y_1);$$

$$T'_{yzz}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = T'_{zyy}(x, z, y, x_1, z_1, y_1).$$

Здесь используется обозначение  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$ .

Определенные интегралы вычисляются соответствующими подстановками положения краев образца:

$$P_l(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) = P'_l(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - P'_l(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0) +$$

$$+ P'_l(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - P'_l(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ P'_l(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - P'_l(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0) +$$

$$+ P'_l(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) - P'_l(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z);$$

$$R_{ix}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) = R'_{ix}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - R'_{ix}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ R'_{ix}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - R'_{ix}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0)$$

$$- \{R'_{ix}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - R'_{ix}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ R'_{ix}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - R'_{ix}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0)\};$$

$$R_{iy}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) = R'_{iy}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0) - R'_{iy}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ R'_{iy}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - R'_{iy}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) -$$

$$- \{R'_{iy}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - R'_{iy}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ R'_{iy}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - R'_{iy}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0)\};$$

$$R_{iz}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) = R'_{iz}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - R'_{iz}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0) +$$

$$+ R'_{iz}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) - R'_{iz}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0) -$$

$$- \{R'_{iz}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - R'_{iz}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) +$$

$$+ R'_{iz}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - R'_{iz}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z)\};$$

$$\begin{aligned}
T_{ixj}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) &= T'_{ixj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - T'_{ixj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) + \\
&+ T'_{ixj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - T'_{ixj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) - \\
&- \{T'_{ixj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - T'_{ixj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) + \\
&+ T'_{ixj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - T'_{ixj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0)\}; \\
T_{iyj}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) &= T'_{iyj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0) - T'_{iyj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) + \\
&+ T'_{iyj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - T'_{iyj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) - \\
&- \{T'_{iyj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - T'_{iyj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) + \\
&+ T'_{iyj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - T'_{iyj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0)\}; \\
T_{izj}(\mathbf{r} = \{x, y, z\}) &= T'_{izj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - T'_{izj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0) + \\
&+ T'_{izj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0) - T'_{izj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0) - \\
&- \{T'_{izj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z) - T'_{izj}(x, y, z, X_0 + \Delta X, Y_0, Z_0 - \Delta Z) + \\
&+ T'_{izj}(x, y, z, X_0, Y_0, Z_0 - \Delta Z) - T'_{izj}(x, y, z, X_0, Y_0 + \Delta Y, Z_0 - \Delta Z)\};
\end{aligned}$$

В качестве модели был задан намагниченный образец в форме параллелепипеда (20×20×5) мм. При этом разница вычисленного и исходного распределения магнитного поля была порядка заданного при моделировании уровня шума (Рисунок 4.9).

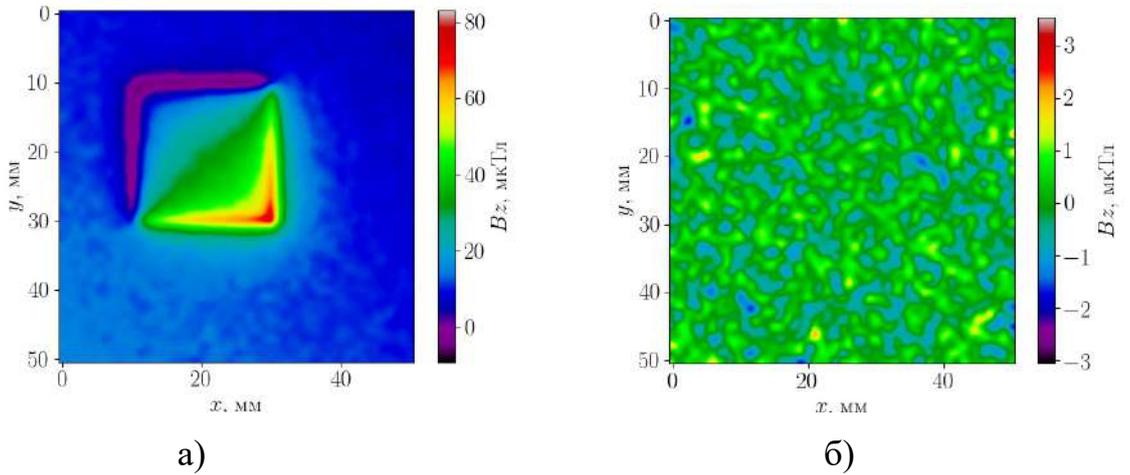


Рисунок 4.9 – Сравнение исходного (а) модельного распределения  $B_z(x, y)$  с обработанным алгоритмом вычитания медленно меняющейся намагниченности (б)

Проверить эффективность работы алгоритма вычисления намагниченности на реальных образцах не представляется возможным, поскольку способа точно задать или измерить ее каким-либо независимым образом не существует. Поэтому основным показателем эффективности работы алгоритма вычисления намагниченности являлась величина уменьшения амплитуды резкого изменения магнитного поля вблизи краев образца при вычитании модельного поля из исходного. Для демонстрации работы методов на реальном образце исследовалась пластина из стали 09Г2С размерами (200×150×8) мм (Рисунок 4.10).

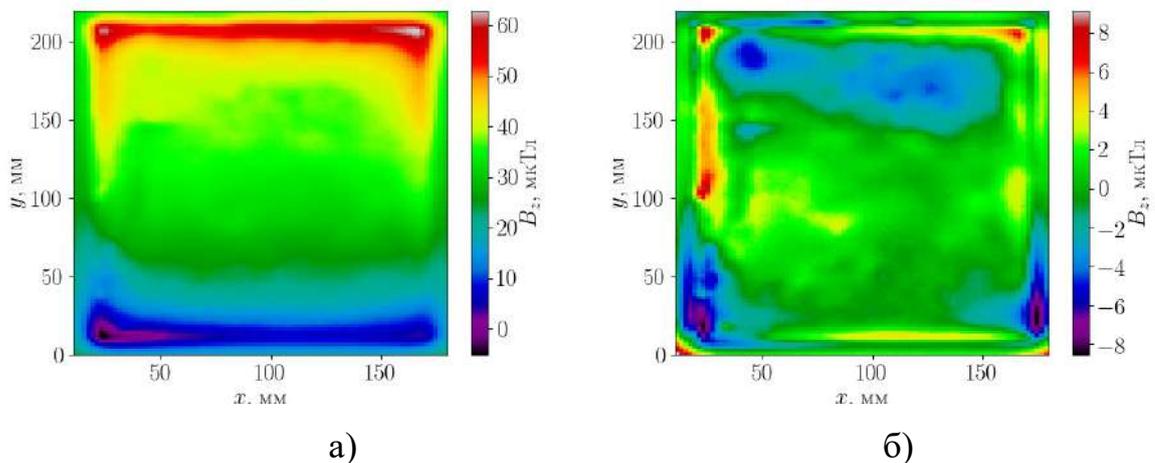


Рисунок 4.10 – Примеры применения алгоритма вычитания медленно меняющейся намагниченности с применением детектора диполей: а) исходное распределение; б) результат вычитания поля создаваемого медленно меняющейся намагниченностью

### 4.3.2 Индикатор областей резкого изменения намагниченности

При анализе зон деформации, ограничиваясь первым слагаемым мультипольного разложения, любую область локальной деформации можно считать дипольным источником. Магнитное поле, создаваемое в точке  $\mathbf{r}$  магнитным диполем с моментом  $\mathbf{M}_i$ , расположенным в точке  $\mathbf{r}_i$ , и его магнитный потенциал имеют вид [52]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{M}_i)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^5} - \frac{\mathbf{M}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{M}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3},$$

соответственно,  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\mu_0\varphi(\mathbf{r})$ . Пусть ось  $z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ , а плоскость  $O'x'y'$  перпендикулярна этому вектору. Поскольку  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \partial\varphi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$ , получаем, что вблизи проекции точки  $\mathbf{r}_i$  на плоскость  $O'x'y'$

$$h \frac{\partial B_z(\mathbf{r})}{\partial x} = 2B_x(\mathbf{r}), \quad h \frac{\partial B_z(\mathbf{r})}{\partial y} = 2B_y(\mathbf{r}), \quad (4.12)$$

где  $h$  – расстояние от точки  $\mathbf{r}_i$  до плоскости  $O'x'y'$  сканирования магнитного поля.

Исходя из формулы (4.12), можно ожидать, что величина

$$D(x, y) = \int_D \frac{\partial B_z}{\partial x}(x - x_1, y - y_1) B_x(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \times \\ \times \int_D \frac{\partial B_z}{\partial y}(x - x_1, y - y_1) B_y(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \quad (4.13)$$

будет в плоскости  $O'x'y'$  иметь максимум в точке над магнитным диполем.

Пример работы алгоритма поиска максимумов на магнитограмме с искусственно нанесенными дефектами показан на Рисунке 4.11.

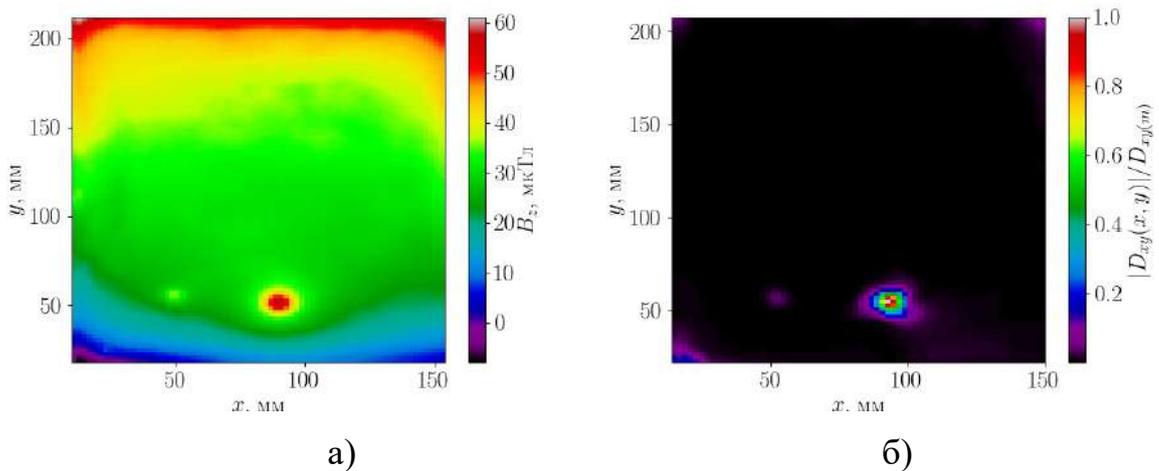


Рисунок 4.11 – Пример работы метода предварительного определения

точечных дефектов: а) исходное распределение с обрезанными краями; б) распределение нормированного модуля детектора (4.13)

В качестве материала с принципиально иными магнитными свойствами исследовалась пластина из аустенитной нержавеющей стали размерами 112×90×8 мм. Изначально измеренное распределение магнитного поля вблизи этого образца практически не отличалось от внешнего поля в области измерений, т.е. образец практически не обладал магнитными свойствами. После нанесения двух ударов керном магнитограмма показывает, что образец локально намагнитился, и распределение индикатора (4.29) имеет вид, показанный на Рисунке 4.12. На этом рисунке места ударов хорошо выделяются и имеют ярко выраженный дипольный характер.

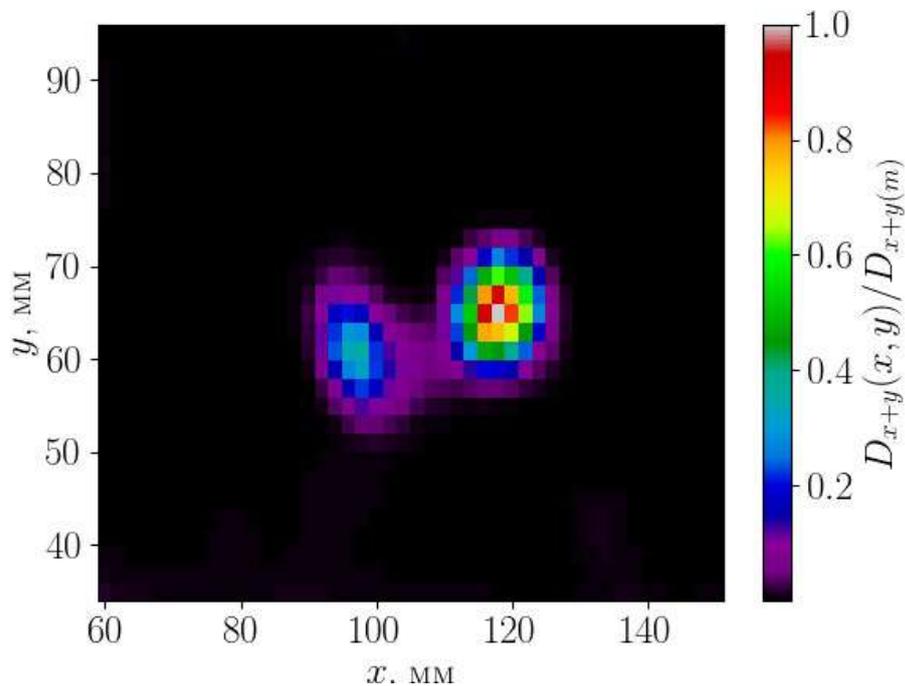


Рисунок 4.12 – Значение индикатора (4.29) для пластины из нержавеющей стали после нанесения ударов

#### 4.4 Выводы по главе

Параметризация обратной задачи магнитостатики для токовых распределений на поверхности предметного столика позволяет обнаружить заданный магнитный момент  $10^{-7}$  А·м<sup>2</sup> с расстояния 3 мм и с погрешностью не более  $10^{-8}$  А·м<sup>2</sup>, что значительно превосходит существующую поверочную схему передачи эталона магнитного момента с минимальным значением поверяемого момента  $10^{-4}$  А·м<sup>2</sup> [79].

Новизной предложенного метода численного моделирования ферромагнитных свойств по сравнению с известными [55] является применение аналитического усреднения, что позволяет достичь удовлетворительного описания изменения магнитных свойств под действием деформаций и объясняет индуцирование областей резкого изменения намагниченности ферромагнетиков локальной деформацией. Поскольку в основу метода положена квантовая модель кристаллического  $\alpha$ -Fe, то для ферромагнетиков с отличными от этого материала свойствами она может быть неприменима. Однако варьирование параметров модели  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_T$ ,  $M_S$  позволяет достичь удовлетворительных предсказаний и для некоторых сплавов со сложным химическим составом.

Разработанный метод обработки измерений топографии вектора магнитного поля плоского намагниченного образца позволяет исключить влияние медленно меняющейся намагниченности и выделить зоны её резкого изменения, соответствующие, согласно изложенной модели в п. 4.2, областям необратимых деформаций. Он совместно с холловским магнитным микроскопом может быть применен в технической диагностике как способ неразрушающего пассивного магнитного контроля плоских образцов. Метод применим, если через образец не протекали токи, а его форма достаточно точно описывается параллелепипедом. Эффективность метода подтверждается экспериментальными данными, где удается контрастировать расположение зон необратимой деформации (Рисунки 4.11 и 4.12).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения диссертационной работы были получены следующие результаты:

1. Соотношения взаимности для нелинейного нестационарного многополюсника в неоднородном внешнем магнитном поле. Для матрицы его сопротивлений в полях порядка 100 мкТл экспериментально проверено выполнение соотношения взаимности с относительной точностью порядка  $10^{-3}$  на преобразователе Холла ПХЭ602117А.

2. Метод расчета системной функции тонкопленочного преобразователя Холла как векторного произведения полей тока при пропускании его через одноименные пары контактов. Произведено сравнение с экспериментальными данными, полученными при исследованиях преобразователей Холла в магнитном поле с неоднородностью не менее 10% на размере активной зоны.

3. Методы исследования нестационарных процессов в преобразователях Холла в контролируемом магнитном поле.

4. Новый алгоритм коммутации тока для холловского тонкопленочного преобразователя ПХЭ602117А, позволяющий снизить зависимость смещения показаний от температуры с уровня 33 нТл/К до 1 нТл/К при частоте получения отсчетов магнитометра 125 отсчетов/с и порогом чувствительности к магнитному полю не хуже 2 нТл при времени накопления 5 с.

5. Метод обработки сигнала свободной прецессии релаксационного магнитометра, который позволяет исследовать динамику модуля индукции магнитного поля в одном релаксационном цикле и достичь порога чувствительности к индукции магнитного поля не хуже 20 пТл за измерительный цикл.

6. Метод определения параметров токового диполя, позволяющий при помощи магнитного микроскопа с расстояния не более 3 мм найти положение токового диполя с погрешностью не более 10 мкм и значения компонент вектора его магнитного момента с погрешностью не более  $10^{-8}$  А·м<sup>2</sup>

7. Метод моделирования процесса намагничивания ферромагнетика. Особенностью метода является применения аналитического усреднения по физически малому объему образца. Это позволяет существенно снизить вычислительные затраты при моделировании макроскопических образцов. Метод позволяет получить априорную информацию о распределении магнитного поля образца.

Полученные результаты обеспечивают компенсацию погрешностей преобразователя Холла в неоднородном поле и нестационарных условиях. Это позволяет достигнуть большей чувствительности для создания прецизионных магнитометров на основе эффекта Холла. Разработанные методы могут применяться для улучшения однокомпонентных и многокомпонентных магнитометров подобных [80].

Разработанные методы определения параметров источников магнитного поля позволяют решать обратную магнитостатическую задачу с учетом априорной информации о связи оцениваемых параметров источника и распределения магнитного поля. Предложен метод определения параметров намагниченных тел, который может быть использован для диагностики плоских деформированных образцов в том числе и на микромасштабах для устройств функциональной электроники [81].

Проблема передачи магнитного момента с высокой точностью в широком диапазоне его величины особенно актуальна в связи с изменением определения электрических единиц системы СИ. Изъято определение ампера, использующее величину силы взаимодействия проводников с током. Для определения ампера постулирован заряд электрона [82], и поэтому константу  $\mu_0$ , входящую в выражение для величины силы взаимодействия токов с магнитным полем, теперь требуется измерять. Разработанный метод определения параметров токовых распределений может быть использован для корректировки систем магнитного поля и компенсации неоднородности в экспериментах по измерению этой величины.

Использование методов определения параметров токовых распределений позволило оценить параметры магнитного диполя величиной порядка  $10^{-7}$  А·м<sup>2</sup>, что значительно меньше минимальной величины  $10^{-4}$  А·м<sup>2</sup> магнитного момента, передаваемого поверочной схемой Государственного первичного эталона единиц магнитной индукции, магнитного потока, магнитного момента и градиента магнитной индукции [83, 84]. Поэтому разработанный метод определения магнитного момента и сравнения параметров токовых распределений, описанный в диссертации, может быть использован для расширения диапазона этой поверочной схемы.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Madec, M. Compact modeling of vertical hall-effect devices: Electrical behavior / M. Madec, J.-B. Schell, J.-B. Kammer et. al. // *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. – 2012. – vol. 77 – doi: 10.1109/NEWCAS.2012.6328994.
2. Jiang, J. A Continuous-time ripple reduction technique for spinning-current hall sensors / J. Jiang, W. J. Kindt, K. A. A. Makinwa // *IEEE Journal of solid-state circuits*. – 2014. – vol. 49. – N7. – doi: 10.1109/JSSC.2014.2319252.
3. Никитов С. А. Магноника – новое направление спинтроники и спин-волновой электроники / С. А. Никитов, Д.В. Калябин, И.В. Лисенков и др. // *УФН*. – 2015. – Т. 185. – №10. – С. 1099 – 1128, doi: 10.3367/UFNr.0185.201510m.1099
4. Arpaia, P. Measuring the magnetic axis alignment during solenoids working / P. Arpaia, B. Celano, De Vito et. al. // *Scientific Reports*. – 2018. – vol. 8. – doi:10.1038/s41598-018-29667-1.
5. Torres-D'íaza, I. Recent progress in ferrofluids research: novel applications of magnetically controllable and tunable fluids / I. Torres-D'íaza and C. Rinaldi // *Soft Matter*. – 2014. – vol. 10. 8584 – 8602. – doi: 10.1039/c4sm01308e
6. Рогова, М. В. Измерители параметров жидких сред / М. В. Рогова. – Саратов: Изд-во Саратовского гос.техн.ун-та, 2013. – 80 с.
7. Давыдов, В. В. Ядерно-магнитный минирелаксометр для контроля состояния жидких и вязких сред / В. В. Давыдов, Е. Н. Величко, А. Ю. Карасеев // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2015. – Т. 15. – №1. – С. 115 – 121.
8. Чижев, А. В. Повышение точности измерения статических характеристик магнитных материалов для высокомоментных двигателей / А. В. Чижев // *Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль*. – 2014. – Т. 10. – №4. – С. 39 – 42.
9. Филиппов, В. В. Математическая модель холловского поля при зондовых измерениях в анизотропных полупроводниках / В. В. Филиппов, А. А. Заворотный //

В сб.: Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания (отв. ред: Калитвин А. С. ). – 2014. – С. 72 – 78.

10. Авдоченко, Б. И. Датчик слабых магнитных полей на основе эффекта Холла / Б. И. Авдоченко, Г. Ф. Карлова, А. М. Цырендоржиева // Электронные средства и системы управления. – 2017. – № 1-1. – С. 228 – 230.

11. Карлова, Г. Ф. Исследование возможности создания датчика слабых магнитных полей / Г. Ф. Карлова, Б. И. Авдоченко, О. А. Дедкова и др. // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 8-2. – С. 129 – 131.

12. Кулезнев Н. Е. Теоретическое и экспериментальное исследование особенностей магнитного поля сильно намагниченного постоянного магнита / Н. Е. Кулезнев, П. А. Поляков, В. С. Шевцов // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2018. – Т. 82. – № 8. – С. 1076 – 1079.

13. Budker, D. Optical magnetometry /D. Budker and M. Romalis // Nature physics. – april 2007. – vol. 3. – pp. 227 – 234

14. Шихтин, А. Я. Испытание магнитных материалов и систем / А. Я. Шихтин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 376 с.

15. Боярский, Л. А. Вибрационный магнитометр с компенсирующей катушкой / Л. А. Боярский, М. А. Стариков // Работы по физике твердого тела: сборник. Новосибирск: Наука. – 1967. – С. 191 – 202.

16. Афанасьев, Ю. В. Феррозонды / Ю. В. Афанасьев. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1969. – 168 с.

17. Егиазарян, Г. А. Магнитодиоды, магниторезисторы и их применение / Г. А. Егиазарян, В. И. Стафеев. – М.: Радио и связь, 1987. – 88 с.

18. Мейзда, Ф. Электронные измерительные приборы и методы измерений: пер. с англ./ В. Д. Новиков. – М.: Мир, 1990. – 535 с.

19. Баранова, В. Е. Измерение слабого магнитного поля на основе феррозондового датчика: дис. к. т. н. / В. Е. Баранова. – Томск, 2015. – 134 с.

20. Клюев, В. В. Неразрушающий контроль и диагностика / Клюев В. В., Ф. Р. Соснин, А. В. Ковалев и др. – 2е изд., испр. и доп. – М.: Машиностроение, 2001. – 656 с.
21. Бородин, П. М. Физические основы квантовой радиофизики / П. М. Бородин, В. В. Фролов, В. И. Чижик, А. В. Мельников. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1985. – 319 с.
22. Померанцев, Н. М. Физические основы квантовой магнитометрии / Н. М. Померанцев, В. М. Рыжиков, Г. В. Скороцкий. – М.: Наука, 1972. – 448 с.
23. Игнатъев, В. К. Параметрический анализ колебаний с медленно меняющейся частотой / В. К. Игнатъев, А. В. Никитин, С. В. Юшанов // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2010. – Т. 53. – № 2. – С. 145 – 159.
24. Баруздин, С. А. Амплитудные характеристики спиновых процессов на основе магнитоупорядоченных сред в режиме согласованной фильтрации: сб. науч. тр. / С. А. Баруздин, А. Ю. Мокеров // Известия СПбГЭТУ (ЛЭТИ). Сер. Радиоэлектроника и телекоммуникации. – 2002. – Вып. 1. – С. 3 – 6.
25. Денисов, А. Ю. Особенности использования цифровых методов обработки данных в протонных магнитометрах/ А. Ю. Денисов, В. А. Сапунов // Физические свойства материалов и методы их исследования. – Екатеринбург: УрГПУ, 1998. – С. 35 – 41.
26. Edelstein, A. Advances in magnetometry / A. Edelstein // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2007. – vol.19. – doi:10.1088/0953-8984/19/16/165217.
27. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц / В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 536 с.
28. Петер, Ю. Основы физики полупроводников: пер. с англ./ Ю. Петер, М. Кардона; под ред. Б.П. Захарчени. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 560 с.
29. Lenz, J. E. A review of magnetic sensors / J. E. Lenz, A. S. Edelstein // IEEE Sensors Journal. – 1990. – vol. 78. – pp. 973 – 989. – doi: 10.1109/JSEN.2006.874493.

30. Боголюбов, Н. Н. Кинетические уравнения / Н. Н. Боголюбов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1946. – Т.16. – № 8. – С. 691 – 702.
31. Игнатъев, В. К. Повышение разрешающей способности магнитометра на основе эффекта Холла / В. К. Игнатъев, А. Г. Протопопов // Известия ВУЗов. Приборостроение. – 2003. – Т. 46. – № 3. – С. 38 – 44.
32. Кучис, Е. В. Гальваномагнитные эффекты и методы их исследования / Е. В. Кучис. – М.: Радио и связь, 1990. – 264 с.
33. Manic, D. Temperature cross-sensitivity of Hall plate in submicron CMOS technology / D. Manic, R. Petr, S. Popovic // Sensors and Actuators A: Physical. – 2000. – vol.85. – pp. 244 – 248. – doi:10.1016/S0924-4247(00)00399-X.
34. Junfeng, J. A Continuous-Time Ripple Reduction Technique for Spinning-Current Hall Sensors // IEEE Journal of Solid-State Circuits. – 2014. – vol. 49. – iss. 7. pp. 1525 – 1534. – doi:10.1109/JSSC.2014.2319252.
35. Paun, M.-A. Hall Effect Sensors Design, Integration and Behavior Analysis / M.-A. Paun, J.-M. Sallese, M. Kayal // Journal of Sensor and Actuator Networks. – 2013. – vol. 2. – iss. 1. – pp. 85 – 97. – doi: 10.3390/jsan2010085.
36. Преобразователи Холла [Электронный ресурс]: технические характеристики преобразователей Холла. – Электрон. дан. (1 файл). – СПб., – Режим доступа: [https://docs.wixstatic.com/ugd/df2cd8\\_5303bf3b9bd544b9b22dbe991559027e.pdf](https://docs.wixstatic.com/ugd/df2cd8_5303bf3b9bd544b9b22dbe991559027e.pdf) – Загл. с экрана.
37. Cholakova, I. N. Temperature Influence on Hall Effect Sensors Characteristics / I. N. Cholakova, T. B. Takov, R. T. Tsankov et. al. // 20th Telecommunications forum TELFOR. – 2012. – pp.967 – 970. – doi: 10.1109/TELFOR.2012.6419370.
38. Арцимович, Л. А. Элементарная физика плазмы / Л. А. Арцимович. – М: Изд-во: Госатомиздат, 1963. – 98 с.
39. Bakker, A. A CMOS spinning-current Hall effect sensor with integrated submicrovolt offset instrumentation amplifier / A. Bakker, J. H. Huijsing // STW/SAFE99. – 1999. – pp. 17 – 20.

40. Onsager, Lars. Reciprocal Relations in Irreversible Process / Lars Onsager // *Physical Review*. – Feb. 15, – 1931. – vol. 37. – pp. 405 – 426.
41. Mosser, V. A Spinning Current Circuit for Hall Measurements Down to the Nanotesla Range / V. Mosser, N. Matringe, and Y. Haddab // *IEEE Transaction on instrumentation and measurement*. – 2017. – vol. 66. – iss. 4. – doi: 10.1109/TIM.2017.2649858.
42. Paun, M.-A. Offset and Drift analysis of the Hall Effect Sensors. The Geometrical Parameters Influence / M.-A. Paun, J.-M. Sallese, M. Kayal // *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures*. – 2012. – vol. 7. – iss. 3. – pp. 883 – 891.
43. Popovic, D. Three-axis teslameter with integrated hall probe / D. Popovic, S. Dimitrijevic, M. Blagojevic et al. // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. – 2007. – vol. 56. – iss. 4. – doi: 10.1109/TIM.2007.900133.
44. Hall ICs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.rohm.com/products/sensors-mems/hall-ics>. – Загл. с экрана.
45. Angle Position on Axis [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ams.com/angle-position-on-axis>. – Загл. с экрана.
46. Fang, J. C. A novel calibration method of magnetic compass based on ellipsoid fitting / J. C. Fang, H. W. Sun, J. Cao, et. al. / *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. – 2011. – vol. 60. – pp. 2053 - 2061 – doi: 10.3390/s140508485.
47. Nikos, G. Head detection and tracking by 2-D and 3-D ellipsoid fitting / G. Nikos, G. S. Michael // *In Proceedings of the International Conference on Computer Graphics, Geneva, Switzerland*. – 2000. – pp. 221 – 226. – doi: 10.1109/CGI.2000.852337.
48. Frédéric, C. Numerical calibration for 3-axis accelerometers and magnetometers / C. Frédéric, S. Harasse, A. Monin // *IEEE International Conference on Electro/Information Technology*. – 2009. – pp. 217 – 221. – doi:10.1109/EIT.2009.5189614.

49. Бобрешов, А. М. Проблемы анализа сильно нелинейных режимов электронных устройств на основе рядов вольтерры / А. М. Бобрешов, Н. Н. Мымрикова // Вестник ВГУ. Сер.: Физика. Математика. – 2013. – №2. – С. 15 – 25.
50. Хургин, Я. И. Фinitные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
51. Печенков, А. Н. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики / А. Н. Печенков, В. Е. Щербинин. – Екатеринбург: УрО РАН, 2004. – 177 с.
52. Thide, B. Electromagnetic Field Theory / B. Thide. – Sweden: Upsilon Books, 2001. – 366 p.
53. Garc'ia-Cervera, Carlos J. Numerical Micromagnetics: A Review / Carlos J. Garc'ia-Cervera. // Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. – 2007. – pp. 1 – 33
54. . Yan, Sh. Theoretical Formulation of a Time-Domain Finite Element Method for Nonlinear Magnetic Problems in Three Dimensions / Sh. Yan, Jin J. // Progress In Electromagnetics Research. – 2015. – vol. 153. – pp. 33 – 55.
55. Vansteenkiste, A. The design and verification of MuMax3 / A. Vansteenkiste, J. Leliaert, M. Dvornik et. al. // AIP Advances. – 2014. – vol. 4. – iss. 10. – 107133. – doi: <https://doi.org/10.1063/1.4899186>.
56. Щур М. Л. Об обратной задаче магнитостатики / М. Л. Щур, А. П. Новослугина, Я. Г. Смородинский // Дефектоскопия. – 2013. – Т. 49. – №8. – С. 43 – 53.
57. Likkason, O. K. Exploring and Using the Magnetic Methods / O. K. Likkason // Advanced Geoscience Remote Sensing. – 2014. – pp. 141 – 174. – doi: 10.5772/57163.
58. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов и др. – М. Наука, 1990. – 232 с.
59. Терлецкий, Я. П. Электродинамика / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1990. – 352 с.

60. Thiec, Le Ph. Recent Improvements for Solving Inverse Magnetostatic Problem Applied to Thin Shells / Ph. Le Thiec, O. Chadebec, J.-L. Coulomb et. al. // IEEE Transactions on Magnetics – 2002. – vol: 38. – iss. 2. –pp. 1005 – 1008. – doi: 10.1109/20.996258.
61. Sheinker, A. Magnetic Anomaly Detection Using a Three-Axis Magnetometer / A. Sheinker, L. Frumkis, B. Ginzburg et. al. // IEEE Transactions on Magnetics. – 2009. – vol. 45. – iss. 1.– pp. 160 – 167. – doi: 10.1109/TMAG.2008.2006635.
62. Mc Fee, J. E. Locating and Identifying compact ferrous objects / J. E. Mc Fee, Y. Das., Elingson R. O. // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1990. – vol. 28. – iss. 2. pp. 182 – 193. – doi: 10.1109/36.46697.
63. Kay, M. S. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory (v.1) / M.S. Kay. – NJ: Prentice Hall, 1993. – 595 pp.
64. Boero, G. Micro-Hall devices: performance, technologies and applications / G. Boero, M. Demierre, P.-A. Besse, R.S. Popovic // Sensors and Actuators A Physical. – 2003. – vol. 106. – pp. 314 – 320. – doi: 10.1016/S0924-4247(03)00192-4.
65. Игнатъев, В. К. Соотношения взаимности для нелинейной магнитоактивной плазмоподобной среды / В. К. Игнатъев, С. В. Перченко [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона. – 2014. – №4. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2014/2694>. - Загл. с экрана.
66. Курант, Р. Уравнения с частными производными: пер. с англ. / Р. Курант; под ред. О.А. Олейник. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
67. Арнольд, В. И. Лекции об уравнениях с частными производными/ В. И. Арнольд. – 2е изд.– М.: Фазис, 1997. – 175 с.
68. Bardin, A. Reciprocal relations for nonlinear multipole in inhomogeneous magnetic field A. Bardin, V. Ignatjev, A. Orlov et.al. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2017. – vol. 441. – pp. 276 – 282. – doi: 10.1016/j.jmmm.2017.05.079

69. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов.– М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
70. Голубев, А. А. Прецизионный магнитометр / А. А. Голубев, В. К. Игнатъев, А. В. Никитин // Приборы и техника эксперимента. – 2008. – № 5. – С. 123 – 128.
71. Игнатъев, В. К. Исследование соотношений взаимности для нелинейного многополюсника в неоднородном магнитном поле / В. К. Игнатъев, С. В. Перченко // Журнал технической физики. – 2017. – Т. 87. – № 6. – С. 837 – 846.
72. Самойлович, А. Г. Современное состояние теории термоэлектрических и термомагнитных явлений в полупроводниках / А. Г. Самойлович, Л. Л. Коренблит // Успехи физических наук. – 1953. – Т. 49. – №2. – С. 337 – 383.
73. Shifrin, V. Ya. Magnetic flux density standard for geomagnetometers / V. Ya. Shifrin, E. B. Alexandrov, T. I. Chikvadze // Metrologia, 2000. – iss. 37. – pp. 219 – 227.
74. Windall, S. Lecture L3 - Vectors, Matrices and Coordinate Transformations / S. Windall. – Электрон.дан. (1 файл). – Режим доступа: [http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16\\_07F09\\_Lec03.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec03.pdf). – Загл.с экрана.
75. Nelder, J. A. A Simplex Method for Function Minimization/ Nelder, J. A., Mead, R. //The Computer Journal. – 1965. – vol. 7.– pp. 308 – 313
76. Bludova, A. I. Method for determining local current density in 2G HTS tapes // Physics Procedia. – 2015 . – vol. 71. – pp. 394 – 400.
77. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц / В 10 т. Т. VII. Теория упругости. – 5е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 264с.
78. Stevens, K. J. Stress dependence of ferromagnetic hysteresis loops for two grades of steel / K. J. Stevens // NDT&E International. – 2000. – vol. 33. – pp. 111 – 121.
79. Методика поверки образцовых и рабочих средств измерений магнитного момента МИ 191-79. – М.: Издательство стандартов, 1980. – 19 с.

80. Милитесламетры портативные универсальные ТП2-2У: описание средства измерения 16372-02. М. – 2002. – 3с.
81. Игнатъев, А. А. Гетеромагнитометрия: микро- и наноэлектроника, геоинформационные технологии / А. А. Игнатъев, А. В. Ляшенко, М. Н. Куликов и др. – Изд-во Саратовского университета: 2015. – 180 с.
82. Resolutions adopted. The 26<sup>th</sup> General Conference of Weights and Measures. Versailles. – 13 – 16 November 2018. – 16p.
83. Шифрин, В. Я. Государственный первичный эталон единиц магнитной индукции, магнитного потока, магнитного момента и градиента магнитной индукции / В. Я. Шифрин, В. Н. Хорев, В. Н. Калабин и др. // Измерительная техника. – 2012. – № 7. – С. 3 – 7.
84. ГОСТ 8.030-2013 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Государственная поверочная схема для средств измерений магнитной индукции, магнитного потока, магнитного момента и градиента магнитной индукции. Дата введения 2015-01-01.

## Приложение А.

**Аппаратно-программный комплекс для исследование четырехполюсника в заданном неоднородном магнитном поле**

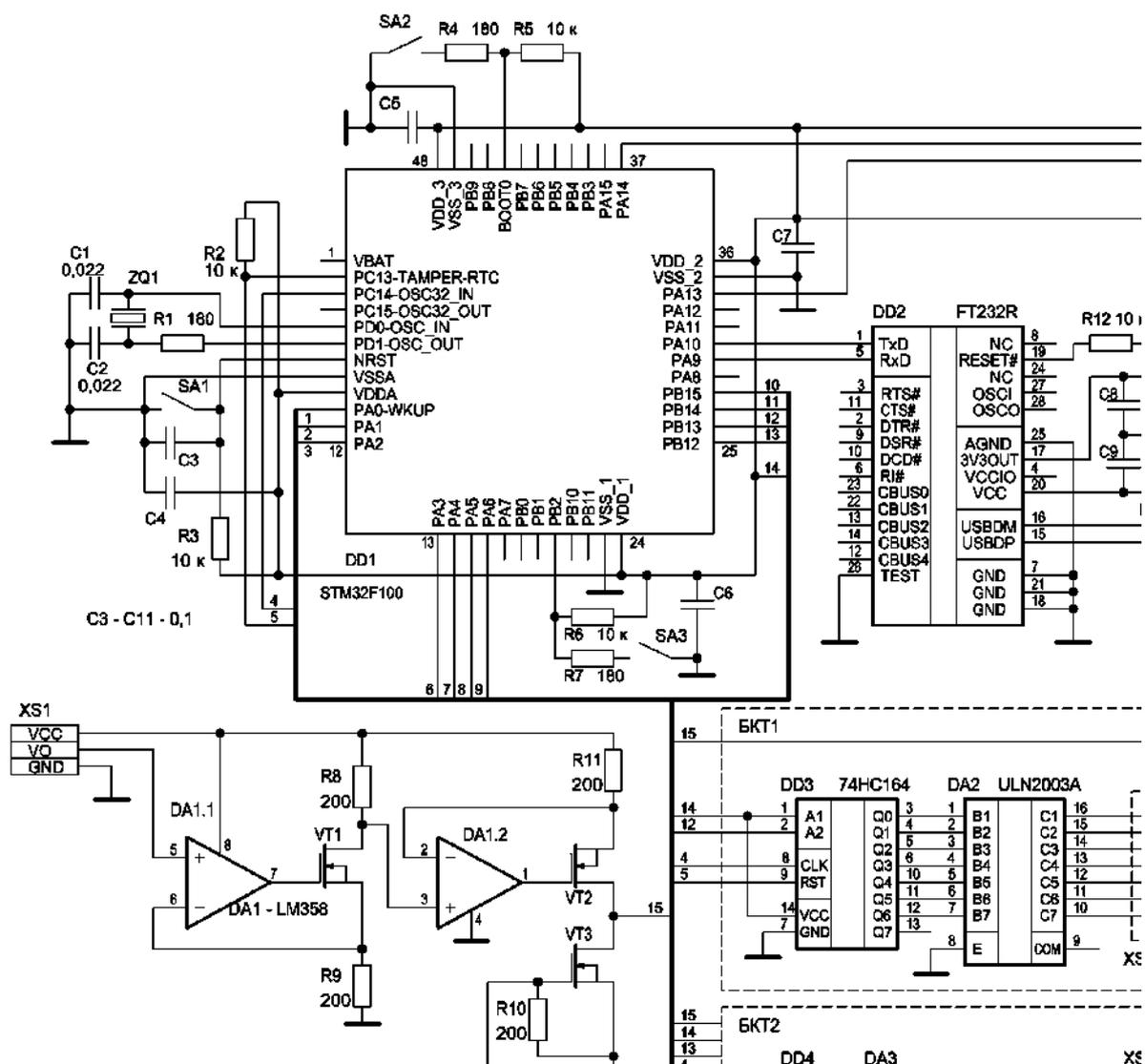


Рисунок А.1 – Принципиальная схема блока формирования магнитного поля

В качестве микроконтроллера используется микросхема DD1 STM32F100C4T6V. Микроконтроллер осуществляет управление десятью блоками коммутации тока БКТ, каждый из которых (кроме БКТ 10) содержит 7 проводников. Общее количество проводников – 64. Все проводники при помощи групп разъемов

XS1 – XS10 одним концом подключены к источнику тока, а другим – к одному из выводов 7-канального усилителя тока DA2 ULN2003A, который через сдвиговый регистр DD3 74HC164 управляется микроконтроллером. Резистор R2 предназначен для защиты от случайного сброса регистров DD1–DD10.

Источник тока на основе усилителей DA1.1 и DA1.2 (сдвоенный операционный усилитель LM358) собран по стандартной схеме, но в качестве управляющих элементов в нем использованы МОП-транзисторы VT1, VT3IRF7314 и VT2IRF7313 – это сделано для обеспечения малости тока управления. Коэффициент преобразования входного напряжения в ток определяется прецизионными резисторами R8, R9 и R11 типоразмера SMD1206 и рассчитывается по формуле

$$I(U) = \frac{R8}{R9 \cdot R11} U \quad (A.1)$$

Транзистор VT3 управляется микроконтроллером и служит для включения режима короткого замыкания источника тока на время переключения блоков коммутации тока БКТ1 – БКТ10, чтобы источник тока не уходил в насыщение.

Передача данных между МК и ПК осуществляется при помощи преобразователя интерфейсов UART-COM-USBDD2FT232RL, который осуществляет передачу данных по двум линиям по асинхронному протоколу UART. Конденсаторы C9, C11 и катушка индуктивности L1 образуют фильтр, снижающий наводки от цепей питания компьютера. Поскольку питание микроконтроллера 2...3.6 В, то использована встроенная возможность преобразователя FT232RL, позволяющая использовать его вывод 3V3OUT как маломощный источник напряжения (с током до 50 мА). Резистор R12 и конденсатор C10 предназначены для защиты DD12 от случайного сброса.

Программирование микроконтроллера DD1 осуществляется через стандартный разъем SWDXS12. Конденсаторы C4 – C7 предназначены для стабилизации питания микроконтроллера, резисторы R4 – R7 совместно с переключками SA2 и SA3 образуют цепи управления программированием. Резистор

R3 и конденсатор C3 предназначены для защиты от случайного сброса, для произведения сброса вручную служит кнопка SA1. Элементы R1, C1, C2 и кварцевый резонатор ZQ1 образуют цепь, задающую тактовую частоту микроконтроллера. В данном случае удалось использовать кварцевый резонатор с частотой 25 МГц, что превышает значение, указанное в технической документации микроконтроллера, однако проблем при работе на повышенной частоте обнаружено не было.

Система проводников представляет собой 64 параллельных проволоки диаметром 90 мкм, расположенных в одной плоскости (рисунок А.2). При ее изготовлении на пластмассовом цилиндре диаметром 20 мм через прокладку из конденсаторной бумаги виток к витку была намотана проволока с проклейкой клеем БФ-6, разбавленным спиртом в соотношении 1:6. После этого проволока была разрезана в направлении, перпендикулярном виткам, таким образом, получалась система большого числа параллельных проводников. Эта система наклеена на алюминиевую пластину для обеспечения необходимого уровня отведения тепла. Проволочки припаяны к двум контактным платам, которые приклеены к алюминиевой пластине клеем «Монолит».

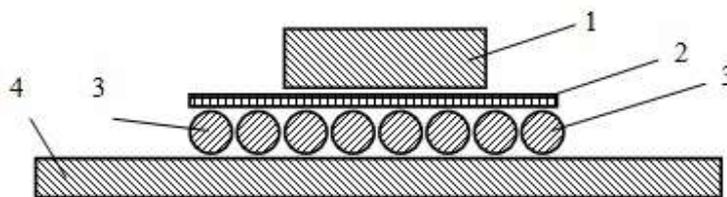


Рисунок А.2 – Система проводников:

1 – Преобразователь Холла (ПХ), 2 – изолятор, 3 – медная проволока, 4 –  
алюминиевое основание

Платы БКТ соединяются с контактными платами посредством пар разъемов PLS–PBD, XS4 – XS13. Сверху на систему проволочек с помощью зажима крепится ПХЭ602817А активной зоной вниз. Предварительно индиевые контактные площадки ПХ для приближения его чувствительной поверхности к проводникам срезаются до подводящих проводов.

Вторым функциональным узлом измерительной установки является цифровой холловский магнитометр, состоящий из измерительного блока и блока микроконтроллера. Принципиальная схема магнитометра представлена на рисунке А.3.

Измерительный блок собран по схеме, основанной на [А.1]. DD3 представляет собой 24 разрядный сигма-дельта АЦП (AD7190). Источник тока состоит из мощного операционного усилителя DA3 (AD8531), источника опорного напряжения DA5 (ISL21007) и трех опорных резисторов R1, R2, R3.

Рассмотрим процесс коммутации ключей VT1 – VT5 подробнее. Выходные линии P2, P3 АЦП DD3 подключены через оптические развязки DA8, DA9 (PC357) к адресным входам А (A0), В (A1) дешифратора DD1 (74F138). Линия P1 АЦП подключена через оптическую развязку DA7 к затворам силового ключа VT5 (IRF7103), управление которыми задаёт режим тока в обход датчика Холла. Коммутацию входов аналогового ключа DA3 (ADG884) осуществляет линия P0 АЦП. Линии АЦП P0 – P3 должны обеспечивать аппаратную реализацию четырехтактного алгоритма измерения напряжения на контактах датчика Холла, управляя ключами (M) и через оптически развязанные линии (SHORT\_CUT, A0, A1). В зависимости от состояния управляющих линий A0, A1 на входах дешифратора DD1 формируется последовательность сигналов, управляющий через DD2 (74F04) системой коммутации режимов тока (ключи VT1 – VT5). АЦП работает в двухполярном режиме и имеет диапазон входных напряжений  $\pm 312,5$  мВ. Напряжение с контактов датчика Холла подаётся на неинвертирующий усилитель, который собран на ОРА211. Коэффициент усиления DA6, равный 250, определяется

прецизионными резисторами R4, R5. Далее сигнал через фильтр R16, C9 поступает на входы AIN1, AIN2 АЦП DD3.

АЦП соединен посредством интерфейса SPI по линиям DOUT, DIN, CS, SCLK с цифровым блоком (рисунок А.3), который осуществляет обработку данных. После первичной инициализации, во время которой происходит процесс конфигурирования регистров АЦП, программно выбирается режим тока, и ключи устанавливаются в положение, соответствующее первому такту. Далее запускается АЦП, и по четырехтактному алгоритму измеряются напряжения на токовых (Т1 и Т2) и потенциальных (П1 и П2) контактах датчика Холла. Результаты измерений суммируются и усредняются.

Ядром блока микроконтроллера магнитометра является микроконтроллер DD4 ATmega16. Он служит для управления измерительным блоком, получения данных от него при помощи интерфейса SPI и для связи с ПК. Программирование микроконтроллера осуществляется методом внутрисистемного программирования через стандартный разъем ISP-SPIXS3. Связь с компьютером обеспечивается через преобразователь интерфейса UART-USB(COM) DD5 FT232RL, который подключается к ПК через разъем USB-BXS2.

Конденсаторы C15, C16, C18 – C21 (керамические конденсаторы поверхностного монтажа типоразмер SMD0805) предназначены для блокировки ВЧ наводок и стабилизации питания соответствующих микросхем. Электролитические конденсаторы C15 и C17 (типоразмер SMD1206) служат для фильтрации питания. Резистор R22 и конденсатор C21 образуют фильтр аналогового питания DD4, резисторы R12 и R21 предохраняют выводы микросхем от случайного сброса логического уровня.

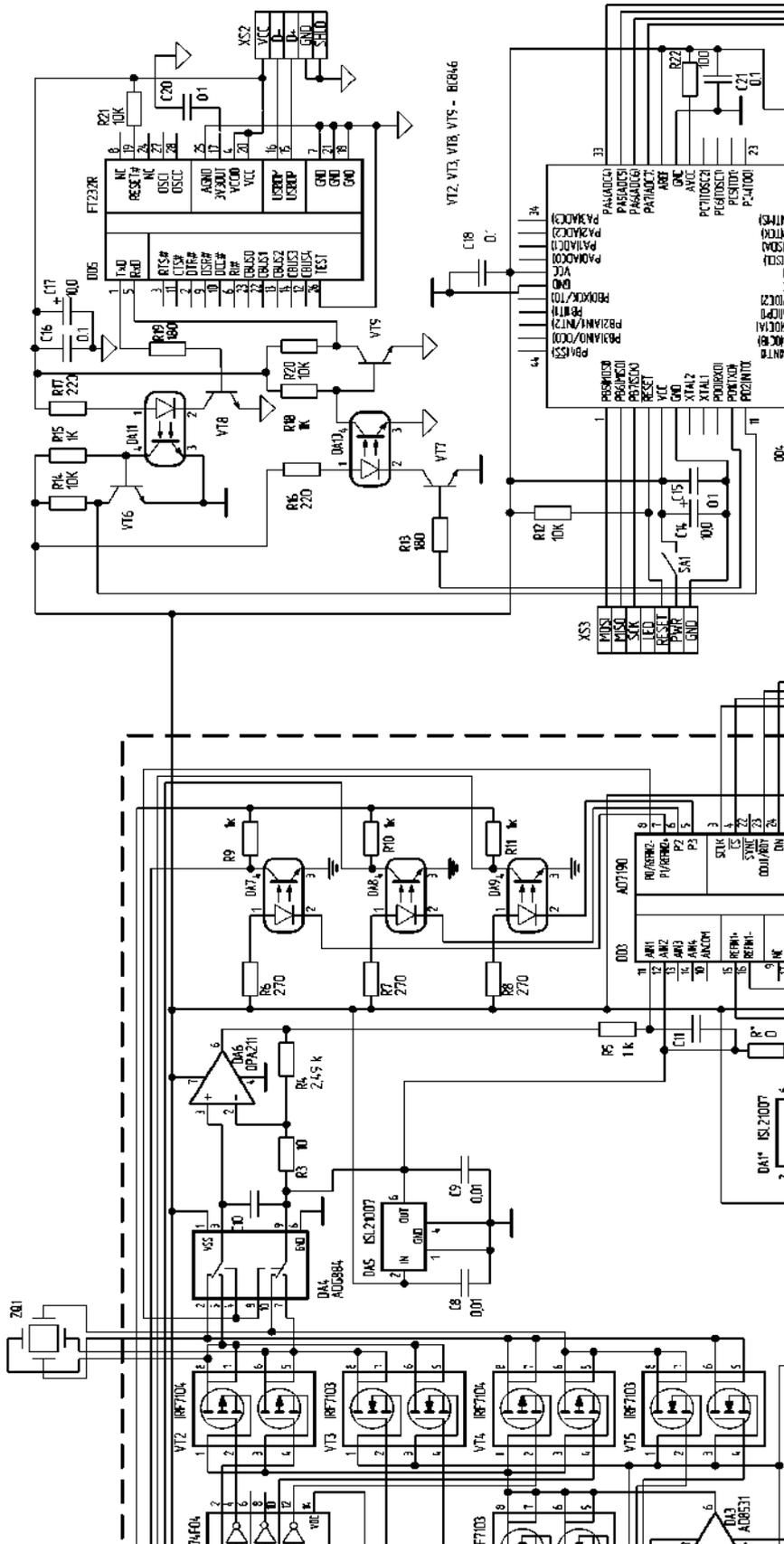


Рисунок А.3 – Принципиальная электрическая схема цифрового холловского магнитометра

На резисторах R13 – R20, транзисторах VT6 – VT9 (BC846) и оптопарах DA10 и DA11 (PC817) реализована схема оптической развязки интерфейса UART. Все используемые резисторы – типоразмера SMD0805.

Синхронизация ЦХМ и БКТ осуществляется через интерфейсную программу. Первоначально производится подключение обоих устройств к соответствующим виртуальным СОМ–портам. Цикл измерения запускается по нажатию соответствующей кнопки, после чего ПК передает микроконтроллеру 10 байт данных, соответствующих необходимым кодам регистров сдвига. Микроконтроллер хранит эти данные, и после получения соответствующей команды ПК устанавливает их в БКТ. Затем интерфейсная программа запускает цикл измерения ЦХМ. При этом имеется возможность использовать различные алгоритмы измерения магнитного поля (четырёхтактный, двухтактный и одноктактный). Результаты измерений записываются в файл для дальнейшей обработки. Количество отсчетов измеренного магнитного поля задается в интерфейсной программе. После получения установленного числа значений магнитного поля интерфейсная программа отправляет микроконтроллеру следующие 10 байт, кодирующие новое распределение токов. Алгоритм повторяется до тех пор, пока не проведены измерения для всех указанных в интерфейсной программе проводников.

#### Список литературы

А.1. Перченко, С. В. Холловский дефектоскоп / С. В. Перченко, Д. А. Станкевич // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. — 2010. — № 13. — С. 118-126.

## Приложение Б.

### Двухканальный протонный релаксационный магнитометр

В качестве датчиков для регистрации сигнала затухания свободной индукции используются пластмассовые торы с дистиллированной водой, на которые намотан провод. Датчики намотаны проводом ПЭЛ диаметром 0,6 мм. Торы содержат 2000 витков каждый, имеют сопротивление 13 Ом и индуктивность 10,8 мГн. Датчиков два, они жестко закреплены на общей оси вращения на расстоянии 100 мм друг относительно друга. Два датчика необходимы для измерения градиента геомагнитного поля и исключения его дрейфа при исследовании метрологических характеристик прибора.

Для того чтобы в датчике возникала свободная ядерная прецессия, необходимо поляризовать активное вещество (дистиллированная вода) сильным магнитным полем в течение нескольких секунд, а потом выключить это поле.

Блок схема разработанного релаксационного магнитометра приведена на рисунке Б.1.



Рисунок Б.1 – Блок схема релаксационного магнитометра

Управление режимами и временем поляризации осуществляется микроконтроллером. Система управления поляризацией подключает датчики к источнику поляризующего напряжения в установленном микроконтроллером режиме. Возникший после отключения поляризующего напряжения сигнал затухания

свободной индукции поступает на усилительную систему, где происходит его усиление и фильтрация. Усиленный и отфильтрованный сигнал оцифровывается и передается в ПК. Подробная схема аналоговой части приведена на рисунке Б.2. Устройство состоит из двух параллельных каналов, каждый из которых подключён к датчикам L1 и L2 соответственно. Транзисторы VT1 – VT4, управляются микроконтроллером STM32F407VGT6, они подключают и отключают каналы прибора от источника поляризующего напряжения. Первый и второй каналы работают аналогично и одновременно. Для обеспечения схемы питанием используется два аккумулятора 3.7 В, в качестве источника поляризующего напряжения используется аккумулятор 12 В. В полях разной неоднородности разумнее использовать разное время для поляризации образца, поэтому режим поляризации управляется контроллером.

Усилительная система представляет собой два параллельных идентичных аналоговых тракта. Схема одного канала усилителя состоит из двух неинвертирующих каскадов, собранных на сдвоенном малошумящем операционном усилителе ОРА2211 (DA1, DA2). Амплитуда сигнала свободной прецессии на входе усилителя составляет несколько долей микровольта, поэтому для точного измерения частоты сигнала необходимо увеличить коэффициент сигнал/шум. Для этого используется полосовой активный фильтр второго порядка, выполненный на операционном усилителе ОРА2211 (DA3), с коэффициентом усиления 100 и полосой пропускания 500 Гц.

После усилительной системы сигнал через буфер поступает в высокоскоростную систему дискретизации напряжения, собранную на микросхеме LTC2203. LTC2203 подключен к suusb3kit-003, которое передает на ПК данные по протоколу USB 3.0. Тактовая частота для АЦП составляет 10 МГц. В качестве источника тактового сигнала используется кварцевый генератор MV-89 с относительной дисперсией Алана за 1 с менее  $10^{-11}$  и относительной долговременной стабильностью не хуже  $10^{-10}$  в течение суток.

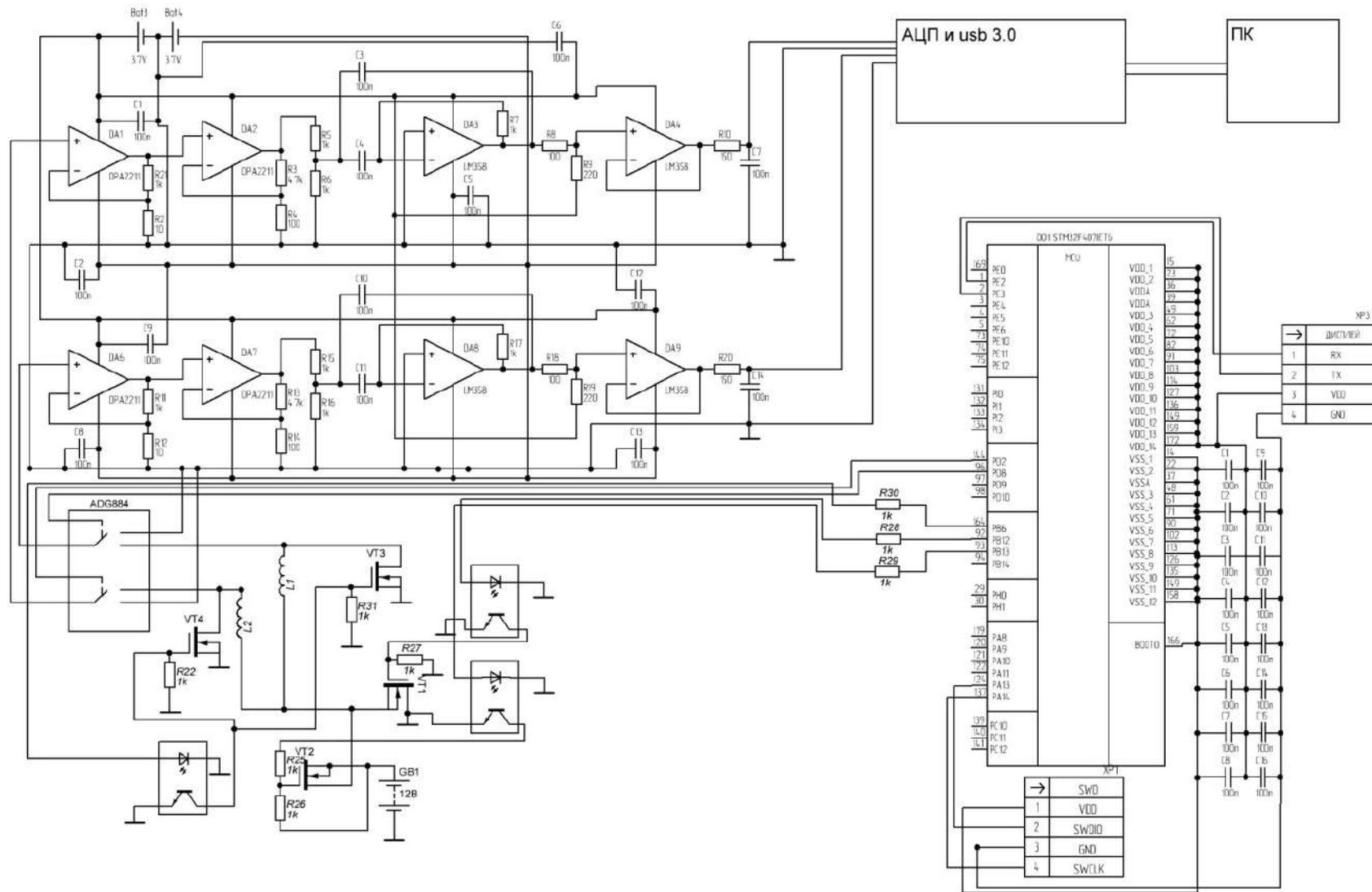


Рисунок Б.2 – Принципиальная схема аналоговой части

## Приложение В.

### Квантовая модель магнитных свойств ферромагнитных образцов, испытывавших деформацию

Показано, что гамильтониан  $\hat{H}_K$  взаимодействия полного момента электрона, локализованного в  $n$ -м узле кристаллической решетки, с кристаллическим окружением можно получить в рамках модели суперпозиционного кристаллического поля, используя метод эквивалентных операторов. Благодаря явлению магнитострикции решетка  $\alpha$ -Fe искажается (эффект Яна-Теллера [В.1]), в направлении одной из осей 4-го порядка  $C_4$ , например, вдоль  $[001]$ . Поэтому ферромагнетик  $\alpha$ -Fe с хорошей точностью также можно считать одноосным кристаллом тетрагональной сингонии, принадлежащим магнитному кристаллическому классу  $D_{4h}$ . Тетрагональное кристаллическое поле представляет собой сумму аксиального поля и кубического.

Считая заряды  $q_n = +2e$ , локализованные на ионах  $Fe^{2+}$  решетки, точечными, энергию электрона в кристаллическом поле можно представить классическим выражением  $-e\Phi(\mathbf{r})$ . Рассматривая мультипольное разложение только по четным степеням  $l$ , поскольку матричные элементы нечетных степеней разложения обращаются в ноль, учитывая тетрагональную симметрию кристаллов группы железа, в приближении ближайших соседей после несложных преобразований потенциал можно записать в явном виде:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0^3} 2A_2^0 (3z^2 - r^2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{70}{9} \frac{q}{a^5} \left( x^4 + y^4 + z^4 - \frac{3}{5} r^4 \right) + \dots,$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, первое слагаемое – решеточная сумма (потенциал Маделлунга), которая не изменяет магнитного состояния системы, а только создает постоянный сдвиг энергии и поэтому не включается в эффективный гамильтониан; третье – потенциал, создаваемый 8-ю зарядами  $q$ , находящимися в вершинах куба на расстоянии  $r_1 = a\sqrt{3}/2$  от заданного электрона; второе – потенциал, создаваемый 8-ю зарядами  $q$ , находящимися в вершинах удлиненного куба со сторонами  $a$  и  $c$  ( $>a$ ) на

расстоянии

$$r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2}$$

от заданного электрона, а коэффициент разложения при квадратичном слагаемом с учетом его тетрагональной симметрии имеет вид:

$$A_2^0 = 3 \cos^2 \theta_0 - 1 = 3 \left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1 = \frac{6}{1 + \left(\frac{2a}{c}\right)^2} - 1,$$

величина  $c/a$  называется тетрагональностью и характеризует величину относительной деформации кубической решетки, обусловленной действием тетрагонального возмущения кристаллического поля.

В итоге энергия взаимодействия домена с тетрагональным возмущением кристаллического поля можно представить как сумму потенциалов магнитных электронов домена

$$W_{Ki} = -e \sum_{n=1}^{4N_i} \Phi_n \approx -\frac{8\sqrt{2}\Phi_0}{a^2} f(a, c) \sum_{n=1}^{4N_i} (3z^2 - r^2)_n - \frac{140\Phi_0}{9a^4} \sum_{n=1}^{4N_i} \left(x^4 + y^4 + z^4 - \frac{3}{5}r^4\right)_n, \quad (\text{B.1})$$

где

$$\Phi_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \approx 5,04 \text{ эВ}, \quad f(a, c) = \left[5 - \left(\frac{2a}{c}\right)^2\right] / \left[1 + \left(\frac{2a}{c}\right)^2\right]^{5/2},$$

$N_i$  – количество узлов кристаллической решетки в  $i$ -м домене, оси координат направлены вдоль осей легкого намагничивания  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , совпадающих с кристаллографическими осями  $[100]$ ,  $[010]$  и  $[001]$   $\alpha$ -Fe, направления которых постоянны в пределах кристаллита, но меняются случайным образом при переходе от кристаллита к кристаллиту.

Деформированное состояние образца характеризуется симметричным тензором деформаций  $u_{\alpha\beta}$ . В результате деформации ферромагнетика изменяется кристаллическое поле, потенциал которого содержит степенные функции координат электронов. Для построения модели, описывающей большие деформации, учтем нелинейные слагаемые по деформации второго порядка, что приведет к следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned}
(r_\alpha')^4 &\approx r_\alpha^4 + 4r_\alpha^3 u_{\alpha\beta} r_\beta + 6r_\alpha^2 u_{\alpha\beta} u_{\alpha\gamma} r_\beta r_\gamma = r_\alpha^4 + 4r_\alpha^3 (\bar{\mathbf{u}}\mathbf{r})_\alpha + 6r_\alpha^2 (\bar{\mathbf{u}}\mathbf{r})_\alpha^2, \\
(r')^4 &= (r^2 + 2u_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} r_\alpha r_\gamma)^2 \approx r^4 + 4r^2 u_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + 2r^2 u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} r_\alpha r_\gamma + 4u_{\alpha\beta} u_{\mu\nu} r_\alpha r_\beta r_\mu r_\nu = \\
&= r^4 + 4r^2 \bar{\mathbf{r}}\mathbf{u}\mathbf{r} + 2r^2 (\bar{\mathbf{u}}\mathbf{r})^2 + 4(\bar{\mathbf{r}}\mathbf{u}\mathbf{r})^2.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$ .

Оставляя квадратичные по деформации слагаемые, запишем энергию домена в кристаллическом поле (B.1) деформированного кристаллита с учетом преобразования (B.2) в виде:

$$\begin{aligned}
W_{Ki} &= -\frac{0.304\sqrt{2}\Phi_0}{a^2} \sum_{n=1}^{4N_i} (3z'^2 - r'^2)_n - \frac{140\Phi_0}{9a^4} \sum_{n=1}^{4N_i} \left( x'^4 + y'^4 + z'^4 - \frac{3}{5} r'^4 \right)_n = \\
&= W_{Ki}^{(0)} + W_{Ki}^{(1)} + W_{Ki}^{(2)} + W_{Ki}^{(3)} + W_{Ki}^{(4)} + W_{Ki}^{(5)},
\end{aligned}$$

где  $W_{Ki}^{(0)}$  – энергия домена в недеформированном кристаллите вида (B.1),  $W_{Ki}^{(1)}$ ,  $W_{Ki}^{(2)}$ ,  $W_{Ki}^{(3)}$ ,  $W_{Ki}^{(4)}$  и  $W_{Ki}^{(5)}$  – составляющие магнитоупругой энергии домена:

$$W_{Ki}^{(1)} = -\frac{0.608\sqrt{2}\Phi_0}{a^2} \sum_{n=1}^{4N_i} \{3u_{z\beta} z r_\beta - u_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta\}_n, \tag{B.3}$$

$$W_{Ki}^{(2)} = -\frac{0.304\sqrt{2}\Phi_0}{a^2} \sum_{n=1}^{4N_i} (3u_{z\beta} u_{z\gamma} - u_{\alpha\beta} u_{\alpha\gamma}) \{r_\beta r_\gamma\}_n, \tag{B.4}$$

$$W_{Ki}^{(3)} = -\frac{560\Phi_0}{9a^4} \sum_{n=1}^{4N_i} \left\{ r_\alpha^3 u_{\alpha\beta} r_\beta + \frac{3}{2} r_\alpha^2 u_{\alpha\beta} u_{\alpha\gamma} r_\beta r_\gamma \right\}_n, \tag{B.5}$$

$$W_{Ki}^{(4)} = \frac{336\Phi_0}{9a^4} \sum_{n=1}^{4N_i} r_n^2 \left\{ u_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} r_\alpha r_\gamma \right\}_n, \tag{B.6}$$

$$W_{Ki}^{(5)} = \frac{336\Phi_0}{9a^4} \sum_{n=1}^{4N_i} \{u_{\alpha\beta} u_{\mu\nu} r_\alpha r_\beta r_\mu r_\nu\}_n. \tag{B.7}$$

Выполняя в рамках метода эквивалентного оператора преобразования формул (B.3) – (B.7), получим

$$\hat{H}_{Ki}^{(0)} = W_T(a, c) \frac{(\hat{J}_z^2)_i}{N_i} - W_K \frac{(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2)_i}{N_i^3}, \tag{B.8}$$

$$\hat{H}_{Ki}^{(1)} = \frac{W_T}{6N_i} \{3u_{z\beta} (\hat{J}_z \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_z) - u_{\alpha\beta} (\hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\alpha)\}_i, \tag{B.9}$$

$$\hat{H}_{Ki}^{(2)} = \frac{W_T}{6N_i} (3u_{z\beta} u_{z\gamma} - u_{\alpha\beta} u_{\alpha\gamma}) (\hat{J}_\gamma \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\gamma)_i, \tag{B.10}$$

$$\hat{H}_{Ki}^{(3)} = -\frac{2W_K}{N_i^3} \{u_{\alpha\beta} (\hat{J}_\alpha^3 \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\alpha^3) + 3u_{\alpha\beta} u_{\alpha\gamma} \hat{J}_\alpha^2 \hat{J}_\beta \hat{J}_\gamma\}_i, \tag{B.11}$$

$$\hat{H}_{Ki}^{(4)} = \frac{1152W_K}{20N_i} \left\{ 2u_{\alpha\beta} (\hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\alpha) - u_{\alpha\beta} u_{\gamma\beta} (\hat{J}_\alpha \hat{J}_\gamma + \hat{J}_\gamma \hat{J}_\alpha) \right\}_i, \quad (\text{B.12})$$

$$\hat{H}_{Ki}^{(5)} = \frac{3W_K}{10N_i^3} u_{\alpha\beta} u_{\mu\nu} \left\{ (\hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\alpha) (\hat{J}_\mu \hat{J}_\nu + \hat{J}_\nu \hat{J}_\mu) + (\hat{J}_\mu \hat{J}_\nu + \hat{J}_\nu \hat{J}_\mu) (\hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta + \hat{J}_\beta \hat{J}_\alpha) \right\}_i, \quad (\text{B.13})$$

где  $\hat{J}_i$  – оператор полного механического момента  $i$ -го домена,

$$W_K = 197_0 \left( \frac{a_B}{Za} \right)^4 = 2,5 \text{ мЭВ}, \quad W_T(a, c) = 102\Phi_0 f(a, c) \left( \frac{a_B}{Za} \right)^2 = 26f(a, c) \text{ мЭВ} \quad (\text{B.14})$$

– кубическая и тетрагональная константы кристаллического поля. Для большинства мартенситных сталей максимальная тетрагональность решетки, обусловленная растворением атомов углерода, составляет величину  $c/a = 1.08$ . В этом случае функция  $f(a, c) = 0.038$  и тетрагональная константа кристаллического поля принимает значение  $W_T \approx 972$  мкЭВ.

Для перехода к макроскопической модели введем следующие величины:  $\mathbf{m}_i = -g\mu_B \langle \hat{J}_i \rangle$  – магнитный момент  $i$ -го кристаллита,  $v_i$  – его объем,  $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i/v_i$  – его намагниченность и  $M_S = 2g\mu_B N_i/v_i$  – намагниченность насыщения домена с учетом величины момента  $J = 2N$ . Тогда, усредняя суммы операторов (B.8) – (B.13) по состоянию с наибольшим спиновым моментом, т.е. намагниченности насыщения, и пренебрегая дисперсией оператора полного момента, выражение для плотности энергии анизотропии, обусловленной взаимодействием домена с кристаллическим полем деформированного кристаллита можно представить в виде:

$$\begin{aligned} w_a = & \frac{\mu_0 M_T}{M_S} (\mathbf{mc})^2 + \frac{\mu_0 M_T}{3M_S} \left\{ 3\mathbf{m}_z \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} - \mathbf{m} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} + 3(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})_z^2 - (\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})^2 \right\} - \\ & - \frac{\mu_0 M_K}{4M_S^3} \left\{ (\mathbf{ma})^4 + (\mathbf{mb})^4 + (\mathbf{mc})^4 \right\} - \\ & - \frac{\mu_0 M_K}{M_S^3} \left\{ \mathbf{m}^{(3)} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} + \frac{3}{2} m_\alpha^2 (\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})_\alpha^2 - \frac{3}{5} (\mathbf{m} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})^2 \right\} + \frac{29\mu_0 M_K}{2M_S} \left\{ \mathbf{m} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

где обозначено  $\hat{\mathbf{u}}$  – тензор деформаций,  $\mathbf{m}^{(3)}$  – вектор с компонентами  $\{m_x^3, m_y^3, m_z^3\}$ ,

$$M_T = \frac{2W_T}{\mu_0 g \mu_B}, \quad M_K = \frac{32W_K}{\mu_0 g \mu_B} \quad (\text{B.16})$$

Первое и третье слагаемые в формуле (В.15) описывают плотность энергии естественной анизотропии, а остальные – наведенной анизотропии, обусловленной магнитоупругой энергией. Поскольку  $|\mathbf{m}| \leq M_S$ , четвертым слагаемым в правой части формулы (В.15) можно пренебречь по сравнению с последним. Соответственно, можно пренебречь вкладом операторов (В.11) и (В.13) в полный гамильтониан домена. Кубическая константа кристаллического поля, вычисленная по известной константе магнестрикции, составляет  $W_K \approx 0,25$  мкэВ, что на порядок меньше теоретической оценки (В.14). Соответственно, из формулы (В.16) получаем оценку кубического параметра кристаллического поля  $M_K \approx 4 \cdot 10^4$  А/м.

Вычисляя коммутаторы операторов (В.8), (В.9), (В.10) и (В.12) с оператором полного орбитального момента домена, получим уравнения динамики средних значений орбитальным моментом домена в бездисперсионном (в состоянии намагниченности насыщения) приближении примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}_i}{dt} = & \mu_0 \gamma [(\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_i) \times \mathbf{J}_i] + \frac{2W_T}{N_i \hbar} [(\mathbf{J}_i \mathbf{c}_i) \mathbf{c}_i \times \mathbf{J}_i] + \frac{W_T}{N_i \hbar} (\mathbf{c}_i (\hat{\mathbf{u}} \mathbf{J}_i)) [\mathbf{c}_i \times \mathbf{J}_i] + \\ & + \frac{W_T}{N_i \hbar} (\mathbf{J}_i \mathbf{c}_i) [(\hat{\mathbf{u}} \mathbf{c}_i) \times \mathbf{J}_i] + \frac{460W_K - 2W_T/3}{N_i \hbar} [(\hat{\mathbf{u}} \mathbf{J}_i) \times \mathbf{J}_i] + \frac{230W_K - 2W_T/3}{N_i \hbar} [(\hat{\mathbf{u}} (\hat{\mathbf{u}} \mathbf{J}_i)) \times \mathbf{J}_i] + \\ & + \frac{2W_T}{N_i \hbar} ((\hat{\mathbf{u}} \mathbf{J}_i) \mathbf{c}_i) [(\hat{\mathbf{u}} \mathbf{c}_i) \times \mathbf{J}_i] - \frac{4W_K}{N_i^3 \hbar} [((\mathbf{J}_i \mathbf{a}_i)^3 \mathbf{a}_i + (\mathbf{J}_i \mathbf{b}_i)^3 \mathbf{b}_i + (\mathbf{J}_i \mathbf{c}_i)^3 \mathbf{c}_i) \times \mathbf{J}_i], \end{aligned} \quad (\text{В.17})$$

где  $0 < \gamma = g\mu_B/\hbar$  – гиромагнитное отношение,

$$\mathbf{h}_i = \frac{g\mu_B}{4\pi} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\mathbf{J}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{3((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \mathbf{J}_j)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^5} \right\}.$$

Обозначив микроскопическую намагниченность как  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  так, что  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_i) = -g\mu_B \mathbf{J}_i/v_i$  – намагниченность  $i$ -го домена, получим из уравнения (В.17) уравнение динамики микроскопической намагниченности

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mu_0 \gamma [(\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_m) \times \mathbf{m}], \quad (\text{В.18})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{D/d} \left\{ \frac{3((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{m}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right\} d^3r' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \iiint_D \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' + \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r})}{3} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

– микроскопическое поле размагничивания в теле  $D$ ,  $d$  – шаровой вырез диаметром порядка размера домена с центром в точке  $\mathbf{r} \in D$ , введенный для исключения самовоздействия,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_K &= \frac{M_K}{M_S^3} ((\mathbf{m}\mathbf{a})^3 \mathbf{a} + (\mathbf{m}\mathbf{b})^3 \mathbf{b} + (\mathbf{m}\mathbf{c})^3 \mathbf{c}) - \frac{2M_T}{M_S} (\mathbf{m}\mathbf{c})\mathbf{c} - \frac{M_A}{M_S} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{m} - \frac{M_T}{M_S} \mathbf{c}(\mathbf{c}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m})) - \\ &- \frac{M_T}{M_S} (\mathbf{m}\mathbf{c})\hat{\mathbf{u}}\mathbf{c} - \frac{M_B}{M_S} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m}) - \frac{2M_T}{M_S} (\mathbf{c}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{m}))\hat{\mathbf{u}}\mathbf{c} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

кристаллическое поле, в котором находится домен,

$$M_A = 29M_K - 2M_T/3, \quad M_B = 29M_K/2 - 2M_T/3 \quad (\text{B.21})$$

Из уравнения (B.18) следует условие устойчивого равновесия домена

$$\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_m = f\mathbf{m}, \quad (\text{B.22})$$

где  $f$  – произвольное положительное число. Ферромагнетик в полях слабых, по сравнению с полем насыщения, можно считать состоящим из отдельных доменов, намагниченных до насыщения. Это значит, что

$$|\mathbf{m}| = M_S.$$

Тогда из уравнения (B.22) получаем

$$f = \frac{|\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_m|}{M_S}$$

и

$$\mathbf{m} = M_S \frac{\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_m}{|\mathbf{H}_e + \mathbf{h}_K + \mathbf{h}_m|}, \quad (\text{B.23})$$

Рассмотрим внутри тела  $D$  медленно меняющиеся макроскопические поля и намагниченность как средние значения по физически малому объему  $V$ , содержащему большое число доменов:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{m}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3r', \quad \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \mathbf{h}_m(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3r'$$

и соответствующие флуктуационные составляющие:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{m}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad \tilde{\mathbf{h}}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_m(\mathbf{r}), \\ \langle \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) \rangle &= 0, \quad \langle \tilde{\mathbf{h}}_m(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad \langle |\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})|^2 \rangle = M_s^2(\mathbf{r}) - M^2(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

Медленно меняющаяся намагниченность  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  в соответствии с формулой (B.19) создает в центре домена регулярное поле:

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \iiint_D \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{3}, \quad (\text{B.25})$$

а флуктуационная составляющая намагниченности  $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$  создает случайное поле  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r})$ , соответственно. Ферромагнитное тело  $D$  состоит из доменов объемом  $v_i$  с центром в точке  $\mathbf{r}_i$  и магнитным моментом  $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}(\mathbf{r}_i)v_i$ , модуль которого постоянен и равен  $M_S v_i$ . Тогда:

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = \tilde{\mathbf{h}}_m(\mathbf{r}_j \in D) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \left\{ \frac{3((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \tilde{\mathbf{m}}_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^5} - \frac{\tilde{\mathbf{m}}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \right\}.$$

Если тело  $D$  далеко от насыщения, то  $|\mathbf{M}(\mathbf{r})|^2 \ll \langle |\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})|^2 \rangle = M_s^2(\mathbf{r})$  и можно считать, что случайные величины  $\mathbf{m}_i$  не коррелированы. Случайные величины  $\tilde{\mathbf{h}}_j$  при этом являются суммой большого числа случайных некоррелированных величин, и их распределение близко к нормальному

$$w(\mathbf{h}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma^3} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B.26})$$

с дисперсией  $\sigma^2 = \langle |\tilde{\mathbf{h}}_j|^2 \rangle$ .

Однородно намагниченное до насыщения тело в соответствии с формулой (B.25) создает в центре каждого домена поле, для которого  $|\mathbf{h}_j|^2 = M_s^2/9$ ,  $\langle |\tilde{\mathbf{h}}_j|^2 \rangle = 0$ . Тело с нулевой средней намагниченностью  $\mathbf{M}$  можно рассматривать как три случайно ориентированные подрешетки с намагниченностью  $M_S/3$ . Тогда  $\langle |\tilde{\mathbf{h}}_j|^2 \rangle = M_s^2/27$ . С учетом формулы (B.24) можно принять

$$\sigma^2 = (M_s^2 - M^2)/27. \quad (\text{B.27})$$

Перепишем формулу (B.23) с учетом флуктуаций поля:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r})\sqrt{H^2(\mathbf{r})+2\mathbf{H}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{h}}_m(\mathbf{r})+\tilde{h}_m^2(\mathbf{r})}=M_S(\tilde{\mathbf{h}}_m(\mathbf{r})+\mathbf{H}(\mathbf{r})), \quad (\text{B.28})$$

где обозначено  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_e(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_K(\mathbf{r})$ .

Макроскопическую намагниченность можно найти усреднением формулы (B.28) по случайным ориентациям осей легкого намагничивания и по полю размагничивания. По формуле (B.19) поле  $\mathbf{h}_m(\mathbf{r})$  зависит от намагниченности во всех точках, кроме точки  $\mathbf{r}$ . Поле же  $\mathbf{h}_K(\mathbf{r})$  по формуле (B.20) определяется намагниченностью в точке  $\mathbf{r}$  и ориентацией осей легкого намагничивания в этой же точке. Поэтому случайная величина  $\mathbf{h}_m(\mathbf{r})$  не зависит от  $\mathbf{h}_K(\mathbf{r})$  и от  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , и усреднение по намагниченности, полю размагничивания и по ориентациям осей легкого намагничивания можно производить последовательно. Усредним формулу (B.28) с учетом распределения (B.26) для одного кристаллита, учитывая, что в пределах кристаллита направления осей легкого намагничивания постоянны:

$$\frac{\mathbf{M}}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{H^2 + 2\mathbf{H}\mathbf{h} + h^2} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) d^3h = M_S \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{M}$  – макроскопическая намагниченность кристаллита, поля берутся в центре кристаллита.

Перейдем к сферической системе координат, направив полярную ось вдоль вектора  $\mathbf{H}$ . Тогда

$$\frac{2\pi\mathbf{M}}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{H^2 + 2\mathbf{H}\mathbf{h} + h^2} h^2 \sin(\theta) \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) dh d\theta = M_S \mathbf{H}. \quad (\text{B.29})$$

Параметрический интеграл в левой части формулы (B.29) не вычисляется аналитически, численный расчет показывает, что для  $0 \leq H/\sigma \leq 100$  он хорошо аппроксимируется функцией

$$\sigma^4 \sqrt{6\pi + 2\pi H^2/\sigma^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}\sqrt{3\sigma^2 + H_{ef}^2 + 2\mathbf{H}_{ef}\mathbf{h}_K + h_K^2} = M_S(\mathbf{h}_K + \mathbf{H}_{ef}), \quad (\text{B.30})$$

где обозначено  $\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m$ .

Из формулы (В.20) следует, что  $h_K^2 \leq M_K^2 + M_T^2$ . Для магнитомягкого ферромагнетика при  $M_T$ ,  $M_K \ll M_S$  получаем  $h_K^2 \ll 3\sigma^2 + H_{ef}^2$ , и левую часть формулы (В.30) можно разложить в ряд Тейлора, ограничившись линейным по  $\mathbf{h}_K$  слагаемым. С учетом формулы (В.27), получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(M_S^2 + 6\mathbf{H}\mathbf{M} + 9H^2) + 9\mathbf{M}(\mathbf{H}\mathbf{h}_K) + 3\mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{h}_K) = \\ & = M_S(3\mathbf{h}_K + 3\mathbf{H} + \mathbf{M})\sqrt{M_S^2 + 6\mathbf{H}\mathbf{M} + 9H^2}, \end{aligned} \quad (\text{В.31})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_e(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_1(\mathbf{r}), \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \iiint_D \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \end{aligned} \quad (\text{В.32})$$

– напряженность поля размагничивания.

Формулу (В.31) можно переписать в виде  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}^e(\mathbf{r})$ , где

$$\mathbf{M}^e = M_S \frac{3\mathbf{H} + \mathbf{M} + 3\mathbf{h}_K}{M_S^2 + 9H^2 + 9\mathbf{H}\mathbf{h}_K} \sqrt{M_S^2 + 6\mathbf{H}\mathbf{M} + 9H^2} - 3\mathbf{M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{h}_K + 2\mathbf{H})}{M_S^2 + 9H^2 + 9\mathbf{H}\mathbf{h}_K}. \quad (\text{В.33})$$

Тогда уравнение релаксации макроскопической намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  к равновесной намагниченности  $\mathbf{M}^e(\mathbf{r})$  принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^e}{T_1}, \quad (\text{В.34})$$

где  $T_1$  – время продольной релаксации.

Эффективное магнитное поле  $\mathbf{V}$ , действующее на локализованный электрон, складывается из внешнего поля  $\mu_0\mathbf{H}$  и индуцированного поля  $\mathbf{V}_i$ , создаваемого в домене токами проводимости  $\mathbf{j}$ , индуцируемыми переменным полем магнитного диполя  $\mathbf{V}_d$ . Магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}$ , находящийся в начале координат, создает магнитное поле

$$\mathbf{V}_d(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}. \quad (\text{В.35})$$

Для индуцированного в среде с удельным сопротивлением  $\rho$  поля  $\mathbf{V}_i$  получаем

$$\text{rot } \mathbf{V}_i(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\rho}, \quad \text{rot rot } \mathbf{V}_i(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \mathbf{V}_d}{\partial t}.$$

Поскольку  $\operatorname{div}\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = 0$ , с учетом формулы (4.6) получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0(\dot{\mathbf{m}}\mathbf{r})\mathbf{r}}{\rho r^5} - \frac{\mu_0\dot{\mathbf{m}}}{\rho r^3}, \quad \mathbf{B}_i(r \rightarrow \infty) = 0,$$

которое имеет единственное решение, линейно зависящее от вектора  $\dot{\mathbf{m}}$ .

Тогда индуцированное магнитное поле в точке локализации диполя  $\mathbf{B}_i(0)$  можно разложить по базису  $\mathbf{m}$ ,  $\dot{\mathbf{m}}$ ,  $[\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{m}]$  и записать эффективное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , действующее на магнитный диполь в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + a\mathbf{m}(\mathbf{m}\dot{\mathbf{m}}) + c\dot{\mathbf{m}} + d[\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{m}]. \quad (\text{B.36})$$

Вводя единичный вектор  $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$ , для динамики среднего магнитного момента домена  $\mathbf{m} = \mu_B\mathbf{S}/2N$ ,  $|\mathbf{m}| = m = \mu_B$ , получаем из уравнений (B.15) и (B.17) уравнения движения:

$$\alpha \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \beta \left[ \frac{d\mathbf{m}}{dt} \times \mathbf{m} \right] = \gamma\mu_0[\mathbf{H} \times \mathbf{m}] - \frac{\Omega_l}{\mu_B}(\mathbf{ml})[\mathbf{m} \times \mathbf{l}] - \frac{\Omega_t}{\mu_B^3}(\mathbf{ml})^3[\mathbf{m} \times \mathbf{l}], \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\Omega_l}{4\mu_B^2}(\mathbf{ml})[\mathbf{m} \times \mathbf{l}] + \frac{\Omega_t}{4\mu_B^4}(\mathbf{ml})^3[\mathbf{m} \times \mathbf{l}] - \Omega_{b2}(\mathbf{bl})[\mathbf{b} \times \mathbf{l}] + \Omega_b(\mathbf{bl})^3[\mathbf{b} \times \mathbf{l}], \quad (\text{B.38})$$

где обозначено  $\Omega_l = \frac{16K_1\nu}{\hbar}$ ,  $\Omega_t = \frac{2^5 K_2\nu}{\hbar N^3}$ ,  $\Omega_b = 2^{10} \gamma B_K^4 N^3$ ,  $\Omega_{b2} = 2^{10} \gamma B_K^4 N^3$ ,  $\alpha = 1 + \gamma d$ ,

$\beta = -\gamma c$ .

### Список литературы

В.1. Маррел, Д. Теория валентности / Д. Маррел, С. Кеттл, Д. Теддер. – М.: Мир, 1968.